FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Boun
A.M.N

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. XI.

pro Anno MDCCLXV.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXVII.

r.6.70275 April 28

SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XI.

MATHEMATICA.

I.

De vſu functionum diſcontinuarum in Analyſi.

Auctore L. Eulero pag. 3.

Qui problematis de motu cordarum vibratorio ſolutiones dederunt Geometrae, non niſi illum caſum contemplati ſunt, quo figura, cordae ab initio motus impreſſa, regularis et certa quadam aequatione comprehenſa eſſe ſupponitur; alterum vero caſum, ſi haec figura fuerit diſcontinua ſiue irregularis, negarunt ad Analyſin pertinere aut motus inde ſecuturos poſſe vlla ratione definiri. Quae quidem inueſtigatio cum non tantum ex Analyſi minime proſcribenda, ſed ad eam potius nouis inſignibus ſubſidiis ditandam inprimis apta videatur: iam pridem Illuſtris huius diſſertationis Auctor motum cordarum vibrantium generaliſſime ita definiuit, vt ea ſolutio ad omnes motus et figuras, cordae in ſtatu initiali impreſſas, pateret. Statim vero perſpexit Illuſtris Vir, problematis difficultates ſuperare Analyſeos adhuc excultae vires nouamque ad id ſoluendam calculi integralis partem re-

 quiri,

quiri, cuius non complura modo in his Commentariis ſpecimina dedit, ſed plenam quoque eius tractationem abſoluto Operi de Calculo integrali, quod typis nunc hic exſcribitur, inſeruit.

Concipiatur ſcilicet corda aliqua tenſa, eique arbitraria quaeuis figura et in ſingulis ſimul ipſius punctis arbitraria imprimatur celeritas. Ductis igitur coordinatis x et y, euidens eſt, adplicatam non pro diuerſis ſolum ipſius curuae punctis, ſed etiam in eodem curuae puncto pro ſingulis temporum momentis variare; adeoque y fore functionem duarum variabilium x et t ſimul, quarum neutra per alteram determinatur. Vt porro in aequatione pro cordae huius motu inuenta ſtatus initialis exprimatur; poſito $t = 0$ relatio inter x et y inde orta figuram cordae initialem repraeſentare debebit, quae cum libero manus ductu formata ſupponatur, functio quaedam diſcontinua aequationem ingredietur, atque ſimiliter, vt ſecundae problematis conditioni ſatisfiat, alia adhuc arbitraria functio, ex motu initiali cuilibet puncto impreſſo definienda, accedat neceſſe eſt. En igitur duas rationes, ob quas propoſitum problema per regulas vſitati calculi integralis reſolui non poteſt; in hoc enim non niſi functiones vnius variabilis pertractantur, cum, etſi plures variabiles aequationibus ineſſe videantur per ſubſtitutiones aut transformationes introductae, eae tamen ita a ſe pendeant, vt omnes per vnam poſſint determinari; deinde quae in calculo

culo integrali communi per integrationes inuehuntur nouae quantitates, non niſi quantitates conſtantes ſunt, minime vero functiones vnius pluriumue variabilium eaeque adeo diſcontinuae. Huius igitur nouae Analyſeos vim et proprium characterem Ill. Auctor clariſſime et ex primis principiis expoſuit, et cum functionum diuerſae claſſes commodiſſimam totius calculi integralis diuiſionem ſuppeditent, ex hoc fundamento partes ampliſſimae huius ſcientiae diſtinxit et definiuit, vſumque functionum diſcontinuarum in Analyſi exemplis confirmauit. En igitur campum nouum eumque latiſſime patentem, in quo ſumma ingenia ad Analyſeos incrementa atque feliciores ſubinde in naturae ſcrutinio ſucceſſus vires ſuas exercere poſſunt.

II.

De vſu noui Algorithmi in ſoluendo problemate Pelliano.

Auctore L. Eulero pag. 28.

In Arithmetica indefinita, quae Diophantea adpellari ſolet, ſaepe numero problematum reſolutio eo nititur, vt expreſſiones ſub hac forma $lxx + mx + n$ contentae quadrata ſint efficiendae; quod,

quod, ſimulac vnus ipſius x valor quaeſito ſatisfaciens fuerit cognitus, infinite multis modis etiam in integris ipſius x valoribus praeſtari poteſt, quicunque etiam pro l, m et n numeri integri ponantur, modo l ſit numerus poſitiuus non quadratus. Atque ſolutionum harum innumerabilium inſigne compendium ex eo petitur, quod conſtet, omnes iſtos ipſius x valores idoneos ſecundum ſeriem recurrentem progredi, cuius ſinguli termini ex binis praecedentibus certa et conſtanti lege determinantur. Semper autem huius generis reſolutiones ad hoc redeunt, vt propoſito numero quocunque l inueniatur numerus quadratus qq, qui per illum multiplicatus, adſcita vnitate, iterum fiat quadratus, ſiue vt $lqq + 1$ fiat $= pp$; quod quidem in fractis atque paucis quibusdam caſibus obuiis facile expeditur, verum, ſi pro quouis valore ipſius l valores ipſius q integri deſiderentur, multum difficultatis habet, adeoque dignum omnino eſt, in quo Geometrarum ſe exerceat induſtria. Quam Pellius olim dedit, in ſe ingenioſiſſima eſt ſolutio; ad quam taedioſos autem et moleſtos calculos, cum continuis radicum extractionibus abſoluatur, ea deducat, tentanti mox patebit. Hic igitur Ill. Auctor nouum quoddam Algorithmi genus, cuius vim et naturam iam pridem in his Commentariis demonſtrauit, huic problemati adplicuit atque pro omnibus valoribus ipſius l centenarium non ſuperantibus idoneos valores

res q methodo maxime concinna et facili actu computauit. Scilicet vt ſit $lqq + 1 = pp$; euidens eſt, eſſe proxime $\sqrt{l} = \frac{p}{q}$, quae fractio valorem irrationalem $\sqrt{l}$ tam prope exprimit, vt id, niſi adhibendo maiores numeros, adcuratius fieri nequeat. Ante omnia igitur Ill. Auctor methodum expoſuit, ope fractionum continuarum radices quadratas euolvendi; atque tum, adhibitis noui Algorithmi ſubſidiis, pro quolibet caſu p et q ita definire docuit, vt $lqq + 1$ quadratum fieret ipſamque methodum, euolutis multis exemplis, ſtabiliuit atque illuſtrauit, idque potiſſimum in numeris admodum magnis; ſi enim verbi gratia aſſumatur $l = 61$; reperitur valor ipſius $q = 226153980$; atque ipſius $p = 1766319049$, vbi ſimul certum eſt, non dari numeros minores caſui ſatisfacientes; ad quos numeros cum methodo Pelliana non niſi per taedioſiſſimos calculos peruenire licuiſſet; non ſolum huius ſolutionis praeſtantia inde demonſtratur, ſed vix etiam aliud dari poteſt praeclarius ſpecimen, quo Algorithmi iſtius noui, ab Ill. Auctore inuenti, egregius vſus Geometris poſſit commendari.

III.

Proprietates triangulorum, quorum anguli certam inter ſe rationem tenent.

Auctore L. Eulero pag. 67.

Inter elementares triangulorum proprietates ea fere primo loco tradi ſolet, qua, ſi duo anguli in dato quodam triangulo fuerint aequales, etiam duo latera ipſis oppoſita fore inter ſe aequalia demonſtratur. Si igitur, ſpeculatione hac latius extenſa, rationi aequalitatis aliam quamcunque duorum angulorum rationem ſubſtituamus; evidens eſt, etiam inter latera huius trianguli certam et determinatam relationem locum eſſe habituram.

Neque igitur mediocriter doctrina triangulorum amplificari videtur, inuenta certa et facili methodo, ſimul ac in dato quodam triangulo ratio inter binos eius angulos fuerit cognita, relationem inter ipſius latera intercedentem exhibendi; atque hoc ipſum eſt problema, cuius analyticam reſolutionem in praeſenti diſſertatione III. Auctor exhibet, quodque geometrarum ſtudio eo magis commendari meretur, quia ad earum veritatum geometricarum claſſem pertinet, ad quas Analyſis non per-

perducit, ſed quibus potius ad altiora tendens ea eſt ſuperſtruenda.

Si igitur ponamus binos trianguli angulos α et β eſſe inter ſe, vti $m:n$; intricatos calculos, ad quos, ſimulac ratio $m:n$ vel tantillum aſſumitur complicata, problema deducit, nullo feliciori compendio ſuperare licuit, quam incipiendo a caſu ſimpliciſſimo atque hinc ad magis compoſitos ordine progrediendo. Principio itaque exhibet Ill. Auctor reſolutiones illorum caſuum, quibus, poſito $m = 1$, pro n valores 2, 3, 4, 5, 6. ſucceſſiue aſſumuntur. Quibus expeditis ex contemplatione formularum pro his caſibus erutarum inſignem prorſus et attentione quam maxime dignam legem progreſſionis detegere Ill. Auctori contigit; quodſi enim ii caſus, in quibus n valores pares obtinet, ab iis, in quibus n eſt impar, ſeparentur et ſinguli caſus ſeorſim inter ſe conferantur: admiratione omnino dignum eſt, formulas memoratas ſeriem recurrentem conſtituere, cuius et ſcala relationis et terminus generalis poſſit exhiberi, quae egregia proprietas cum initio non niſi per inductionem fuerit detecta; ne huic nimium tribui videatur, etiam analyticis principiis pro vtraque caſuum claſſe ab Ill. Auctore ea ſtabilita adeoque inductionis huius cum veritate conſenſus rigide eſt demonſtratus.

In adplicatione huius inueſtigationis ad caſus ſpeciales triangula potiſſimum iſoſcelia conſiderari

 me-

merentur; in his enim pro deſcribendis polygonis regularibus ſaepe numero ratio inter angulum verticalem et angulos ad baſin praeſcribi ſolet; atque hic quidem duo caſus diuerſi, prouti angulus verticalis vel multiplum vel ſubmultiplum anguli ad baſin eſt, ſeorſim euoluuntur; ita, vt haec disquiſitio non ad amplificandam modo triangulorum theoriam, ſed in ipſa quoque praxi geometrica inſignem vſum habere ſit exiſtimanda.

IV.

Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum.

Auctore L. Eulero pag. 103.

Speculatio haec circa certa puncta verſatur, quae in quouis triangulo Geometrae contemplari ſunt ſoliti. Primum horum punctorum eſt id, in quo terna perpendicula, quae ex ſingulis angulis in oppoſita latera demittuntur, ſeſe mutuo interſecant, quod punctum in adiectis figuris littera E deſignatur. Secundum punctum, littera F notatum, eſt centrum grauitatis trianguli, quod obtinetur, ſi ex ſingulis angulis rectae latera oppoſita biſecantes ducantur, quippe quae ſe mutuo in hoc puncto interſecant. Tertium punctum G eſt centrum circuli in-

inſcripti, in quo rectae ſingulos angulos biſecantes ſibi mutuo occurrunt. Quartum denique punctum H eſt centrum circuli circumſcripti, quod obtinetur, erectis ad quodlibet latus ex puncto eius medio perpendiculis iisque donec ſeſe mutuo interſecent, prolongatis. Quatuor igitur horum punctorum poſitionem Ill. Auctor generatim pro quouis triangulo definit, vbi ſequentia potiſſimum hic obſeruari merentur: 1mo in triangulo aequilatero haec quatuor puncta in vnum coire 2do. Si triangulum ſit iſosceles, ea puncta in linea recta fore diſpoſita, quae ex angulo verticali perpendiculariter in baſin ducta eſt. 3^tio in triangulis acutangulis omnia illa quatuor puncta intra triangulum cadere. 4to in triangulis vero obtuſangulis tantum duo eorum, ſcilicet centrum grauitatis et circuli inſcripti intra triangulum; reliqua autem duo puncta E et H extra triangulum fore ſita; illud ſcilicet E vltra angulum obtuſum, hoc vero H vltra latus ei angulo oppoſitum.

Inprimis vero notatu dignum eſt, quod Ill. Auctor oſtendit, tria horum punctorum E, F et H ſemper in eadem linea recta fore ſita atque adeo punctum F ita fore intra E et H conſtitutum, vt interuallum EF duplo ſit maius interuallo FH; quare cum punctum H ex punctis E et F ſponte determinatur: Ill. Auctor ſequens problema reſoluit; vt ſumtis pro lubitu ternis punctis E, F et G,

ipſum triangulum, ad quod pertinent, conſtruere doceat; id quod commodiſſime ad reſolutionem aequationis cubicae perduxit, cuius ternae radices latera trianguli quaeſiti exprimant. Inprimis autem memorata haec circa poſitionem punctorum E, F et H, obſeruatio Geometrarum attentione digna eſt, quam ſequenti theoremate complecti licet: Si triangulo cuicunque circulus circumſcribatur et a centro circuli per centrum grauitatis trianguli linea recta producatur, donec pars producta duplo maior fiat interuallo inter haec ambo centra: tum eius terminus in eo ipſo puncto erit ſitus, vbi terna perpendicula ex ſingulis trianguli angulis in latera oppoſita demiſſa ſeſe mutuo interſecant.

V.

Obſeruationes Analyticae.

Auctore L. Eulero pag. 124

In praeſenti diſſertatione Ill. Auctor legem et naturam memorabilis cuiusdam ſeriei indagat, quae non ob reconditum modo, quo ipſius termini progrediuntur, ordinem, ſed ob eam quoque rationem peculiari attentione digna eſt, quod varias easque in Analyſi magni momenti obſeruationes faciendi commodam ſuppeditat occaſionem. Inter coeffi-

coefficientes numericos, quibus termini trinomii $1 + x + xx$ ad poteſtatem quamcunque eleuati adficiuntur, hic ille tantum conſideratur, qui ad medium terminum pertinet et omnium maximus eſt. Eiusmodi igitur trinomio ordine ad omnes poteſtates exponentium ſecundum numeros naturales progredientium eleuato, ſi ex ſingulis his dignitatibus excerpatur coefficiens termini medii; ſeries inde formata 1, x, $3x^2$, $7x^3$ . . ea eſt, in cuius lege progreſſionis et ſumma indagandis praeſens diſſertatio verſatur.

Atque hic quidem initio, ſi eleuetur trinomium ad poteſtatem indefinitam exponentis n, colligendis in vnam ſummam omnibus iis coefficientibus, qui ad terminum x^n pertinent, haud difficulter terminus ſeriei noſtrae generalis eruitur. Huius igitur ope ſerie ad ſufficientem vsque terminorum numerum continuata, ex intuitu decem priorum terminorum ſeries hanc ſingularem proprietatem prae ſe ferre videtur, vt, ſubtractis ſingulis terminis a triplo praecedentis, differentiae numeros praebeant pronicos, quorum radices ita ſunt comparatae, vt ſeriem conſtituant recurrentem; vnde, et ipſam noſtram ſeriem eſſe talem, concludi et ſcala relationis determinari poſſet. Enim vero cum ſtatim in termino vndecimo cuius a triplo praecedentis differentia ne numerus quidem pronicus eſt, multo

multo minus radicem habet pronicum, haec obſervatio fallat: ſeries noſtra admodum memorabili exemplo inductionis valde probabilis et tamen fallacis, quam caute ei ſit in Analyſi indulgendum, aperte declarat. Miſſa igitur inductione, ex ſolidis Analyſeos principiis lex progreſſionis ab Ill. Auctore ſtabilita et relatio, quae inter ternos terminos contiguos intercedit, detecta eſt, quam quia ipſe exponens n ingreditur, ſeriem noſtram ad genus recurrentium non pertinere, manifeſtum eſt. Definita itaque cuiusque termini ad binos antecedentes relatione; ope cuiusdam integrationis ſumma quoque ſeriei in infinitum continuatae inueſtigatur, quam obſeruamus, fore imaginariam, ſi ſit $x > \frac{1}{3}$ vel ipſi x negatiuos valores tribuendo ſi ſit $x = -y$ et $y > 1$; infinitam vero eſſe caſu, quo $x = \frac{1}{3}$ vel $y = 1$. Ex inuentis hoc modo formulis analyticis methodum multo latius patentem deriuauit Ill. Auctor, cuius ope adeo haec poteſtas multo generalior $(a + bx + cxx)^n$ ita euolui poteſt, vt non medii tantum ſingularum poteſtatum termini, ſed ii quoque, qui vtrinque a mediis aeque diſtant, aſſignari eorumque natura et ſumma facili calculo poſſit inueſtigari.

VI.

VI.

De motu rectilineo trium corporum ſe mutuo attrahentium.

Auctore L. Eulero pag. 144.

VII.

De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti.

Auctore L. Eulero pag. 152.

Ex quo corporum coeleſtium leges motus a *Newtono* detectae ſunt, Aſtronomiae ad ſummum faſtigium euehendae ſpes omnis in celebratiſſimi de motu trium corporum ſe ſecundum iſtas leges attrahentium problematis perfecta reſolutione ponenda eſt. Quanquam enim numerus corporum in planetari noſtro ſyſtemate ſeſe mutuo attrahentium maximus imo infinitus ſit; tamen, cum euolutio motus plurium corporum, niſi motu trium expedito, ſperari non poſſit: hic caſus tanquam fons et fundamentum perficiendae ſiderum ſcientiae ſpectari debet. Verum hoc ipſum de tribus corporibus ſecundum leges *Newtoni* ſeſe attrahentibus problema cum ſenſu generali acceptum vires ingenii

 huma-

humani fere tranſcendere videatur; eius ſolutionem ita tentarunt Geometrae, vt illud ſub variis ad minimum reſtrictionibus expedire viamque hoc modo ad ſolutionem generalem munire annitrentur. In binis igitur praeſentibus diſſertationibus Ill. Auctor eiusmodi duo reſoluit problemata, quae illi tam ſunt affinia, vt, his non expeditis, de illo reſoluendo ne cogitari quidem poſſit. In priori ſcilicet eum problematis iſtius celebratiſſimi caſum examini Ill Auctor ſubiecit, quo tria corpora ſeſe mutuo attrahentia rectilineo motu feruntur, qui, quanquam primus eſt et omnium facillimus, tamen hucusque perfecte reſolui non potuit, hic vero iam ad aequationes differentiales primi gradus inter ternas variabiles ſingularibus quibusdam artificiis eſt reductus. In poſteriori autem diſſertatione Ill Auctor motum corporis ad duo centra virium fixa in ratione reciproca duplicata diſtantiarum attracti inveſtigauit; atque huius quidem argumenti primam partem, cum ſcilicet motus in eodem cum binis virium centris plano fieri ſupponitur, in ſuperiori Comment. Tomo ita euoluit, vt non ſolum orbitae deſcriptae conſtructionem ope quadraturae curuae cuiusdam admodum ſimplicis exhibuerit, ſed etiam in alia diſſertatione Comment. Acad Berolin. inſerta infinite multos caſus detexerit quibus curua deſcripta futura ſit algebraica. Quo igitur propoſitae quaeſtioni plene ſatisfiat, in hac diſſertatione Ill. Auctor etiam illum

illum caſum reſoluit, quo corpus non in eodem plano, in quo centra virium fixa ſunt, mouetur; et hic quidem peculiaribus quibusdam artificiis aequationes differentiales ex principiis motus petitae ſtatim ad primum gradum reductae ſunt; ternae vero variabiles ita erant inter ſe complicatae, vt eas reſoluendi methodus nulla patuiſſet, niſi ſubſtitutione quadam prorſus ſingulari non concinnam modo aequationem, ſed et a variabilium permixtione immunem elicere Ill. Auctori licuiſſet; ad quem ſcopum cum initio per ambages is perueniſſet; poſtea methodum multo breuiorem adeptus eſt, cuius beneficio vnica ſubſtitutione variabilium ſeparatio commodiſſime obtinetur. Formulas hoc modo inuentas Ill. Auctor etiam ad motus in eodem cum centris virium plano abſoluti determinationem adplicat, oſtendit que, corpus tali motu delatum non in curuis modo algebraicis, ſed ſectionibus adeo conicis moueri poſſe, quarum foci in binis iſtis virium centris ſint conſtituti.

Quodſi vero corpus non in eodem plano moveatur, notatu quam maxime digna obſeruatio eſt, fieri poſſe, vt corpus deſcribendo curuam duplicis curuaturae in ſuperficie ſphaeroidis elliptici vel conoidis hyperbolici moueatur. Denique etiam hoc notari meretur, ex his formulis caſum omnium facillimum difficillime deriuari; adplicatis enim iis ad caſum, quo virium attrahentium alterutra euaneſcit,

neſcit , tam prodeunt complicatae aequationes , vt non niſi peculiaribus atque inſignibus quibusdam artificiis ab Ill. Auctore adhibitis potuerint reſolui ; cuius difficultatis ratio vt quodammodo adpareat , perpendendum eſt , etiamſi in formulis inuentis maſſam A vel B ponamus minimam et euaneſcentem , tamen , ſi corpus ſatis prope ad eam acceſſerit , ob diſtantiam iam euaneſcentem attractionem inde oriri poſſe finitam , cuius quaſi veſtigia quaedam in iſtis formulis ad hunc caſum adcommodatis remanere videantur.

VIII.

De phaenomenis coeli per ſegmenta ſphaerica diaphana ſpectati.

Auctore L. Eulero pag. 158. (185)

Cum radii a corporibus coeleſtibus ad oculum propagati atmoſphaeram peragrare ibique varias perpeti refractiones debeant ; manifeſtum eſt, viſionis naturam atque omnia coeli phaenomena a medii , per quod radii lucis tranſire debent , conſtitutione maxime pendere eaque ſub alia prorſus forma fore adparitura , ſi loco atmoſphaerae noſtrae aliud quoddam alius materiae medium diaphanum ſubſtituatur. Atque hic quidem ſingularia et notatu quam maxime

xime digna ſe offerunt phaenomena, ſi coelum per ſegmenta ſphaerica vitrea, oculo in axe, ſed extra centrum ſphaerae conſtituto, contueamur, cum ſtellae non de loco ſolum ſuo depulſae conſpiciantur, verum quaedam etiam penitus diſpareant, aliae vero geminatae in diuerſis coeli locis ſint conſpiciendae. Hic vero facile intelligitur, phaenomena coeli hoc modo ſpectati eo magis a veritate diſcrepare, quo maior eſt ſiderum ab axe viſionis elongatio et quo magis oculus a centro ſphaerae remouetur; contra vero omnia perinde, ac nudis oculis, iri conſpectum, ſi ad ipſum centrum ſphaerae adplicetur oculus. Quodſi enim oculi a centro ſphaerae diſtantia ponatur $= d$; radius ſphaerae $= a$; diſtantia ſtellae ab axe $= \Phi$; angulus incidentiae ζ ita per has quantitates determinatur, vt, poſita ratione refractionis $n : 1$, fiat ſin. $\zeta = \frac{nd}{a}$. ſin. Φ; vnde manifeſtum eſt, Φ et d ita augeri poſſe, vt fiat ſin. $\zeta > 1$ adeoque imaginarius; vnde certa quaedam coeli regio vacua et obſcuriſſima adpareat neceſſe eſt, quae maxima euadit, poſito $d = a$, quo caſu ſegmentum ſphaerae in integram ſphaerae ſuperficiem abit. Pro hoc igitur caſu Ill. Auctor in hac diſſertatione primo loco praecipua phaenomena expoſuit atque ex optices principiis demonſtrauit, quomodo ſtella per integram ſphaeram vitream ſpectata ita poſſit adparere, vt circulum quendam lucidum formet et ſimul quoque in ipſius centro con-

ſpicua ſit immo et triplicata videatur; computatur dein ex inuentis formulis tabula, vnde pro ſingulis elongationibus terna eiusmodi loca ſideris adparentia poſſint determinari. Oculo iam porro centro ſphaerae propius admoto, hi inprimis ipſius d valores attentione digni videbantur, quo $d = \frac{a}{n}$ vel $d = a.\sqrt{\frac{1}{n}}$, vbi quidem, cum per hunc oculi ſitum ſphaera in duo ſegmenta, alterum hemiſphaerio maius, alterum minus, diuidatur; pro vtroque ſegmento ſingularia quaedam annotata ſunt phaenomena. Denique cum expreſſionem modo allatam ratio quoque refractionis ingrediatur, facile colligitur, hanc viſionem ſe multo aliter habituram, ſi ſphaerae vitreae globus aqueus ſubſtituatur, cuius caſus expoſitio digna Ill. Auctori viſa eſt, quae ex iisdem principiis deriuetur, et argumentum in dioptricis minime contemnendum conſtituere iure meritoque eſt aeſtimanda.

PHYSICO-

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

Supplementum de figura dentium rotarum.

Auctore L. Eulero pag. 207.

Conſtat ex principiis mechanicis, quantum pro machinarum conſtructione in eo momenti ſitum ſit, vt vniformitas motus in omnibus earum partibus, quantum fieri poteſt, obtineatur, ſiquidem hoc modo maximus a viribus agentibus effectus exſpectari poteſt; ſi enim vel tota machina vel tantum partes eius modo celerius, modo tardius, moueantur; hae ipſae accelerationes et retardationes non contemnendam virium agentium partem conſumunt; quo ipſo effectus, cui producendo machina deſtinata eſt, non mediocriter imminuitur. Cum igitur Ill. Auctor iam in IV. volumine horum Commentariorum hoc argumentum tractauiſſet; iam ibi, quomodo rotarum dentes ad obtinendam in omnibus rotis vniformitatem motus formari oporteat, calculis ſatis prolixis inueſtigauit; nunc vero methodo multo faciliori conſtructionem geometricam ipſi elicere licuit pro dentibus rotae impulſae ex data

data dentium rotae impellentis figura ita deſcribendis, vt vtrinque motus vniformis oriatur et quae vis ad alteram rotandam impenditur, ea perpetuo aequale momentum ad alteram circumagendam exerceat; et ex infinitis modis, quibus hic ſcopus obtineri poteſt, Ill. Auctor ad eos inprimis attentus fuit, qui ad ipſam praxin maxime accommodati ſunt viſi; atque grauiſſimi huius argumenti, cuius tam praeclarus in mechanicis vſus eſt, tractationem non ſolidiſſimis modo principiis ſuperſtruxit, ſed variis quoque exemplis ipſum illius vſum dilucide expoſuit.

II.

De motu fluidorum a diuerſo caloris gradu oriundo.

Auctore L. Eulero p. 232.

Argumentum, quod Ill. Auctor in hac diſſertatione pertractat, non modo prorſus nouum eſt, cum nemo adhuc motum fluidorum a calore oriundum geometrice determinare conatus ſit, ſed ad eam quoque Analyſeos partem eſt referendum, quae non ita pridem tractari coepta eſt. Hic quidem neutiquam de inteſtino illo motu, in quo ex philoſophorum ſententia caloris cauſa ponitur, quaeſtio

ſtio eſt; ſed eatenus tantum in theoria motus fluidorum caloris ratio habenda eſt, quatenus a calore in maius ſpatium expanduntur fluida, vnde eorum denſitas, a qua potiſſimum motus determinatio pendet, imminuitur. Simulac enim in tubi communicantis vno crure calefiat aqua ſicque eius denſitas imminuatur: non iam ea cum aqua altero crure contenta in aequilibrio conſiſtet, niſi illius altititudo vltra libellam aliquantillum augeatur. Atque ex his ipſis principiis iam pridem ab Ill. Auctore oſtenſum eſt, non ad aquam modo, ſed et aërem in aequilibrio conſeruandum vbique ad aequales altitudines aequalem quoque denſitatem ideoque etiam aequalem caloris gradum requiri. Qualis vero, ſublato per caloris diuerſos gradus aequilibrio, ſubſecuturus ſit fluidorum motus, Ill. Auctor, noua illa Analyſi a ſe vberius exculta, nunc demum inueſtigare inſtituit, atque, vnde vires huiusmodi motum generantes petendae ſint, qualisque ſit motus ille ex iis oriundus, clariſſime in praeſenti diſſertatione demonſtrat, et facili ratiocinio euincit, ſi in vaſe ſatis amplo aqua ex vna parte admoti ignis ope reddatur calidior, quam in altera, non modo aequilibrium iri ſublatum, ſed aquam quoque in regione infima a parte frigida ad calidam continuo aſcendere, contra vero in regione ſumma a parte calida ad frigidam deferri debere; id quod et obſeruationes vbiuis obuiae luculenter declarant. His in

 genere

genere obſeruatis Ill. Auctor tubum cuiuscunque figurae in ſe redeuntem contemplatur, cuius alterum latus admoto igne calefiat continuo, dum oppoſita vaſis pars maneat frigida. In hunc igitur tubum ſi aqua infundatur, ea quidem, dum in calido crure maiorem, quam in frigido, altitudinem occupat, ad aequilibrii ſtatum ſe componere poterit. Interim tamen, aucta aquae infuſae quantitate, aequilibrium iam non habebit locum, ſed ſimulac aqua in tubo contenta certum ſuperauerit terminum, motus ibi perpetuus generabitur; id quod inprimis euenit, quando tubus fluido penitus impletur, quem caſum Ill. Auctor praecipuo examini ſubmittit, vbi ex ſolidiſſimis Hydrodynamices principiis per calculos ſatis operoſos tandem inuenit, aquam hoc caſu per crus infimum continuo ad locum tubi calidiſſimum adfluere, indeque per crus ſupremum iterum ad regionem calidam defluere debere, atque adeo huius motus celeritatem in ſingulis tubi punctis ad quoduis tempus definiuit. In quo inprimis notari meretur, quod hic motus eo magis acceleretur, quo anguſtior tubus in parte ſuprema fuerit prae parte infima. Neque dubitat Ill. Auctor, quin inde ad vſum communem plurima inſignia ſubſidia hauriri queant, inter quae maxima fortaſſe attentione dignus videtur huiusmodi tubus, quem Ill. Auctor ad calefacienda conclavia proponit, quique id praeſtet commodi, vt in ipſo

ipſo tubo ignis ſuſcitari queat, quandoquidem aër in tubo contentus perinde, ac aqua, continuo per tubum motu circulari ſit defluxurus ignemque ſuſtentaturus.

III.

De Admirando Frigore Artificiali quo Mercurius, ſiue Hydrargyrus eſt congelatus Diſſertatio.

Auctore I. A. Braunio pag. 268.

Hoc egregium Inuentum de Congelatione Mercurii ope admirandi frigoris artificialis a V. Cl. Braunio detectum, merito attentionem orbis eruditi et totius Europae excitauit. Nemo enim ante haec experimenta credidit fieri poſſe, vt Hydrargyrus in corpus ſolidum et firmum frigore abeat, aut congeletur. Quoniam igitur ante hoc tempus Mercurius nunquam, vti reliqua metalla, in forma ſolida adparuit, donec Auctor eum adparere in ea coëgerit: multi Mercurio locum inter metalla adſignare dubitarunt; nonnulli tamen locum inter ſemimetalla ei conceſſere. Nunc igitur dubitare non licet, quin Mercurius ſeu Hydrargyrus omnino metallis iisque perfectis ſit adnumerandus.

Adparet enim in forma fluida ob nullam aliam rationem, quam quia fuſus eſt. Non differt igitur ab aliis metallis fuſis Plumbo, Stanno, Argento Auro et reliquis, niſi in hoc, quod minimum calorem ad ſui fuſionem requirat. Ceterum omnium metallorum eſt molliſſimum, ita vt, ſi clangor ei eſt tribuendus, tantum obſcurus et obtuſus tribui debeat, vix vt plumbi et auri puri.

Ceterum malleabilis aeque eſt, ac metalla reliqua perfecta, et ductilitas quoque ei denegari non poteſt, vt experimenta docuere, quamuis haec extenſio magna eſſe nequeat, quoniam Mercurius breve tantum tempus ſolidus manere ſolet et poteſt.

Habet igitur Hydrargyrum proprietatem metalli perfecti, ſed firmum et in forma ſolida, vti reliqua metalla, in hoc terrarum orbe adparere nequit, niſi quaſi vi, frigore ſcilicet artificiali cogatur. Errant igitur toto coelo, qui exiſtimant Mercurium ob aquam intermixtam congelari, et in corpus ſolidum abire, fere, vt lutum molle aqua temperatum conglaciari ſolet et corpus durum fieri. Nam quemadmodum reliqua metalla, quam primum ſufficiens ad fuſionem gradus ceſſat, fiunt ſolida; et quam primum ſufficiens ad fuſionem gradus caloris adeſt, fluida fieri incipiunt; ſic Mercurius eodem modo calore quidem exiguo funditur, ſed ingenti frigore, maiore quam in omnibus reliquis metallis, in corpus ſolidum abire ſolet.

Non

Non defuere, qui exiſtimarent aquam miſceri Hydrargyro in Recipiente dum deſtillatur, et hinc forſitan oriri congelationem. Vt igitur et hoc dubium remoueretur, Cl. Auctor Mercurio ſine aqua deſtillato vſus eſt, qui aeque gelatus et regelatus erat, ac alius. Non opus eſt in re manifeſtiſſima diutius morari.

Ceterum de hoc metallo multi, inprimis Alchemici ſeu Alchemiſtae multas alias fouiſſe opiniones erroneas, conſtat: e. g. quod ſit v. g. baſis metallorum reliquorum etc. At enim vero haec commenta omnia delentur, quam primum intelligitur, Mercurium eſſe metallum idque perfectum.

Hydrargyrum ſub quibusdam circumſtantiis congelari ſolet. Congelatio fit mox completa, mox incompleta et partialis. Si completa fit, bulbus thermometri ordinarie frangitur, quod ſecus eſt, ſi congelatio fit ex parte eoque incompleta.

Porro Mercurius ſi congelari incipit primum regulariter ad certos terminos deſcendit, dein cum ſaltu et motu praecipiti, donec ſubſiſtat. Hi termini ſunt vagi, modo enim profundius, modo minus profunde regulariter deſcendere ſolet, prius quam ſaltus incipit. Eſt hic motus praeceps et ſaltus Mercurio, dum gelaſcit, proprius, in nullo alio fluido ſimile phaenomenum obſeruare licet, dum in glaciem abit, ſeu congelatur. Porro tetminus vltimus ad quem in congelatione deſcendere ſolet Mercurius,

curius, non eſt ſemper vnus idemque, ſed vagus. Nam facile intelligitur Mercurium minus profunde deſcendere, et ad numerum minorem ſcalae ſubſiſtere, ſi congelatio tantum ex parte facta eſt, ita vt pars media fluida remanſerit, quam ſi totus ſolidus factus ſit Hydrargyrus. Sed hic terminus in congelatione completa difficilis eſt determinatu, et ad deſiderata cum aliis quibusdam pertinet, quoniam in completa congelatione ordinarie bulbus, cuiuscunque ſit figurae, frangi ſolet. Probabiliter tamen, vt ex variis phaenomenis colligi poteſt, terminus 650 ſcalae noſtrae adſumi poteſt.

Sunt alia adhuc deſiderata, et aliae quaeſtiores, quibus A. in altera diſſertatione quae ſupplementa continet ſatisfacere ſtuduit nouis inſtitutis experimentis. Ceterum methodus ita ſimplex eſt congelandi Mercurium, vt quilibet eam, modo ſufficiens frigoris naturalis gradus in aëre ſit, facile imitari queat.

Hanc diſſertationem iam in Conuentu publico Academiae Scientiarum eſſe praelectam conſtat, ſcilicet Sept. 6. MDCCLX, vti quoque fere in omnibus Europae diariis iam eſt recenſita; praeterea quoque integra diuerſis diariis eſt inſerta, vt Actis Eruditorum, Transactionibus Anglicanis verſa in linguam anglicam. Legitur quoque translata in linguam germanicam in diario germanico quod vocatur, Neue geſellſchaftliche Erzählungen p. 24. des IVten Theils

Theils et alibi. Conferri quoque poteſt Vol. X. P. II. p. 212. Commentariorum Lipſienſium de rebus in Scientia Naturae et Medicina geſtis.

IV.

Diſſertatio continens partim Additamenta noua et Supplementa ad Diſſertationem de Congelatione Mercurii ſiue Hydrargyri, partim in alia corpora Frigoris artificialis inſignioris Nouos Effectus.

Auctore I. A. Braunio pag. 302.

Ex quo tempore diſſertatio de congelatione Hydrargyri ſeu Mercurii eſt euulgata, inuentor congelationis Mercurii Braunius, experimenta quauis hieme inſtituere perrexit ad ſupplenda deſiderata, quae in diſſertatione priore indicauit.

Quae praeſtiterit et praeſtare potuerit Auctor in hac diſſertatione indicantur. Non omnia experimenta ſpei et voto perfecte ſatisfecere, vti ex ſequentibus patebit.

Fuit deſideratum praecipuum, ad quem terminum in congelatione perfecta et completa Mercurius deſcenderet? An non hic terminus nouis experimentis figi poſſet? Varia, quin innumera experi-

perimenta noua ab Auctore ſunt inſtituta, quae vero ſucceſſum optatum omnino non habuere, quoniam omnes thermometrorum bulbi fracti ſunt, ſi Mercurius totus erat congelatus. Tandem thermometra duo ſunt adhibita, quorum bulbus ſphaericus diametrum $1\frac{1}{2}$ lin. maiorem non habebant. Hi duo bulbi fracti non ſunt ſed integri perſtitere et ſine dubio congelatio fuit completa in illis, vel certe proxima perfectae congelationi. Deſcendit enim Mercurius in vno thermometro ad 630. in alteroad 640.

Quum ob varias rationes in priore diſſertatione ab A. adductas, punctum congelationis Mercurii, non vt punctum congelationis aquae, perfecte figi poſſit: numerus 650 in priore diſſertatione iam indicatus tanquam numerus medius pro puncto congelationis completae retineri poteſt.

Quod ad terminum alterum attinet, ad quem, antequam cum ſaltu moueri praeceps incipiat; multis nouis experimentis captis compertum eſt, eum manere vagum. Modo enim regulariter deſcendit tantum ad 350, prius quam cum impetu moueri inciperet, modo ad 400. modo ad 500. 530. et denique ad 550. Hic terminus maximus eſt, ad quem Mercurius regulariter deſcendit ante ſaltum. Hic terminus confirmare videtur punctum congelationis Mercurio poſitum 650. Nam a ſaltu ad terminum vltimum congelationis omnino poni poſſe ſine errore notabilili 100. gradus videtur.

Varia

Varia alia in diſſertatione priore propoſita ſunt confirmata. Certum eſt thermometra Mercurialia et Spiritu, item Oleis eſſentialibus repleta in maioribus frigoris gradibus non amplius concordare, quamuis in minoribus perfecte concordauerint. Nam Spiritus vini et olea eſſentialia vltra 300. vix deſcenderunt, quum tamen in aliis thermometris Mercurio repletis Mercurius eſſet gelatus. Habent ſine dubio et fluida ſuos contractionis terminos et limites; qui pro diverſitate fluidorum ſunt diuerſi.

In deſcenſu praecipiti Mercurius menſuram frigoris adcuratam amplius non exhibere et exhibere poſſe omnino videtur.

Si Mercurius congelatus digito tangitur, ſtatim in eo loco, vbi contactus factus eſt, caro gelatur.

Confirmatum porro eſt, quo frigus naturale maius eſt, eo melius congelationem procedere, minimus gradus eſt 175. ſed tamen congelatio ſub hoc frigoris gradu non fit completa, ſed ad completam congelationem minimum frigus 185° requiritur, ceteris paribus.

Spiritus nitri *Glauberianus* et Aqua fortis fumans optima fluida manent ad frigus artificiale inſigne excitandum.

Confirmatum eſt etiam Mercurium puriſſimum paullo difficilius gelaſcere. Porro nix recens lapſa ſemper praeferenda eſt alii et vetuſtiori, quem-

admodum quoque ſpiritus nitri recens melior eſt vetuſtiori.

Ceterum mirabile omnino eſt Spiritum vini rectificatiſſimum congelationem Hydrargyri, licet incompletam quoque produxiſſe.

Reliqua minoris momenti praeterimus. Promiſit Auctor, ſi quid noui adhuc detegere poteſt, in poſterum fauente hieme et occaſione, cum Academia ſe communicaturum.

V.

Obſeruationes Meteorologicae etc.

pag. 320. et ſqq.

Sunt quatuor Commentationes, quae de Obſeruationibus meteorologicis agunt. Tres pertinent ad Petroburgenſes a *Braunio* inſtitutis, annorum MDCCLXI. MDCCLXII. MDCCLXIII; vna vero ad obſeruationes anni MDCCXLII. in itinere ex Sibiria Petropolin verſus a. *I. G. Gmelino* inſtitutas, in ordinem vero a *Braunio* redactas. Quia hae vltimae obſeruationes in itinere ſunt factae, facile intelligitur in diuerſis locis eas eſſe factas, hinc corollaria omnia inde deduci non poſſe, quae alias ex obſeruationibus in vno loco factis, deduci poſſunt. Notatu tamen digna non pauca conti-

continent. Pertinet huc praecipue Halonum frequentia et ſingularitas. Inprimis illa halo lunae ſingularis eſt notanda, quae Decembris 1mo huius anni Werchoturiae eſt conſpecta, cuius icon eſt adiecta. Porro notatu digni ſunt quidam frigoris inſignioris gradus, vt 238. 260. et vltra. Nam Mercurius omnis in bulbum deſcendit, licet diuiſio ſcalae eſſet 260. Frigus hoc intenſiſſimum perpetua tenui nebula, quaſi aëre congelato, erat comitatum, quae nebula omnino memorabilis eſt. Calor maximus harum obſeruationum eſt 109. non inſignis Huc etiam referenda aurorarum borealium frequentia eſt. Alia phaenomena notabiliora praeterimus, et lectorem ad ipſas obſeruationes remittimus.

Remittimus quoque ad ipſas obſeruationes petropolitanas, quae 1761. 1762 et 1763. ibi ſunt factae, ſi prius ſequentia monuerimus. Frigus maximum fuit 1761. graduum 193. et calor maximus = 105. 1762. frigus maximum = 195. et calor maximus 109. A. 1763. Frigus maximum = 204. Calor maximus = 100.

Item altitudines Bar. maximae et minimae his tribus annis 1761. 1762 et 1763. fuere ſequentes. A. 1761. maxima 28. 95 et minima 26. 85. 1762. maxima = 29. 03. minima 27. 10. A. 1763. maxima = 28. 92. minima 26. 53.

In obſeruationibus vero Sibiricis A. 1742. barometri alt. non occurrit maior quam 28. 28.

Minima vero eſt = 25. 32. Haec igitur multo minor eſt, minima Petropoli obſeruata 26. 41. Maxima quoque 28. 28. minor eſt maxima 29. 12. Petropoli alias aduotata.

Notamus adhuc frequentiam aurorarum borealium anni 1762. Numeratae et notatae ſunt 18. Ceterum, aurorae boreales hic modo frequentes, modo paucae, modo nullae, certe inſigniores adparere ſolent certis et diuerſis annis, vti obſeruationes docuere. In reliquis ad ipſas obſeruationes remittimus.

PHY-

PHYSICA.

I.

Deſcriptiones Inſectorum atque Auium Indicarum Muſei Petropolitani, ut et Fuci foliacei noui.

Auctore I. T. Koelreuter p. 401.

Quam in deſcribendis rarioribus Muſei noſtri piſcibus, eandem Cel. *Koelreuter*, tempore quo apud nos vixit, in ſelectis ex eodem Muſeo inſectorum atque auium ſpeciebus diligentiam praeſtitit, quorum laborioſiſſimae eius hoc volumine proponuntur adumbrationes. Et quamuis non omnia ex iis, quae proſecutus eſt, plane noua ſint, ſed pleraque paſſim apud auctores nominata atque verbis deſcripta, imo depicta quoque occurrant: Digna tamen ea quoque viſa ſunt quae retractarentur atque accuratioribus, quam factum eſt, iconibus illuſtrarentur.

E quinis Scarabaeorum Americanorum ſpeciebus, quas priori loco deſcribit noſter, ſeriem orditur nota ſpecies, Scarabaeus Actaeon *Linnaeo* dictus, cuius variabiles formae quinis e ſpeciminibus verbis partim et iconibus exponuntur. Altera, S. Simſoni

Linnaei affinis, vt et tertia, quarum a nullo vſpiam auctore diſtincte facta eſt mentio, pro novis haberi poſſunt. In quarta ſpecie tantum monentur varia, imprimis colorem elytrorum fugacem, a cruſta tenuiſſima liueſcente deriuandum, levesque in forma ſeptenorum Muſei ſpeciminum luſus concernentia. Demum in quinta, praeter breuem deſcriptionem, vendicatur ſynonymon *Swammerdamii* a *Linnaeo* perperam ad quartam noſtram citatum.

Auium a Clariſſ. Auctore deſcriptarum prima, a *Linnaeo* olim inter Meropes, in nuperrimo vero Syſtemate ad Vpupas relata, etiam in *Sebae* theſauro ruditer depicta exſtat; meliorem eius dedit iconem *Briſſonius* atque Promeropem vocauit, (ornith. vol. 2. p. 461. tab. 43. f. 2.) quae tamen inter Certhias et Vpupas media, priori potius generi relinquenda videtur.

Etiam in reliquis auiculis, quas pulcherrimas deſcripſit noſter, notandum eſt, easdem pariter in ditiſſima *Briſſonii* ornithologia deſcriptas atque delineatas fuiſſe, illud vero opus tunc, cum obſeruationes ſuas Academiae traderet noſter (A. 1760. menſ. Octobr. XX.), nondum in publicum editum fuiſſe. Hinc neceſſarium viſum eſt de ſingulis ad *Briſſonium* referre, vt eum, qui velint, ſine taedioſo conferendarum ſpecierum labore adire poſſint.

Itaque

Itaque Certhia, quae inter auiculas noſtras ſecunda eſt, a *Briſſonio* oper. cit. vol. 3. p 636. tab. 23. fig. 2. nomine: Certhiae cayennenſis viridis, propoſita eſt. Tertia et quarta noſtrarum, ab eodem ad peculiare genus, quod Tangaras ille (et ex eo *Linnaeus* Tanagras) appellauit, referuntur, vocanturque prior: Tangara braſilienſis nigro-lutea ornith. vol. 3. p. 31. tab 2. f. 2, 3; poſterior: Tangara peruuiana viridis l. c. p. 23. tab. 4. f. 1. Quinta e noſtris eſt, quam *Briſſonius* Manacum albifrontem ornith. vol. 4. p. 457. tab. 36. f. 2., *Linnaeus* mutato, vt ſolet, nomine Pipram ſerenam, compellarunt. Sextae conuenit Certhia braſilienſis coerulea ornith. vol. 3. p. 626. tab. 3. f. 4. a *Linnaeo* iam antea ex optimi *Edwardſii* icone dicta. Septima eſt Icterus ſeu Xanthornus icterocephalus ornith. vol. 2. p. 124. tab. 12. f. 4. idemque Sturnus flauiceps *Edwardſii* et Oriolus icterocephalus *Linnaei.* Octaua apud *Briſſonium* proſtat nomine Trogonis cayennenſis viridis ſeu Curucui *Marcgrafii* ornith. vol. 4. p. 168. tab. 17. f. 1. Nona titulo Fringillae capenſis ornith. vol. 3. p. 171. tab. 16. f. 1. quem cum Loxiae capenſis nomine *Linnaeus* commutauit. Et decima tandem Muſcicapa tyrannus *Briſſonio* audit ornith. vol. 2. p. 391. *Catesbaeo* Muſcicapa corona rubra, et Lanius tyrannus *Linnaeo.*

Lau-

Laudanda etiam eſt induſtria, quam in deſcribendo nouo et ſingulari Fuco collocauit noſter, eoque magis commendanda, quod nulla huius fuci vel apta icon vel mentio certa apud Botanicos facta occurrat; quum etiam ſynonyma, quae huc vtcunque facere videbantur et citata ſunt, certiſſime aliam, in Mari Germanico ſatis vulgarem ſpeciem ſignificent. E Mari Albo plantam ſuam habuit noſter; ſed et Mediterraneo communis eſt, et congenerum omnium maxime ſimilis videtur Lichenibus ſic dictis foliaceis.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

I.

Expoſitio obſeruationum occaſione tranſitus Veneris per diſcum Solis in vrbe Selenginsk inſtitutarum.

Auct. Steph. Rumovski p. 443.

Diſſertatio iſta, aeque ac ſequens poſt reditum auctoris ex Sibiria, quo ablegatus fuerat ad Venerem in Sole obſeruandam, typis iam excuſae ſunt; locum tamen iis Academia Scientiarum in Commentariis concedendum eſſe ideo duxit, quod numerus exemplarium tunc excuſorum fuerit exiguus.

Praecipuus finis, quem Cl. Auctor diſſertatione hac intendit, is eſt, vt ob oculos ponat obſervationes, quas ille hac occaſione in vrbe Selenginsk inſtituit: id circo ſollicite perſequitur omnes circumſtantias, ſub quibus illae peractae ſunt. Obſervationibus, pro definienda Latitudine obſeruatorii ſui inſtitutis, praemittit verificationem quadrantis ad horizontem, et pro determinando valore partium micrometri quadranti affixi, obſeruationes ſuper

 diame-

diametro Solis Petropoli captas, ac tandem ſiſtit ipſas obſeruationes Latitudinem ſpectantes, ex quibus concludit illam 51°.6′.6″.

Tranſitum Veneris per diſcum Solis praeceſſit Eclipſis Solis incidens in diem 23. Maii, cuius finem tantum Auctori obſeruare licuit.

Iam a longo tempore ante tranſitum Veneris per Solem Cl. Auctor ad examen reuocare cepit motum horologii ſui per altitudines Solis correſpondentes, et ope tranſitus ſtellarum fixarum; appropinquante tamen tranſitu Veneris ſumſit die 24 Maii altitudines Solis correſpondentes, et poſt eum die 19. Maii; ex quibus, aeque ac ex praecedentibus obſeruationibus, reperit motum horologii ita fuiſſe vniformem, vt inde ne minimus quidem error fuerit pertimeſcendus. Ipſa vero dies, qua tranſitus Veneris euenit, ita cecidit aduerſa, vt parum ab fuerit, quin incaſſum ceciderint ſumtus et opera in expeditionem impenſa: nec niſi fine huius phaenomeni obſeruatori frui quodammodo licuit. Contactus internus limborum Solis et Veneris, facta debita reductione, per nubem obſeruatus fuit $3^h.21'.36''$ quam proxime, et externus $3^h.39'.42''$, ita vt mora Veneris in limbo Solis ſit 18′.6″. Obſeruatio peracta eſt tubo 15 pedes longo.

Abſo-

Abſolutis iis, quae ſpectant obſeruationem Veneris in Sole, procedit Auctor ad expoſitionem obſeruationum definiendae Longitudini Vrbis Selenginsk inſeruientium: Inter eas occurrunt quinque obſeruationes ſuper eclipſes Satellitum Iouis, et duae ſuper occultationes ſtellarum fixarum a Luna; quarum altera eſt φ ſagittarii, altera *k* Tauri. Interea vero, dum phaenomena haec operiretur, incubuit definiendae longitudini penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda Selenginski oſcillantis. Ope authomati pendulo inuariabili inſtructi reperit illam $36^{dig.} 8^{lin.}, 56$; per experimenta vero ope penduli ſimplicis inſtituta $36^{dig.} 8^{lin.}, 62$.

Determinationes iſtae ſupponunt longitudinem penduli ſimplicis Pariſiis ad ſingula minuta ſecunda in temperie aëris 12°. ſupra 0, oſcillantis $36^{dig.} 8^{lin.}, 55$; quodſi alia Pariſiis ſtatuatur, Selenginskenſis quoque aliquam mutationem ſubeat neceſſe eſt.

Ex obſeruationibus authomato pendulo inuariabili inſtructo inſtitutis ſuper quam vtile corollarium, idemque quod *Griſchouius* ex ſuis experimentis, in Tomo VII. Commentariorum relatis, deduxerat, elicit Cl. Auctor: nempe variationem vnius gradus thermometri Reaumuriani ſpatio diei ſolaris medii producere variationem vnius quam proxime oſcillationis in motu penduli inuariabilis.

 His

His ſubiungit obſeruationes metheorologicas, quas in vrbe Selenginsk inſtituit. Inde rediens, dum in vrbe Irkutsk commoraretur, operam dedit, vt Latitudinem illius definiret. Ex obſeruationibus Lucidae Aquilae, quas pro exactis habere non dubitat Cl. Auctor, concludit illam 52°. 18′. 15″.

II.

Inueſtigatio parallaxeos Solis ex obſeruatione Tranſitus Veneris per discum Solis Selenginski habita, collata cum obſeruationibus alibi inſtitutis.

Auct. Steph. Rumovski p. 487.

Poſt quam obſeruationes tranſitus Veneris per discum Solis in diuerſis locis peractae in lucem prodierunt, conſtituit Cl. Auctor indagare quantam illae inter ſe collatae praebeant Solis Parallaxin. Combinatio iſta tuto inſtitui nequit, niſi certiſſime conſtet poſitio locorum, in quibus obſeruationes peractae ſunt, praeſertim eorum Longitudo, ſi ex vnico contactu quantitas parallaxeos Solis ſit indaganda. Breuibus id circo ex diſſertatione praecedente repetit

tit Cl. Auctor, quae ibi de Latitudine vrbis Selenginsk commentatus eſt. Poſtmodum accingit ſeſe ad definiendam Longitudinem obſeruatorii ſui; et primum quidem ex fine Eclipſeos Solis, nulla Tabularum adhibita correctione, eruit illam $6^h.57'.30''$. Obſeruationes Satellitum Iouis collatae cum momentis ex Tabulis Cel. *Wargentini* elicitis, ac ad mentem eius correctis, diuerſam ab hac praebuerunt Longitudinem, exiſtente maxima $6^h.57'.21''$ et minima $6^h.56'.49''$. Omnium vero media $6^h.57'$ $8''$ etſi concordat cum ea, quae immediate ſequitur ex Immerſione I. Sat. in Inſula Rodrigues et Selenginski obſeruata, verum notandum eſt Longitudinem Rodrigues maiorem hic aſſumtam fuiſſe, quam a Cel. *Pingre* ſtatuitur.

Conſtituta iam Latitudine Selenginsk $51°.6'.$ $6''$ et Longitudine a meridiano Pariſino computata $6^h.57'.8''$ progreditur ad determinandam ex mutua obſeruationum combinatione parallaxin. Aſſumto momento coniunctionis et Latitudine Veneris apparente, qualem praebuerunt obſeruationes a *Bliſſ* peractae, reliqua elementa ſcopo ſuo neceſſaria depromit ex tabulis *Halleianis*; ac poſita parallaxi Solis $8\frac{1}{2}''$ ſemitam Veneris apparentem Grenovici viſam reducit ad centrum telluris: vbi inueſtigat momentum contactus interni in exitu ad meridianum Grenouicenſem. Hoc inuento dataque differentia meridianorum Grenouicenſis et loci cuiusdam,

 vbi

vbi obſeruatio eſt peracta, reperit momentum contactus veri ad meridianum illius loci, ac pro eodem computat effectum parallaxeos, ſiue tempus quo citius aut tardius ex eo loco quam ex centro telluris contactus ſpectaretur, ſi parallaxis ſolis foret 8½″.

In peculiari Tabula exhibentur loci et obſeruationes, ex quibus per mutuam combinationem quantitatem parallaxeos Solis inueſtigare annifus eſt. Obſeruationem Capitis Bonae Spei combinauit cum decem aliis; ſuam vero non niſi cum iis, in quibus differentia effectuum a parallaxi proficiſcentium non minor eſt quatuor minutis primis. Omnes iſtae combinationes egregie inter ſe conſentiunt, et parallaxin Solis non minorem 8″ nec maiorem 8½″ ſtatuendam eſſe indigitant.

Diſſertationi huic ſubiungitur additamentum, cui anſam praebuit obſeruatio Rodriguenſis. Cel. *Pingre* in diſſertatione Commentariis Academiae Scientiarum Pariſinae in annum 1761. editis inſerta, ex contactu interno in Inſula Rodrigues obſeruato, collato cum obſeruationibus in Europa peractis, parallaxin Solis horizontalem concludit 10″, 4. Obſeruationes in Suecia et Tobolii peractae collatae cum Rodriguenſi diuerſam equidem praebuerant illi parallaxin; verum aucta Longitudine Stockholmiae ac proinde Tobolii, Torneae, Caianeburgi

burgi et Vpſaliae 21″, eandem quam proxime obtinet parallaxin. Vnica itaque Selenginskenſis ſupererat, quae cum Rodriguenſi collata parallaxin Solis non niſi 9″, 38 praeberet. His permotus Cl. Auctor examen inſtituit obſeruationis ſuae, vtrum ob nubilam caeli faciem, aliasue circumſtantias momentum contactus interni in exitu Selenginski obſeruati, integro fere minuto primo minui poſſit, vt collatum cum momento Rodriguenſi 10″, 4 praebeat Solis parallaxin: ac perpenſis omnibus rationibus oſtendit, nullatenus tantum errorem in obſeruationem illius irrepere potuiſſe; quin potius error, ſi quis ex nubila caeli facie originem traxerit, ad diminuendam, non vero ad augendam parallaxin Solis fecerit neceſſe eſt.

Obſeruatio Rodriguenſis collata cum Selenginskenſi dabit quoque parallaxin Solis 10″, 4, ſi Longitudo Selenginski augeatur integro minuto primo. Ad examen igitur reuocans et Longitudinem obſeruatorii ſui antea ſtabilitam inquirit Cl. Auctor, quousque illa augeri poſſit; ac oſtendit, ex obſeruationibus Satellitum Iouis, vtrouis modo Longitudinem inueſtigare placuerit, ſiue conferendo illas cum momentis e Tabulis depromtis, ſiue cum obſeruationibus in aliis locis peractis, et paucis diebus a Selenginskenſibus remotis, eandem quam proxime reſultare Longitudinem.

Occul-

Occultatio φ ſagittarii a Luna ex obſeruationibus Satellitum Iouis deductam Longitudinem optime confirmat: Si computus ſuperſtruatur Tabulis *Maieri* ad mentem Cel. *Pingre* correctis, Longitudo Vrbis Selenginsk prodit $6^h.57'.13''$ aut $15''$. Vnde non ſine ratione concludit Cl. Auctor Longitudinem Selenginski non maiorem $6^h.57'.14''$ ſtatui, et obſeruationem Rodriguenſem collatam cum Selenginskenſi nullatenus parallaxin Solis $10'',4$ praebere poſſe.

Abſoluto examine Longitudinis Selenginski et obſeruationis ibidem habitae, ſiſtit obſeruationem Pekini peractam, ac Longitudinem illius nouiſſimis obſeruationibus ſuperſtruit. Ex plurimis obſeruationibus Satellitum Iouis vndique collectis, et ex tranſitu Mercurii Parſiis et Pekini anno 1753. die $\frac{25.}{5.}$ $\frac{Apr.}{Maii}$ obſeruato, tandem concludit Longitudinem obſeruatorii Ieſuitarum Gallorum, vbi obſervatio Veneris peracta eſt, non minorem $7^h.35'.45''$ ſtatui debere. Cel. *Monnier* in Commentariis Academiae Scientiarum Pariſinae in annum 1763. editis eandem fere aſſumit Pekini Longitudinem: nempe $7^h.35'.40''$; id quod egregie concordat cum determinatione Cl. Auctoris. Quibus vero rationibus fultus Longitudinem iſtam aſſumſerit Cel. *Monnier*, nulla fit mentio.

Statu-

Statuta iam Longitudine obſeruatorii, vbi obſeruatio Veneris eſt peracta, inquirit Cl. Auctor quanta ex obſeruatione Pekinenſi cum aliis collata reſultet Solis parallaxis: et cum ex combinatione illius cum aliis eandem circiter reperiſſet, quam praebuerunt obſeruationes ad Caput Bonae Spei et Selenginski peractae, concludit, obſeruationem Rodriguenſem nullatenus conſiſtere poſſe: praeſertim cum Cel. *Wargentinus* ſe per nouiſſimas obſeruationes comperiſſe teſtetur, Longitudinem Stockholmiae non maiorem $1^h.2'.52''$ ſtatui debere.

Ad calcem diſſertationis vno laterculo complectitur Cl. Auctor quantam dent Solis parallaxin obſeruationes ad Caput Bonae Spei, Pekini, Selenginski et in inſula Rodrigues peractae. Poſt quam vero diſſertatio iſta anno 1764. typis excuſa eſt, Longitudines quorundam locorum in laterculo nominatorum certius ſunt definitae, idcirco nonnullae parallaxeos determinationes ibi exhibitae immutari debuiſſent; Verum Academia Scientiarum ſatius eſſe duxit, prout impreſſa eſt, ita et hic eam excudere, diſcrimen vero ex Longitudinibus correctis oriundum hic peculiari exhibere laterculo.

 Nomi-

Nomina Locorum	Longitudo eorum	Parallaxis Solis horizont. reſultans comparatione obſeruat habitae.			
		ad C. B. S.	Pekini	Seleng.	in Rodrig.
Rodrigues	$4^h. 3'. 26''$	$5'',89$			
Pekin	7. 35. 45	$8''.51$			$9''.39$
Selenginsk	6. 57. 14	8. 46			9. 49
Tobolsk	4. 23. 51	8. 60	$7''.73$	$7''.34$	9. 92
Tornea	1. 27. 49	8. 53	8. 43	8. 13	9. 95
Caianeburg	1. 41. 40	8. 64	8. 05	7. 75	10. 13
Vpſala	1. 1. 12	8. 61	8. 17	8. 00	10. 26
Stockholm	1. 2. 52	8. 35	8. 96	8. 76	9. 88
Göttinga	0. 30. 16	8. 50	8. 57	8. 42	10. 48
Grenouicum	0. 9. 16 oc.	8. 51	8. 50	8. 42	10. 54
Pariſii	0. 0. 0	8. 53	8. 47	8. 39	10. 74
Bononia	0. 36. 5	8. 58	8. 44	8. 30	11. 00
Roma	0. 40. 40	8. 62	8. 46	8. 27	11. 35

Longitudo Capitis Bonae Spei a meridiano Pariſino computata ſtatuitur hic $1^h.4'.15''$.

III.

III.

Eclipſis Solis inſignis d. 1. Apr. an. 1764. Styl. Nov. temp. civ. obſeruatio Lipſiae habita.

Auctore G. Heinſio pag. 539.

IV.

Obſeruationes aliquot coeleſtes ann. 1765 et 1766. Lipſiae habitae.

Auctore G. Heinſio pag. 557.

Eclipſis ſolaris, quae d. 1. April. an. 1764. ſt. n. contigit et cuius potiora momenta in hac diſſertatione recenſentur, obſeruatio ita a Cel. Auctore Lipſiae inſtituta eſt, vt non per tubum modo aſtronomicum optimae notae ſolem immediate contemplaretur, ſed etiam in imagine ſolari, per machinam helioſcopicam repraeſentata, phaenomena obſervaret; cumque non ipſi ſolum obſeruationi, ſed praeuio etiam ſtatus horologiorum examini plena fauiſſet coeli ſerenitas, has ipſas obſeruationes inprimis aptas eſſe cenſuit, in quibus, quid de pretio methodi phaenomena eclipſium ſolarium ope machinae helioſcopicae obſeruandi ſtatuendum ſit, data opera inueſtigaret. Repraeſentauit haec machina diametrum Solis ſub magnitudine 4 dig. $2\frac{2}{3}$ lin.

 menſ.

menſ. Pariſ. duodec. in qua Cel. Auctor ope circini et ſcalae geometricae pro compluribus Eclipſeos momentis diſtantiam cornuum ſeu chordam defectus et latitudinem maximam partis lucidae determinauit. Iam quidem ex ipſa rei natura manifeſtum eſt, cum in repraeſentatione Solis per machinam helioſcopicam initium eclipſeos tum demum ſub ſenſus cadere poſſit, cum luna limbum imaginis ſolaris iam aliquantillum penetrauit; finis autem, cum limbus lunae adhuc cum margine imaginis ſolaris confunditur, obſeruationes hac methodo inſtitutas ab iis, quae per tubos aſtronomicos immediate fiunt, non nihil diſcrepare debere; quo tamen diſcrimine non obſtante, deducendo ex obſeruationibus vtriusque claſſis tempus obſcurationis maximae, Cel. Auctor tam exiguam deprehendit differentiam, vt methodum hanc concluſiones ſufficienter inter ſe conſentientes ſubminiſtrare, et machinam helioſcopicam non ſine fructu in obſeruationibus eclipſium ſolarium adhiberi, ſtatuendum ſit. Praecipua autem, qua haec methodus premitur, difficultas in eo poſita eſt, quod ad determinandum tempus maximae obſcurationis partes lucidae ante et poſt obſcurationem maximam *aequales* ab eaque non nimis remotae vna cum temporibus ipſis reſpondentibus cognitae requirantur; quae ſi non habeantur, (vt plerumque fit) partis lucidae ex vno latere reſpondentis defectus ope interpolationis ſupplendus eſt; hoc igitur graui incommodo methodum, quae ſua ſe vtilitate iure commendat, Cel. Auctor feliciter libe-

liberauit, modum oſtendendo, ex tribus partibus lucidis quomodocunque inaequalibus in vicinia obſcurationis maximae ſumtis vna cum temporibus ipſis reſpondentibus tres diſtantias centrorum Solis et lunae inueniendi; quibus praemiſſis problema reſoluit, cuius in aliis quoque obſeruationibus congreſſus duorum corporum coeleſtium, v. g. tranſitus Veneris vel Mercurii per Solem inſignis vſus eſt, vt ſcilicet datis tribus centrorum ☉ et ☽ diſtantiis cum temporum reſpondentium interuallis diſtantia centrorum minima et tempus obſcurationis maximae calculis admodum concinnis inueniatur; quae vero methodus cum diametrum Lunae cognitam atque in partibus ſcalae ſupra memoratae expreſſam ſupponat; haec quidem diameter ex cognitis chorda defectus, parte lucida et radio imaginis ſolaris inueniri poſſet; cum vero chordae defectus, et partes lucidae alternis tantum vicibus obſeruari poſſint, interpolatione hic opus foret, vnde, in eo caſu, quo immediata diametri lunaris dimenſio non conceditur, eam ex calculo petere, et parte aliqua ob repraeſentationem in fundo lucido minuere, Cel. Auctor, tacto periculo, deprehendit eſſe conſultius. In altera diſſertatione praeter *Initium Eclipſis* ſolaris partialis d. 16. Aug. 1765. celebratae, quod Cel. Auctori obſeruare licuit, duae obſeruationes tranſitus Lunae per Pleiades annis 1765. d. 13. Iulii et 1766. d. 22. Septemb. ab ipſo inſtitutae recenſentur. In priore harum obſeruationum Cel. Auctor ad

ad acceſſum Lunae ad Lucidam Pleiadum, quam a Lunae limbo lucido occultatum iri ſuſpicabatur, inprimis attentus fuit. Quod etſi non accidit, cum Luna Lucidam Pleiadum in certa aliqua diſtantia praeteriret; tamen Cel. Auctor verum tempus coniunctionis, id eſt, illius poſitionis, in qua linea recta ſtellam et cuſpidem Lunae inferiorem iungens perpendicularis ad proximam Lunae marginem viſa eſt, ad pauca minuta ſecunda exacte determinauit; inopinato alius quoque ſtellulae, Lucidae Pleiadum admodum vicinae, et a *Flamſteedio* in Catal. Brittan littera P notatae, emerſionem obſeruauit eiusque tempus verum adcurate definiuit: In poſteriori obſeruatione Cel. Auctor primum ſemitam centri Lunae, habita ratione parallaxeos, ad *Maiam* eiusque circulum latitudinis ex elementis in Ephemerid P. *Hellii* obuiis in ſchemate repraeſentauit, eique inſigniores in conſtellatione Pleiadum ſtellas per differentias longitudinum et latitudinum, quales a *Flamſteedio* ſuppeditantur, inſeruit; eoque id conſecutus eſt, vt, quas vel occultationes vel incidentias harum ſtellarum in lineam cuſpidum obſeruauerat, diſtincte recenſere potuerit. Inprimis vero ex obſeruatione circa occultationem *Maiae* habita id Cel. Auctor animaduertit, poſitionem *Maiae* a P. *Hellio* determinatam, quae a poſitione per alios Aſtronomos, *Flamſteedium*, *Caſſini*, *Maraldi*, de la *Hire* definita, inſigniter diſcrepat, eſſe erroneam, hancque cum veritate, obſeruationibus confirmata, propius conſentire.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE
VSV FVNCTIONVM
DISCONTINVARVM IN ANALYSI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae in Analyſi de functionibus, ſeu quantitatibus per quampiam variabilem vtcunque determinatis, tradi ſolent, ad eas tantum functiones reſtringuntur, quae continuae vocantur, et quarum formatio certa quadam lege continetur. Ex doctrina linearum curuarum hoc maxime illuſtratur, vbi applicatae, quatenus per abſciſſas determinantur, vicem gerunt functionum, ita vt indoles omnium functionum aptiſſime per lineas curuas repraeſentari poſſit. Ita quomodocunque quantitas y per x determinatur, ſeu quaecunque functio fuerit y ipſius x, ſemper curua deſcribi poteſt, cuius abſciſſae cuicunque x conueniat ea ipſa applicata y, haecque linea curua congrue naturam illius functionis repraeſentare aeſtimatur. Hinc etiam viciſſim propoſita linea curua quacunque, eius applicatae certas quasdam functiones abſciſſarum exhibent, quarum

natura in ipſa lineae curuae natura inuoluitur, dum ſcilicet cuique abſciſſae certa reſpondet applicata, huius valor tanquam functio quaedam abſciſſae recte ſpectatur, et quando applicata vel fit imaginaria, vel ſimul plures valores ſortitur, haec ipſa varietas luculentiſſime ex natura functionis perſpicitur.

2. Iam vero notiſſimum eſt, in Geometria ſublimiori alias lineas curuas conſiderari non ſolere, niſi quarum natura certa quadam relatione inter coordinatas, per quampiam aequationem expreſſa definiatur, ita vt omnia eius puncta per eandem aequationem tanquam legem determinentur. Quae lex cum principium continuitatis in ſe complecti cenſeatur, quippe qua omnes curuae partes ita vinculo arctiſſimo inter ſe cohaerent, vt nulla in illis mutatio ſaluo continuitatis nexu locum inuenire poſſit; hanc ob rem iſtae lineae curuae continuae appellantur, nihilque intereſt, ſiue aequatio illarum naturam continens ſit algebraica ſiue tranſcendens, ſiue cognita ſiue etiamnum incognita, dummodo intelligamus dari quandam aequationem, qua natura huiusmodi linearum curuarum exprimatur. Hoc loco non ſpectatur continuitas tractus, quo rami curuarum porriguntur: ac binae hyperbolae coniugatae aeque lineam curuam continuam conſtituunt, ac parabola vel ellipſis, etiamſi bini eius tractus penitus a ſe inuicem ſint ſeiuncti. Ob eam enim cauſam his ſeparatis hyperbolis continuitas tribuitur, quod ambae in vna eademque aequatione contineantur, ex

eaque

eaque formari poſſint. Atque ex hoc fonte, quae vulgo vage de lege continuitatis diſputari ſolent, interpretari atque ad determinatum ſignificatum revocari conueniret.

3. Conſtituto continuitatis criterio ſponte patet, quid ſit functio diſcontinua, ſeu lege continuitatis deſtituta: omnes enim lineae curuae per nullam certam aequationem determinatae, cuiusmodi libero manus tractu delineari ſolent, tales functiones diſcontinuas ſuppeditant, quandoquidem in iis valores applicatarum nulla certa lege abſciſſis definire licet. Huiusmodi lineae curuae, quatenus ſuperiori generi continuitatis lege definito opponuntur, vulgo mechanicae, aptius vero diſcontinuae, ſeu continuitatis lege carentes vocantur: idque non quod earum partes non inter ſe cohaereant, ſed quoniam nulla certa aequatione determinantur. Ita quicunque tractus libera manu ſuper charta ducuntur, etiamſi continuo procedant, tamen ſecundum hanc definitionem pro diſcontinuis ſunt habendae, ſiquidem profecto nunquam eueniet, vt huiusmodi tractus certa quadam aequatione contineatur. Atque huc etiam referri convenit lineas vulgo mixtas vocatas, quando partes ex diuerſis lineis curuis deſumtae inter ſe coniunguntur, vel etiam partes eiusdem lineae alio modo vniuntur. Ita perimeter polygoni ex meris lineis rectis conſtans aeque huc pertinet, ac lineae ex rectis et arcubus circularibus, vel aliarum quarumcunque curvarum formatae. Etſi enim hic quaeuis portio

certa quadam aequatione contineatur, pro toto tamen tractu nulla aequatio vnica, in quo character continuitatis eſt ſtatuendus, exhiberi poteſt, quo circa omnes huiusmodi tractus pro lineis diſcontinuis ſunt habendi, perinde ac ii, qui libera manu ducuntur.

4. Iam omnibus huiusmodi lineis et functionibus diſcontinuis in Analyſi geometrica nullum locum concedi, per ſe eſt manifeſtum, cum vniverſa haec ſpeculatio in linearum, quae conſiderantur, proprietatibus inueſtigandis ſit occupata, quod negotium nullo modo ſuſcipi poſſet, niſi natura linearum certa quadam lege et aequatione contineretur. Hinc plerique Geometrae hac ratione inducti non dubitauerunt, omnes lineas et functiones diſcontinuas, tam ex Geometria, quam vniuerſa Analyſi, penitus proſcribere, et inter obiecta, a quibus haec ſcientia abhorreat, detrudere. Hanc ſententiam certe palam eſt profeſſus Celeb. *Alembertus*, cum ego motus cordarum vibrantium ita in genere determinauiſſem, vt ſolutio ad omnes motus et figuras, quae cordae initio fuerint impreſſae, pateret. Mox enim Vir excellentiſſimus mihi obiecit, motum plane definiri non poſſe, niſi figura cordae initio impreſſa fuerit continua ac certa quadam aequatione comprehenſa, ſi ſecus acciderit, et cordae figura initio fuerit diſcontinua, tum motus ſecuturi determinationem nullo modo ad Analyſin pertinere, atque adeo nefas eſſe illam inueſtigare velle. Cui obiectioni equidem ſatis reſpondi, ac nuper Cel. *La Grange* in Actis Taurinenſi-

rinenſibus meam ſolutionem ita ſolide propugnauit, vt nulli amplius dubio locus ſit relictus.

5. Grauiſſimi ergo momenti quaeſtio hic exoritur, quid de functionibus diſcontinuis, vel lineis ſine vlla certa lege deſcriptis, ſit iudicandum, et num et quatenus illis locus in Analyſi concedi poſſit? In problemate certe modo memorato nullum eſt dubium, quin corda, quae initio ita fuerit diducta, vt eius figura nulla aequatione comprehendi poſſit, motum ſit conſecutura, eoque durante ſingulis momentis ea ſit certam figuram et motum receptura, cuius determinatio ſane ad Analyſin motusque ſcientiam eſt referenda, ſiue fines cognitioni noſtrae praeſcripti huic quaeſtioni ſoluendae ſufficiant, ſiue ſecus. Vtroque caſu quaeſtio ſemper foret omni noſtra attentione digna, et cum circa quantitates verſetur, ad Analyſin certe pertinere eſt cenſenda; neque hic quaeritur, quousque ſagacitas noſtra pateat, cum vix quisquam ſit Geometrarum, qui non ſaepius in quaeſtionibus vires ſuas ſuperantibus deſudauerit. Neutiquam igitur nefas eſt putandum, huiusmodi quaeſtiones attingere; quin potius eo maiori ſtudio in iis eſſet elaborandum. Omnibus autem difficultatibus diligenter perpenſis, etiamnum aſſeuerare audeo, ſolutionem meam problematis de cordis vibrantibus latiſſimo ſenſu accepti recte ſe habere, in eaque felici ſucceſſu functionum diſcontinuarum rationem eſſe habitam. Verum etiam agnoſco, hoc problema ad peculiare Analyſeos

lyſeos genus adhuc parum excultum, eſſe referendum, cuius generis adeo vis et natura in hoc conſiſtat, vt functiones etiam diſcontinuas neceſſario in ſe complectatur.

6. Ad litem hanc componendam obſeruo, neque in Algebra communi, neque in ea Analyſeos infinitorum parte, quae adhuc potiſſimum eſt tractata, functiones diſcontinuas admitti poſſe. Multo latius autem Analyſis infinitorum patere, atque eiusmodi partes complecti eſt iudicanda, quae a functionibus diſcontinuis non ſolum non abhorreant, ſed eas adeo ita natura ſua inuoluant, vt nullum problema eo pertinens rite ſolutum ſit cenſendum, niſi functiones prorſus arbitrariae, hincque etiam diſcontinuae, in ſolutionem fuerint introductae. Iſtae quidem Analyſeos partes etiamnum parum ſunt excultae, etiamſi egregia ſpecimina paſſim reperiantur; neque etiam earum vera indoles ſatis perſpecta videtur. Quare quo hanc indolem luculenter exponam, neceſſe eſt, vt varias iſtas ac diuerſas Analyſeos partes accuratius deſcribam, et pro cuiusque indole a ſe inuicem diſtinguam. Quemadmodum enim vulgo Analyſis infinitorum definiri ſolet, inde vix quicquam lucis ad hoc argumentum illuſtrandum peti poteſt, cum pleraeque definitiones maxime ſint vagae et confuſae, neque ſubiecti, de quo agitur, naturam ſatis dilucide ac diſtincte explicent. Ex quo frequentiſſimae querelae, quod idea Analyſeos infinitorum nusquam accurate deſcripta ac ſtabilita reperia-

periatur, fundamento non carent, hic autem illi vitio imprimis eſt occurrendum, quo diuerſae huius ſcientiae partes non ſatis diligenter a ſe inuicem diſtinguuntur.

7. Tota autem vis Analyſeos infinitorum conuenientiſſime ex notione et indole functionum explicatur, quae commodiſſime pro numero quantitatum variabilium, per quas certo quodam modo determinantur, in claſſes diſtinguuntur. Sic prima claſſis continebit functiones vnicae quantitatis variabilis. Tales functiones ſunt applicatae quarumuis linearum, reſpectu abſciſſarum. Ita poſita abſciſſa $= x$ et applicata $= y$, erit y functio variabilis x, cuius natura per lineam curuam, ſeu aequationem, quae inter x et y datur, exprimitur; qua fit, vt ſtatim atque abſciſſae x determinatus valor tribuitur, etiam applicata y valorem determinatum conſequatur, ſiue is fuerit ſimplex, ſiue etiam multiplex, ſiue etiam imaginarius; vnde intelligitur etiam viciſſim abſciſſam x tanquam functionem applicatae y ſpectari poſſe. Simili modo ſi corpus per quampiam lineam moueatur, eius celeritas in ſingulis locis etiam ad functiones vnicae variabilis eſt referenda; eſt quippe functio eius quantitatis variabilis, qua eius lineae puncta continuo determinantur. In hac claſſe pleraeque quaeſtiones adhuc tractatae ſunt collocandae, etiamſi ſaepius plures variabiles in computum ingrediantur, ſiquidem cunctae tandem per vnicam determinantur. Veluti ſi motus lunae inueſtigatur, ad

quoduis tempus eius longitudo, latitudo, ac diſtantia a terra quaerenda proponitur; cum autem haec ſingula elementa tandem per ſolum tempus determinari debeant, tam longitudo, quam latitudo et diſtantia, quaeque per ſe tanquam functio temporis, ideoque vnica variabilis ſpectari poterit.

8. At functiones binarum pluriumue variabilium per eiusmodi binas pluresue variabiles determinantur, quae a ſe inuicem nullo modo pendent, ſed cuique ſeorſim omnes prorſus valores tribuere licet. Tales functiones occurrunt, quando natura ſolidorum ac ſuperficierum expenditur. Fieri hoc ſolet per ternas coordinatas x, y et z, quarum binae x et y in plano quodam accipiuntur, tertia vero z, huic plano perpendicularis ad ſuperficiem porrigitur. Cum igitur cuique baſeos puncto, quod per binas variabiles x et y definitur, certa perpendicularis z immineat, erit vtique z functio binarum variabilium x et y a ſe inuicem neutiquam pendentium. Quodſi enim omnia ſuperficiei puncta aſſignare velimus, tam ipſi x quam ipſi y ſeorſim omnes prorſus valores tribui oportet, vt hoc modo pro omnibus baſis punctis perpendicula illa obtineantur. Deinde ſi corpus ex particulis heterogeneis ſit compoſitum, vt cuique puncto intra corpus accepto ſua peculiaris denſitas conueniat, primo quidem ſitus cuiusque puncti ternis coordinatis x, y et z definitur, nullo modo a ſe inuicem pendentibus, quoniam vt omnia puncta intra corpus obtineantur,

his

his tribus coordinatis omnes plane valores ſucceſſiue aſſignari debent. Quare ſi denſitas in quouis puncto quantitate v deſignetur, ea tanquam functio ternarum variabilium x, y et z ſpectari debet. Ac ſi particulae huius corporis motu quocunque agitentur, cuiusque puncti motus non ſolum ab eius ſitu ternis coordinatis determinando, ſed etiam a tempore pendebit, vnde motus tanquam functio quatuor variabilium ſpectari debebit.

9. Conſtituta hac functionum notione ac diviſione, fundamenta Analyſeos infinitorum clariſſime tradi poterunt, quae diſciplina commodiſſime in tot partes diſtribuitur, quot dantur functionum claſſes, propterea quod ſingulae peculiaribus principiis ac praeceptis ſunt ſuperſtruendae. Prima igitur pars, quae fere ſola adhuc eſt exculta, et ad quam principia calculi differentialis et integralis potiſſimum ſunt accommodata, circa functiones vnicae variabilis verſantur. Primo ergo ſi y fuerit functio quaecunque vnius variabilis x, conſiderari ſolent incrementa vel decrementa illius functionis y, dum quantitas x quocunque augmento increſcit. Deinde hoc augmentum continuo imminui concipitur, donec tandem prorſus euaneſcat, quo quidem caſu etiam incrementum functionis y in nihilum abit, quae augmenta euaneſcentia cum differentialia vocentur, euidens eſt, ea omnia quantitate eſſe deſtituta, nihiloque adeo aequalia, ita vt de eorum quantitate nulla quaeſtio inſtitui poſſit. Neque etiam calculus differentialis in

quantitate differentialium, quae nulla eſt, indaganda occupatur, ſed in eorum ratione mutua definienda; quae ratio vtique certam obtinet quantitatem. Functionis ſcilicet y non tam ipſum differentiale dy, quam eius ratio ad differentiale dx, inueſtigatur, valor nimirum fractionis $\frac{dy}{dx}$, qui quouis caſu determinatam quantitatem ſortitur, et ipſe tanquam noua functio ipſius x ſpectari poteſt.

10. Cum plerisque haec differentialium notio, et rationis, quae inter quantitates euaneſcentes intercedit, inueſtigatio, maxime ſuſpecta videri ſoleat, vnico exemplo omnia dubia euaneſcent. Propoſita igitur ſit talis functio $y = axx + bx + c$, ac primum videamus, quantum incrementum haec functio capiat, dum quantitati x augmentum quodcunque ω tribuitur; poſito autem $x + \omega$ loco x, functio noſtra abit in $axx + 2ax\omega + a\omega\omega + bx + b\omega + c$, ideoque incrementum accipit $= 2ax\omega + a\omega\omega + b\omega$, quod hoc charactere Δy deſignemus, et ad ſimilitudinem quantitas ω, tanquam augmentum ipſius x, etiam hoc ſigno Δx denotetur. Cum igitur ſit

$$\Delta x = \omega \text{ et } \Delta y = 2ax\omega + a\omega\omega + b\omega$$

$$\text{erit } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax\omega + a\omega^2 + b\omega}{\omega} = 2ax + a\omega + b$$

ſicque habetur ratio inter incrementa Δx et Δy, quae vera eſt, quantumuis augmentum ω quantitas x capiat; eadem ergo ratio etiam veritati erit conſentanea, ſi augmentum ω plane euaneſcens accipiatur, quo caſu incrementa illa Δx, Δy his ſignis dx et dy denotari et differentialia vocari ſolent: vnde perſpi-

cuum

cuum eſt, poſito $\omega = 0$ prodire $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$, hancque rationem veram eſſe, etiamſi termini, inter quos ſubſiſtit, ſint euaneſcentes. Solum hoc exemplum ſufficere videtur omnibus dubiis, quibus vulgo notio infinite parui in Analyſi vſurpata impugnari ſolet, diluendis, huicque calculo ab omni ſuſpicione vindicando.

11. Quia haec differentialium ratio $\frac{dy}{dx}$ denuo eſt functio ipſius x, ſi ea littera p indicetur, ratio eius differentialis dp ad dx, ſeu fractio $\frac{dp}{dx}$ ſimili modo definiri poteſt, quae, ne opus ſit nouam litteram in calculum inducere, ob $p = \frac{dy}{dx}$ tali ſcriptione $\frac{ddy}{dx^2}$ deſignari ſolet, quae differentialia ſecundi gradus inuoluere dicitur; atque ita porro progrediendo differentialia in has formulas $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ etc. ingredientia tertii, quarti altiorumque ordinum vocantur, quorum ſignificatus, quemadmodum de primo ordine oſtendi, ſemper ad rationem inter differentialia binarum quantitatum, quarum altera alterius eſt functio, reducitur. Hocque modo omnes controuerſiae, quae olim circa differentialia omnium ordinum eorumque naturam ſunt motae, ſponte concidunt, cum quicquid in hoc calculo definitur, ſemper ad proportionem differentialium, cuius realitas nulli dubio eſt ſubiecta, reuocetur, neque amplius veritates per hunc calculum erutae Geometricis vllo pacto poſtponendae videbuntur. Equidem non diffiteor, eiusmodi rationes loquendi in hac diſciplina eſſe receptas, quae differentialibus quantitatem quampiam

valde exiguam tribuere videantur, ſed cum earum ſignificatio ſemper ex ſtabilitis principiis ſit interpretanda, tales loquendi formulas, etſi minus congruas, tolerari conuenit. Quin etiam cum expreſſio $p = \frac{dy}{dx}$, prorſus ſit realis, etiam haec aequalitas $dy = pdx$ merito admittitur, tametſi in neutro membro vlla quantitas agnoſcitur.

12. Haec igitur definitio calculi differentialis nullis amplius tenebris eſt inuoluta, qua is vocatur methodus, propoſita quacunque functione vnius pluriumue variabilium, rationes, quae inter differentialia tam primi quam altiorum ordinum intercedunt, inueſtigandi. De functionibus quidem vnius variabilis, ad quas ſolas hic etiamnum reſpicio, iſta definitio maxime eſt perſpicua: ſi enim y fuerit functio quaecunque ipſius x, calculus differentialis docet, quomodo valor fractionis $\frac{dy}{dx}$ ſit eliciendus: eademque regula, qua hoc praeſtatur, valet quoque pro differentialibus altioribus: cum poſito $\frac{dy}{dx} = p$, ex hac etiam functione ipſius x eadem methodo valor $\frac{dp}{dx}$ ſeu $\frac{ddy}{dx^2}$ obtineatur: ac ſi vlterius ſtatuatur $\frac{dp}{dx} = \frac{ddy}{dx^2} = q$ item $\frac{dq}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = r$, tum $\frac{dr}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4} = s$ etc. eadem methodus ſufficit his omnibus valoribus q, r, s etc. inueniendis: atque huc ſunt trahenda, quae vulgo de calculo differentio-differentiali et differentialibus altiorum ordinum tradi ſolent, quae, ſi rite intelligantur, nihil ſane continent, quod primis noſtrae cognitionis principiis aduerſetur. Quando etiam in elemen-

elementis calculi differentialis ſaepe plures quantitates variabiles occurrunt, et praecepta ad eas partes, quas conſtituo ſequentes, referenda videantur, tamen ſemper in eas certus quidam nexus admittitur, vt tandem omnes tanquam functiones vnius variabilis ſpectari queant. Interim tamen regulae differentiandi ſequentium partium a prima non diſcrepant.

13. Calculum autem integralem in genere ita definio, vt ſit methodus inueniendi indolem functionum ex data quacunque differentialium relatione; quam definitionem pro caſu functionum vnicae variabilis ante clarius euoluam, quam ad functiones plurium variabilium ſum progreſſurus. Poſito ſcilicet pro functione vnius variabilis $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$ etc. Si aequatio proponatur quaecunque, in quam, praeter quantitates x et y, etiam iſtae p, q, r etc. ex differentialibus ortae, ingrediantur, in hoc officium calculi integralis verſatur, vt ex iſta aequatione ſeu relatione differentialium data natura functionis y, quemadmodum ſcilicet per x determinatur, eliciatur; quae operatio vocari ſolet integratio. Plurimum autem abeſt, quo minus haec methodus adhuc ſatis ſit elaborata, et ſi omnes quaeſtiones in eam cadentes perpendamus, pauciſſimas eius ope reſoluere licet; variis autem ea, quatenus eſt exculta, continetur praeceptis pro ordine differentialium, quae in relationem datam ingrediuntur. Ita ſi proponatur relatio quaecunque inter quantitates x, y

et

et $p = \frac{dy}{dx}$, quae aeqnatio primi gradus differentialis vocatur, pluribus quidem caſibus integratio ſuccedit; ſin autem ea relatio inſuper quantitatem q inuoluat, aequatio vocatur differentialis ſecundi gradus, duplicique integratione opus eſt, antequam ad deſideratam relationem inter x et y, vnde ratio iſtius functionis y innoteſcat, perueniatur. Hic multo pauciores ſunt caſus, quibus ad ſcopum pertingere licet; ſimulque patet, quid de aequationibus differentialibus tertii altiorumque ordinum ſit iudicandum.

14. Verum circa has integrationes, quae functionibus vnius tantum variabilis inueſtigandis inſeruiunt, ſingularis quaedam affectio, qua iſtius methodi praecipua indoles continetur, probe eſt obſeruanda. Affectio autem iſta in hoc conſiſtit, quod aequatio integrata ſemper nouam quandam conſtantem quantitatem recipiat, cuius in aequatione differentiali ne veſtigium apparet, hancque quantitatem conſtantem prorſus arbitrio noſtro relinqui. Ita ſi habeatur iſta aequatio differentialis $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$, ſeu $dy = 2axdx + bdx$, vbi quidem litterae a et b denotant quantitates conſtantes datas, aequatio integralis in omni extenſione ita ſe habet: $y = axx + bx + C$, vbi C deſignat quantitatem conſtantem a praecedentibus minime pendentem, et cuius valor penitus arbitrio noſtro relinquitur, neque integratio cuiusquam aequationis differentialis pro completa et perfecta eſt habenda, niſi huiusmodi quantitas conſtans arbitraria fuerit introducta.

ducta Simili modo ſi relatio propoſita inuoluat differentialia ſecundi gradus, quoniam duplici opus eſt integratione, ſolutio completa duas eiusmodi conſtantes arbitrarias complecti debet; tres vero eiusmodi conſtantes requiruntur, ſi aequationes differentiales tertii gradus perfecte reſoluuntur. De his autem conſtantibus id praecipue eſt notandum, quod cum natura problematum arctiſſimo nexu cohaereant, atque omnia problemata, quorum reſolutio ad aequationes differentiales perducitur, ita ſint comparata, vt poſt peractam integrationem conſtantes illae ingreſſae ex ipſa rei natura et circumſtantiis adiunctis determinationem ſuam adipiſcantur.

15. His igitur conſtat prima pars Analyſeos infinitorum, quae circa functiones vnius tantum variabilis verſantur, atque ex his multo facilius intelligetur, quid de reliquis partibus, in quibus functiones duarum pluriumue variabilium, ſit tenendum. In differentialibus autem iam diuerſa deprehenditur ratio, cum ea hic non abſolute inter ſe comparare liceat. Si enim z fuerit functio quaecunque binarum variabilium x et y, circa differentiationem quaeſtio bipartita eſt ſtatuenda: primo ſcilicet quaeritur differentiale ipſius z, dum ſeruante y eundem valorem, altera variabilis x differentiali ſuo dx augetur, vt inde valor fractionis $\frac{dz}{dx}$ obtineatur. Simili modo tractata x vt conſtante, altera y incrementum dy capere aſſumitur, et collecto inde incremento dz, quo functio z augetur, fractio $\frac{dz}{dy}$ rationem differentia-

lem ex variabilitate ſolius quantitatis y natam exprimit. Vtraque autem haec fractio $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, vti caſu praecedente, meris terminis finitis continebitur, et ambae tanquam nouae functiones binarum variabilium x et y ſpectari poterunt. Inuentis autem his binis valoribus vera ratio differentialis functionis propoſitae z perſpicitur; ex iis enim coniunctis demum patet, quomodo differentiale ipſius z ratione variabilitatis vtriusque quantitatis x et y ſe habeat. Hanc diſtinctionem ipſa rei natura poſtulat, ſine qua ratio differentiationis huiusmodi functionum ne intelligi quidem poſſet, quae autem nunc per ſe eſt manifeſta.

16. Quicquid igitur ad differentiationem functionum duarum variabilium ſpectat, id totum ad binas iſtas formulas $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ reducitur, quarum valores quouis caſu terminis finitis per ambas variabiles x et y exprimuntur. Ne autem huiusmodi fractiones cum praecedentibus confundantur, vncinulis includi, hocque modo $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ ſcribi ſolent. Quodſi has fractiones litteris p et q deſignemus, erit vtique $dz = p\,dx + q\,dy$ differentiale completum functionis z: et quoniam p et q iterum vt functiones ipſarum x et y ſpectari poſſunt, intelligitur etiam, quid ſibi velint hae formulae $\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$; $\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right)$ et $\left(\frac{dq}{dy}\right) = \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, quae differentialia ſecundi gradus in ſe complectuntur, ſimilique modo progreſſio fit ad differentialia altiorum graduum. Propoſita ergo functione quacunque z binarum variabi-

riabi-

riabilium x et y, calculus differentialis regulas praeſcribit, quibus valores omnium iſtarum formularum differentialium inueniri queant: primo ſcilicet primi gradus, quae ſunt $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, tum ſecundi gradus, quae ſunt $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)$ et $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, porro tertii gradus, quae ſunt

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right),\ \left(\frac{d^3z}{dx^2\,dy}\right),\ \left(\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right),\ \left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$$

et ſic deinceps. Vbi quidem notandum, ipſam methodum, has formulas definiendi, a prima parte non diſcrepare, cum in qualibet differentiatione vnica tantum quantitas pro variabili habeatur. Superfluum foret, haec eadem momenta de functionibus trium pluriumue variabilium exponere, quippe quae ex allatis iam ſatis ſunt perſpicua.

17. Integralis autem calculi munus in hoc conſiſtit, vt propoſita relatione quacunque inter quantitates x, y, z et formulas differentiales modo allatas, inde natura functionis z, quemadmodum ex variabilibus x et y conflatur, inueſtigetur. Relatio vero illa data per aequationem exprimitur, quae ſi tantum formulas differentiales primi ordinis $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ praeter quantitates ipſas x, y, et z complectitur, aequatio differentialis primi gradus vocatur; ſin autem in eam inſuper formulae differentiales ſecundi ordinis $\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$, vel porro tertii altiorumue ordinum ingrediantur, tum aequatio illa eiusdem ordinis differentialis dicitur. Haecque eſt forma generalis calculi integralis, quatenus circa functio-

functiones duarum variabilium eſt occupatus; ex quo ſimul intelligitur, quomodo reliquae partes Analyſeos infinitorum, in quibus functiones trium pluriumue variabilium tractantur, ſint definiendae. At calculus integralis ad functiones duarum variabilium accommodatus, plurimum differt a calculo integrali communi, vbi non niſi functiones vnius variabilis occurrunt, et praecepta omnino ſingularia poſtulat, praeterquam quod in eo omnia quoque artificia prioris partis ſint in vſum vocanda. Verum haud diu eſt, ex quo haec pars Analyſeos coli eſt coepta, ita vt vix adhuc prima eius elementa ſatis ſint euoluta. Eximia quidem huius calculi ſpecimina iam paſſim reperiuntur, quorum tractatio autem minus ad praecepta calculi communis eſt adſtricta; vnde latiſſimus campus aperitur, in quo ſumma ingenia ad maximum ſcientiae incrementum vires ſuas exercere poterunt.

18. Huius autem noui calculi vis et quaſi proprius character minime adhuc ſatis perſpectus videtur. Quemadmodum enim calculi integralis communis vis in eo conſiſtit, vt qualibet integratione noua quantitas conſtans arbitrio noſtro permiſſa in calculum introducatur: ita in hac parte, circa functiones binarum variabilium occupata, ſingulis integrationibus, non ſolum noua quantitas conſtans, ſed adeo noua functio cuiuspiam variabilis prorſus indeterminata, in calculum inuehitur, quae ita ab arbitrio noſtro pendet, vt eius loco etiam functiones diſcon-

diſcontinuae aſſumi queant. Quare functionum diſcontinuarum vſu ab hoc fere nouo calculi genere nonſolum non excluditur, ſed etiam quaſi eſſentialiter ad eius naturam pertinere ſit iudicandus; neque etiam vlla integratio in hoc calculo pro completa et abſoluta eſt habenda, niſi in aequationem integralem huiusmodi functio prorſus arbitraria fuerit introducta: ac ſi aequatio differentialis propoſita fuerit ſecundi altiorisue gradus, ita vt binis pluribus ve integrationibus ſit opus, neceſſe eſt, totidem functiones arbitrariae in vltima aequatione integrali reperiantur, quod niſi eueniat, integrale non magis pro completo haberi poteſt, quam in calculo integrali ordinatio, vbi introductio conſtantium arbitrariarum negligitur. Quando autem de functionibus trium variabilium agitur, qualibet integratione functio arbitraria binarum variabilium in calculum introducitur; qua circumſtantia iſte calculus a praecedentibus ita diſtinguitur, vt genus peculiare conſtituere ſit cenſendus, cum natura cuiusque generis, ex indole quantitatis arbitrariae per integrationem inuectae, conuenientiſſime diiudicetur. Tum vero ſi quaeſtio circa functiones quatuor variabilium verſatur, haec quantitas arbitraria quauis integratione introducenda ſit functio trium variabilium et ita porro.

19. Haec autem neutiquam calculi cuipiam moroſitati ſunt tribuenda, quae omni vſu deſtituantur, et inani ſpeculationi tantummodo inſeruiant, ſed potius naturae rerum maxime innituntur, et

cum veritatum concatenatione pulcherrime cohaerent. Quemadmodum enim omnia problemata circa functiones vnicae variabilis, cuiusmodi ſunt fere omnia, quae adhuc in Analyſi ſunt tractata, perfecte non ſoluuntur, niſi qualibet integratione noua quantitas conſtans inferatur, quam deinceps ex circumſtantiis problematis determinari oportet: ita etiam omnia problemata, quorum ſolutio ad functiones binarum variabilium perducitur, natura ſua ita ſunt comparata, vt, niſi quauis integratione noua functio arbitraria, ſeu indefinita vnius variabilis, induceretur, omnibus conditionibus problema determinantibus nullo modo ſatisfieri poſſet. Eximium huius rei ſpecimen cernitur in problemate de cordis vibrantibus; ſi enim cuiusque cordae puncti, quod ab altero termino diſtat interuallo $= x$, pro tempore elapſo $= t$, elongatio ab axe, ſeu ſtatu aequilibrii, ponatur $= z$, euidens eſt, z eſſe functionem duarum variabilium t et x, quoniam vtique iſta elongatio, tam pro diuerſis cordae punctis, quam pro temporis fluxu, variatur. Cum igitur poſito tempore $t = 0$ is cordae ſtatus prodire debeat, qui ipſi initio fuerit inductus, et vbi elongatio z functioni cuidam datae interualli x erat aequalis, ſolutio perfecta eſſe nequit, niſi huiusmodi functionem indefinitam complectatur, quae deinceps ex ſtatu cordae initiali definiri queat; et quoniam iſte ſtatus ab arbitrio noſtro ita pendet, vt cordae figura quaecunque irregularis et diſcontinua induci potuerit, etiam functio illa per Analyſin introducta ita late patere debet, vt etiam diſcontinua,

ſeu

ſeu a continuitatis lege abhorrentia, in ſe complectatur.

20. Ne autem hic vlli dubio locus relinquatur, eiusmodi problema euoluam, cuius ſolutio adeo ex elementis facile deducitur, et quae ita eſt comparata, vt in ea functiones diſcontinuae, ſeu lineae curuae pro lubitu ductae, neceſſario admitti debeant; deinde idem problema analytice expediam, quo clarius neceſſitas functionum arbitrariarum, quae integratione introducuntur, ex conſenſu cum priori ſolutione, eluceſcat. Problema autem ita ſe habet: *vt omnia ſolida, ad quorum ſuperficiem in ſingulis punctis normales ductae, eiusdem ſint quantitatis.* Quando de lineis agitur, notum eſt, praeter circulum nullam dari lineam curuam, cuius omnes normales ſint inter ſe aequales; at ſi haec aequalitas normalium ad ſolida extenditur, vt omnes rectae, a dato plano tanquam baſi ad ſuperficiem normaliter ductae, debeant eſſe inter ſe aequales, infinita exhiberi poſſunt ſolida, in quae haec proprietas competit. Primo ſcilicet hoc manifeſto euenit in hemisphaerio, vel etiam ſphaera, cuius centrum in plano illo ſeu baſi eſt ſitum, dum omnes rectae normales ſimul ſunt radii ſphaerae. Deinde ſi cylindrus ita collocetur, vt eius axis in baſem incidat, omnes quoque normales inter ſe aequales habentur. Hinc autem colligitur ſolutio multo latius patens, quoniam ſalua hac proprietate axis cylindri quomodocunque incurvari poteſt, quam ſolutionem generalem ita enunciare licet. Deſcripta ſuper plano fixo linea quacunque

cunque curua, ſiue continua ſiue diſcontinua, eiusmodi ſolidum ſuper ea exſtruatur, cuius omnes ſectiones, ad illam lineam normaliter factae, ſint ſemicirculi, quorum centra in eam lineam incidant. Niſi ergo ſolutio analytica pariter ita late pateat, vt lineam pro lubitu ductam, ſeu, quod eodem redit, functionem indefinitam in ſe contineret, ea certe pro perfecta et abſoluta haberi non poſſet.

21. Poſitis igitur binis coordinatis in plano fixo aſſumtis x et y, perpendiculo autem inde ad ſuperficiem quaeſitam pertingente $= z$, quia z conſideratur vt functio binarum variabilium x et y, ſtatuantur formulae differentiales $(\frac{dz}{dx}) = p$ et $(\frac{dz}{dy}) = q$, vt ſit $dz = pdx + qdy$. Hinc autem normalis in ſuperficiem ad planum vsque fixum porrecta colligitur $= z\sqrt{(1 + pp + qq)}$; quae quia debet eſſe conſtantis magnitudinis, ponatur $z\sqrt{(1 + pp + qq)} = a$ et pro z eiusmodi inueſtigari oportet functionem binarum variabilium x et y, vt haec conditio, quae eſt aequatio differentialis primi gradus, impleatur. Quo facilius autem ad reſolutionem per integrationem perueniamus, his vtamur ſubſtitutionibus: ſit $p = \frac{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\omega}{\text{coſ.}\,\Phi}$ et $q = \frac{\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\omega}{\text{coſ.}\,\Phi}$, vt fiat $pp + qq = \frac{\text{ſin.}\,\Phi^2}{\text{coſ}\,\Phi^2}$, hincque $\frac{z}{\text{coſ.}\,\Phi} = a$, ſeu $z = a\,\text{coſ.}\,\Phi$, vnde aequatio differentialis aſſumta transformatur in hanc: $-a\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi}(dx\,\text{coſ.}\,\omega + dy\,\text{ſin.}\,\omega)$ ſeu $-a\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = dx\,\text{coſ.}\,\omega + dy\,\text{ſin.}\,\omega$, vbi cum pars prior integrationem admittat, etiam pars poſterior in-

integrabilis eſt reddenda, qua conditione certa relatio inter variabiles x, y et ω ſtabilitur. Cum igitur integrando obtineamus:

$$-a\,\text{ſin.}\,\Phi = x\,\text{coſ.}\,\omega + y\,\text{ſin.}\,\omega - \int d\omega(y\,\text{coſ.}\,\omega - x\,\text{ſin.}\,\omega)$$

euidens eſt, hoc integrale exhiberi non poſſe, niſi formula $y\,\text{coſ.}\,\omega - x\,\text{ſin.}\,\omega$ fuerit functio vnius variabilis ω. Statuatur ergo: $y\,\text{coſ.}\,\omega - x\,\text{ſin.}\,\omega = F' : \omega$, vt fiat $\int d\omega(y\,\text{coſ.}\,\omega - x\,\text{ſin.}\,\omega) = F:\omega$, eritque $-a\,\text{ſin.}\,\Phi = x\,\text{coſ.}\,\omega + y\,\text{ſin.}\,\omega - F:\omega$. Vel denotet Ω functionem quamcunque ipſius ω vtcunque indefinitam, vt etiam functiones diſcontinuae inde non excludantur, et poſito $F':\omega = \Omega$, erit $F:\omega = \int \Omega\, d\omega$, et problematis ſolutio ob $a\,\text{ſin.}\,\Phi = \sqrt{(aa - zz)}$ his aequationibus continetur:

$$y\,\text{coſ.}\,\omega - x\,\text{ſin.}\,\omega = \Omega \text{ et } \sqrt{(aa-zz)} = \int \Omega\, d\omega - \text{coſ.}\,\omega - y\,\text{ſin.}\,\omega$$

vbi quidem ſignum radicale aeque negatiue ac poſitiue capi poteſt.

22. Videamus iam, quomodo hae formulae ad conſtructionem perduci queant. Referat ipſa tabula planum illud, fixam baſin corporis quaeſiti conſtituens, in quo ſint binae coordinatae $AX = x$ et $XY = y$, ita vt puncto Y perpendiculariter immineat tertia coordinata z. In ipſo iſto plano axi AX, normaliter iungatur recta AO, ducaturque recta AP, ita vt ſit angulus $OAP = \omega$, ad hanc ex Y agatur normalis YP, eritque $AP = y\,\text{coſ.}\,\omega - x\,\text{ſin.}\,\omega$ et $PY = y\,\text{ſin.}\,\omega + x\,\text{coſ.}\,\omega$. Quibus lineis in calculum introductis ambae noſtrae aequationes ita ſe habebunt: Tab. I. Fig. 1.

$$AP = \Omega \text{ et } PY + \sqrt{(aa-zz)} = \int \Omega\, d\omega.$$

Producatur ergo recta PY in M, vt ſit $YM = \sqrt{(aa-zz)}$, fiatque propterea $PM = \int \Omega\, d\omega$, quae relatio inter lineas AP et PM probe eſt perpendenda. Cum iam in ſitu proximo, angulo ſcilicet OAP aucto ſuo differentiali $PAp = d\omega$, ſit arculus radio AP deſcriptus $Pp = \Omega\, d\omega$, hic arculus ſimul differentiale lineae MP exhibebit, ita vt ſit $pm = PM + Pp$, ex quo intelligitur, rectam PM altero termino M in eiusmodi curua EMF terminari, in quam ea iugiter ſit normalis, qua proprietate tota noſtra ſolutio analytica continetur. Quocirca conſtructio quaeſita ita erit comparata: Deſcripta pro lubitu curua quacunque EMF, quae ſiue ſit continua ſiue ſecus nihil refert, ad ſingula eius puncta M ducantur normales MP, vtrinque producendae, et ex harum rectarum ſingulis punctis Y verticaliter erigantur perpendicula $YZ = z$, vt ſit $YZ^2 + MY^2 = aa$, quod praeſtabitur, ſi ſingulis centris M radio $= a$, cui normales debent eſſe aequales, deſcribantur circuli in planis ad baſin ipſamque curuam EMF normalibus; horum enim circulorum peripheriae in ipſa ſuperficie corporis quaeſiti erunt poſitae, et rectae in hanc ſuperficiem normales omnes erunt $= a$, et in lineam EMF pro lubitu ductam incident.

23. Leuiſſima autem attentione adhibita perſpicuum eſt, hanc conſtructionem ex ſolutione analytica petitam prorſus congruere cum ſuperiori conſtructione, quam ſola elementorum conſideratio ſuppeditauerat. Manifeſtum enim eſt, corpus ita fore com-

comparatum, vt omnes eius ſectiones ad lineam EMF normaliter factae ſint circuli inter ſe aequales, centra ſua in ipſa hac linea habentes. Ob vtriusque autem ſolutionis conſenſum hoc imprimis notandum eſt, ſolutionem analyticam non futuram eſſe completam, niſi functio Ω per integrationem ingeſta latiſſime pateret, atque adeo omnes omnino valores, tam continuos, quam diſcontinuos, in ſe complecteretur, quandoquidem linea illa EMF, functioni Ω reſpondens, penitus arbitrio noſtro relinquitur, vt etiam lineas libero manus tractu ductas in vſum vocare liceat. Quod autem de hoc problemate eſt oſtenſum, ſimul de omnibus aliis eiusdem generis valet, quorum ſcilicet ſolutio functiones binarum variabilium implicat, ex quo quaeſtio initio propoſita de vſu functionum diſcontinuarum in Analyſi ita eſt reſoluta, vt in Analyſi quidem communi, quae circa functiones vnius variabilis tantum verſatur, huiusmodi functionibus nullus locus ſit concedendus, in ſublimioribus autem Analyſeos partibus, vbi functiones binarum plurium ve variabilium tractantur, tales functiones ita neceſſario ad calculi eſſentiam pertinere ſint cenſendae, vt nulla integratio pro abſoluta et completa haberi queat, niſi ſimul functio maxime indefinita, atque adeo etiam diſcontinua, in calculum introducatur.

DE
VSV NOVI ALGORITHMI IN PROBLEMATE PELLIANO SOLVENDO.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quicunque numeri integri pro litteris l, m et n aſſumantur, innumerabiles quoque numeri integri pro x inueniri poſſunt, quibus haec formula:

$lxx + mx + n$ reddatur quadratum;

ſiquidem ſequentes conditiones habeant locum:

1. vt l ſit numerus poſitiuus non quadratus.
2. vt pro x vnus ſaltem valor ſit cognitus.

Nam ſi l eſt numerus, vel negatiuus, vel quadratus, manifeſtum eſt, infinitas ſolutiones in numeris integris exhiberi non poſſe, etiamſi vna innotuerit. Tum vero etiam euenire poteſt, vt formula $lxx + mx + n$ naturae quadrati prorſus aduerſetur, vti fit hoc caſu $3xx + 2$. Verum ſtatim atque vnica ſolutio habetur, ſemper innumerabiles inuenire licet.

2. Quare ſi ſtatuamus:

$lxx + mx + n = yy$,

vnus-

vnusque caſus conſtet, quo huic conditioni ſatisfiat, ita vt poſito $x = a$, prodeat

$$laa + ma + n = bb$$

ſicque ſumto $x = a$ obtineatur $y = b$; regula, cuius ope plures imo infinitae ſolutiones elici poſſunt, ita ſe habet:

Primo ex dato numero l duo huiusmodi numeri p et q inueſtigentur, vt ſit

$$pp = lqq + 1 \text{, ſeu } p = \sqrt{(lqq + 1)}$$

quibus inuentis ex ſolutione primo cognita ſtatim eruitur haec noua:

$$x = pa + qb + \frac{m(p-1)}{2l} \text{, vnde fit}$$

$$y = pb + lqa + \frac{mq}{2}$$

ex qua deinceps ſimili modo aliae deriuantur. Si enim hos valores loco a et b ſubſtituamus, naſcitur tertia ſolutio iſta:

$$x = (2pp - 1)a + 2pqb + mqq \text{, et}$$

$$y = (2pp - 1)b + 2lpqa + mpq$$

quae certe eſt in numeris integris, ſi forte praecedentes adhuc fuerint fracti.

3. Cum igitur hoc modo continuo nouae ſolutiones inueniri queant, ad calculi compendium plurimum iuuat notaſſe, continuos iſtos valores, tam ipſius x, quam ipſius y, ſecundum ſeriem recurrentem progredi, cuius ſinguli termini per binos praeceden-

cedentes certa et conſtante lege determinentur. Scilicet ſi fuerint valores hi continuo progredientes:

ipſius x . . . a . . . . P, Q, R, S etc.

ipſius y . . . b . . . . $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ etc.

erit per legem ſeriei recurrentis:

$$R = 2pQ - P + \frac{m(p-1)}{l}; \quad \mathfrak{R} = 2p\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}$$

$$S = 2pR - Q + \frac{m(p-1)}{l}; \quad \mathfrak{S} = 2p\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}.$$

Atque hinc iſti valores expreſſionibus generalibus comprehendi poſſunt, quae ita ſe habent:

$$x = \frac{2la + m + 2b\sqrt{l}}{4l}(p + q\sqrt{l})^\mu + \frac{2la + m - 2b\sqrt{l}}{4l}(p - q\sqrt{l})^\mu - \frac{m}{2l}$$

$$y = \frac{2la + m + 2b\sqrt{l}}{4\sqrt{l}}(p + q\sqrt{l})^\mu - \frac{2la - m + 2b\sqrt{l}}{4\sqrt{l}}(p - q\sqrt{l})^\mu$$

vnde quicunque numeri integri exponenti μ tribuantur, ſemper valores rationales pro x et y reſultant.

4. Haec autem inueſtigatio multo latius ita poteſt extendi, vt propoſita inter binos numeros x et y huiusmodi aequatione:

$$Axx + 2Bxy + Cyy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

omnes ſolutiones in numeris rationalibus et integris ſint eruendae. Hic quidem pariter neceſſe eſt, vnam ſolutionem eſſe cognitam, quae ſit $x = a$, et $y = b$, ita vt ſit

$$Aaa + 2Bab + Cbb + 2Da + 2Eb + F = 0.$$

Tum vero quaerantur bini numeri p et q, vt ſit

$$pp = (BB - AC)qq + 1$$

quod

quod quidem fieri nequit, niſi ſit $BB > AC$. Atque noua ſolutio ita erit comparata:

$$x = a(p + Bq) + bCq + Eq + \frac{BE - CD}{BB - AC}(p - 1)$$
$$y = b(p - Bq) - aAq - Dq + \frac{BD - AE}{BB - AC}(p - 1)$$

vnde per eandem legem continuo plures elicere licet.

5. Haec ideo in medium afferre eſt viſum, vt intelligatur, ad omnes huius generis reſolutiones id omnino requiri, vt propoſito quocunque numero integro poſitiuo non quadrato l, eiusmodi binos numeros pariter integros p et q inueniri oporteat, vt ſit $pp = lqq + 1$, ſeu $p = \sqrt{(lqq + 1)}$. Atque hoc eſt illud problema olim quidem maxime celebratum a ſolutionis ingenioſiſſimae auctore *Pellianum* vocatum, quo pro quouis huiusmodi numero l numerus quadratus qq requiritur, qui per l multiplicatus adiuncta vnitate fiat quadratus. In fractis quidem haec quaeſtio nullam haberet difficultatem, cum ſumto $q = \frac{2rs}{lss - rr}$, fiat $p = \frac{lss + rr}{lss - rr}$: verum quia numeri integri deſiderantur, negotium iterum eo reuocatur, vt denominator $lss - rr$ in vnitatem abeat.

6. Etiamſi autem ſolutio *Pelliana* huius problematis ſit elegantiſſima, tamen ſaepenumero tam operoſis calculis implicatur, qui non minus taedii quam laboris creare ſolent. Cum igitur obſeruaſſem, algorithmum illum nouum, cuius nuper indolem expoſui, ad hos calculos, quibus hic eſt opus, contrahendos, inſignia ſubſidia ſuppeditare, praeclarius

certe

certe ſpecimen exhibere vix licebit, quo vſus iſtius algorithmi illuſtretur et commendetur. Vbi id imprimis notatu dignum occurrit, quod totum compendium inde ſubminiſtratum potiſſimum idoneorum ſignorum vſu contineatur.

7. Operationes, quibus *Pellius* eſt vſus, aliunde quidem ſatis ſunt notae, egoque iam eas alia occaſione fuſius deſcripſi; ex quo eo minus opus eſt, vt iis denuo explicandis hic immorer, cum totam Analyſin hic longe alia ratione ſim inſtituturus. Eius ſcilicet principium ex hoc fonte haurio, quod cum ſit $pp = lqq + 1$, proxime fiat $\frac{p}{q} = \sqrt{l}$, ex quo manifeſtum eſt, $\frac{p}{q}$ eiusmodi eſſe fractionem, quae valorem irrationalem $\sqrt{l}$ tam prope exprimat, ſeu eum tam parum excedat, vt id, niſi maioribus numeris adhibendis, accuratius fieri nequeat. Quod problema, olim feliciter a *Walliſio* ſolutum, equidem quoque iam dudum per fractiones continuas multo commodius expediui.

8. Quo ergo hoc argumentum luculentius et ordine pertractem, primum radicem quadratam ex quouis numero in fractionem continuam euoluere docebo, idque methodo quam minime moleſta. Deinde oſtendam, quomodo inde fractiones $\frac{p}{q}$ valorem irrationalem $\sqrt{l}$ proxime exprimentes formari debeant, in ſubſidium vocato Algorithmo nouo ſupra explicato. Tum vero facile patebit, quomodo hinc nume-

numeros p et q definiri oporteat, vt fiat $pp = lqq + 1$. Denique tabulam ſubiungam, in qua pro omnibus numeris l, centenarium non ſuperantibus, numeri bini p et q exhibentur.

De euolutione radicum quadratarum per fractiones continuas.

9. Operationes in hunc finem conſtituendae in exemplo facillime explicabuntur. Sit igitur propoſita radix quadrata ex numero 13, et cum radix rationalis proxime minor ſit 3, ſtatuo $\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{a}$. Hinc colligitur

$$a = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4}$$

cuius valor in integris proxime minor eſt 1, quod inde patet, ſi 3 loco $\sqrt{13}$ ſcribatur. Pono itaque

$$a = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} = 1 + \frac{1}{b}, \text{ hincque}$$

$$b = \frac{4}{\sqrt{13} - 1} = \frac{4(\sqrt{13} + 1)}{12} = \frac{\sqrt{13} + 1}{3} = 1 + \frac{1}{c}$$

Ergo $c = \frac{3}{\sqrt{13} - 2} = \frac{3(\sqrt{13} + 2)}{9} = \frac{\sqrt{13} + 2}{3} = 1 + \frac{1}{d}$.

Ergo $d = \frac{3}{\sqrt{13} - 1} = \frac{3(\sqrt{13} + 1)}{12} = \frac{\sqrt{13} + 1}{4} = 1 + \frac{1}{e}$

Ergo $e = \frac{4}{\sqrt{13} - 4} = \frac{4(\sqrt{13} + 3)}{4} = \sqrt{13} + 3 = 6 + \frac{1}{f}$

Ergo $f = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} = 1 + \frac{1}{g}$

atque hic operationem abrumpere licet, quia va-

lor f ipſi a aequalis prodiit, ideoque ſequentes eodem ordine repetuntur. Sicque inuenimus eſſe

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

10. Quo indoles harum operationum melius perſpiciatur, aliud exemplum, prolixiorem calculum poſtulans, adiungam. Propoſita ſcilicet ſit $\sqrt{61}$, cuius valor proxime minor cum ſit 7, pono $\sqrt{61} = 7 + \frac{1}{a}$, et operationes ſequenti modo erunt inſtituendae:

I. $a = \frac{1}{\sqrt{61} - 7} = \frac{\sqrt{61} + 7}{12} = 1 + \frac{1}{b}$

II. $b = \frac{12}{\sqrt{61} - 5} = \frac{12(\sqrt{61} + 5)}{36} = \frac{\sqrt{61} + 5}{3} = 4 + \frac{1}{c}$

III. $c = \frac{3}{\sqrt{61} - 7} = \frac{3(\sqrt{61} + 7)}{12} = \frac{\sqrt{61} + 7}{4} = 3 + \frac{1}{d}$

IV. $d = \frac{4}{\sqrt{61} - 5} = \frac{4(\sqrt{61} + 5)}{36} = \frac{\sqrt{61} + 5}{9} = 1 + \frac{1}{e}$

V. $e = \frac{9}{\sqrt{61} - 4} = \frac{9(\sqrt{61} + 4)}{45} = \frac{\sqrt{61} + 4}{5} = 2 + \frac{1}{f}$

VI $f = \frac{5}{\sqrt{61} - 6} = \frac{5(\sqrt{61} + 6)}{25} = \frac{\sqrt{61} + 6}{5} = 2 + \frac{1}{g}$

VII. $g = \frac{5}{\sqrt{61} - 4} = \frac{5(\sqrt{61} + 4)}{45} = \frac{\sqrt{61} + 4}{9} = 1 + \frac{1}{h}$

VIII.

VIII. $h = \frac{9}{\sqrt{61} - 5} = \frac{9(\sqrt{61} + 5)}{36} = \frac{\sqrt{61} + 5}{4} = 3 + \frac{1}{i}$

IX. $i = \frac{4}{\sqrt{61} - 7} = \frac{4(\sqrt{61} + 7)}{12} = \frac{\sqrt{61} + 7}{3} = 4 + \frac{1}{k}$

X. $k = \frac{3}{\sqrt{61} - 5} = \frac{3(\sqrt{61} + 5)}{36} = \frac{\sqrt{61} + 5}{12} = 1 + \frac{1}{l}$

XI. $l = \frac{12}{\sqrt{61} - 7} = \frac{12(\sqrt{61} + 7)}{12} = \sqrt{61} + 7 = 14 + \frac{1}{m}$

XII. $m = \frac{1}{\sqrt{61} - 7}$ ergo $m = a$, hincque porro $n = b$, $o = c$. etc. Ex quo indices pro fractione continua erunt:

7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14, 1, 4, 3, 1, 2, etc. neque opus eſt, ipſam fractionem continuam hic exhibere.

11. Adhuc aliud exemplum adieciſſe iuuabit, vbi indicum numerus, antequam iidem recurrunt, fit impar. Eſto hoc exemplum: $\sqrt{67} = 8 + \frac{1}{a}$, et operationes ſequentes inſtitui oportebit:

I. $a = \frac{1}{\sqrt{67} - 8} = \frac{\sqrt{67} - 8}{3} = 5 + \frac{1}{b}$

II. $b = \frac{3}{\sqrt{67} - 7} = \frac{3(\sqrt{67} + 7)}{18} = \frac{\sqrt{67} + 7}{6} = 2 + \frac{1}{c}$

III. $c = \frac{6}{\sqrt{67} - 5} = \frac{6(\sqrt{67} + 5)}{42} = \frac{\sqrt{67} + 5}{7} = 1 + \frac{1}{d}$

IV. $d = \frac{7}{\sqrt{67} - 2} = \frac{7(\sqrt{67} + 2)}{63} = \frac{\sqrt{67} + 2}{9} = 1 + \frac{1}{e}$

V. $e = \frac{9}{\sqrt{67} - 7} = \frac{9(\sqrt{67} + 7)}{18} = \frac{\sqrt{67} + 7}{2} = 7 + \frac{1}{f}$

VI. $f = \frac{2}{\sqrt{67} - 7} = \frac{2(\sqrt{67} + 7)}{18} = \frac{\sqrt{67} + 7}{9} = 1 + \frac{1}{g}$

VII. $g = \frac{9}{\sqrt{67} - 2} = \frac{9(\sqrt{67} + 2)}{63} = \frac{\sqrt{67} + 2}{7} = 1 + \frac{1}{h}$

VIII. $h = \frac{7}{\sqrt{67} - 5} = \frac{7(\sqrt{67} + 5)}{42} = \frac{\sqrt{67} + 5}{6} = 2 + \frac{1}{i}$

IX. $i = \frac{6}{\sqrt{67}-7} = \frac{6(\sqrt{67}+7)}{18} = \frac{\sqrt{67}+7}{3} = 5 + \frac{1}{k}$

X. $k = \frac{3}{\sqrt{67}-8} = \frac{3(\sqrt{67}+8)}{3} = \sqrt{67}+8 = 16+\frac{1}{l}$

XI. $l = \frac{1}{\sqrt{67}-8}$, ergo $l = a$, indeque indices b, c, d etc. ordine recurrunt: quare indices fractionis continuae quaeſitae ſunt:

8, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16 etc.

12. His exemplis probe perpenſis, poterimus iam in genere operationes deſcribere, quibus pro cuiusuis numeri radice quadrata fractio continua ipſi aequalis, ſeu indices eam conſtituentes, inueniuntur. Sit ſcilicet numerus propoſitus $= z$, eiusque radix integra proxime minor $= v$, vera autem hac fractione continua exprimatur:

$$\sqrt{z} = v + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}}$$

cuius indices a, b, c, d etc. poſt primum v, per ſe cognitum, ſequentibus operationibus reperiuntur:

Capiatur	tum vero	eritque
I. $A = v$:	$\alpha = z - AA = z - vv$	$a < \frac{v+A}{\alpha}$
II. $B = \alpha a - A$	$\beta = \frac{z-BB}{\alpha} = 1 + a(A-B)$	$b < \frac{v+B}{\beta}$
III. $C = \beta b - B$	$\gamma = \frac{z-CC}{\beta} = \alpha + b(B-C)$	$c < \frac{v+C}{\gamma}$
IV. $D = \gamma c - C$	$\delta = \frac{z-DD}{\gamma} = \beta + c(C-D)$	$d < \frac{v+D}{\delta}$
V. $E = \delta d - D$	$\varepsilon = \frac{z-EE}{\delta} = \gamma + d(D-E)$	$e < \frac{v+E}{\varepsilon}$

etc.

vbi

vbi in poſtrema columna ſignum $<$ indicat, pro litteris *a*, *b*, *c*, *d* etc. ſumi debere numeros integros proxime minores fractionibus adiectis, niſi hae fractiones ipſae in numeros integros abeant, quo caſu hi ipſi erunt indices.

13. Pro indicibus igitur *a*, *b*, *c*, *d* etc. eliciendis binas alias numerorum ſeries inueſtigari oportet, quarum priorem litteris maiuſculis A, B, C, D etc. poſteriorem vero graecis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. deſignaui. Circa priores numeros obſeruo, eos numerum v nunquam ſuperare poſſe, eorum quidem primus eſt $A = v$, at cum ſit $a < \frac{v+A}{\alpha}$, erit $a\alpha - A < v$, ideoque $B < v$, vel ad ſummum $B = v$, quo caſu fit $\beta = 1$, et $b = 2v$. Deinde ob $b < \frac{v+\beta}{\beta}$ eſt $\beta b - B = C < v$, ſimilique modo $D < v$, $E < v$ etc. ita vt horum numerorum nullus ipſo v maior prodire poſſit. Deinde patet, praeter caſus, quibus graecarum litterarum quaepiam fit vnitas, indices *a*, *b*, *c*, etc. omnes ipſo v maiores eſſe non poſſe, quandoquidem in fractionibus $\frac{v+B}{\beta}$, $\frac{v+C}{\gamma}$ etc. numeratores non excedere poſſunt $2v$, denominatores vero ad minimum ſint $= 2$. Denique cum fuerit perventum ad indicem $= 2v$, ſequentes iterum prodeunt *a*, *b*, *c*, *d* etc.

14. Illuſtremus etiam has operationes nonnullis exemplis.

I. Sit $z = 31$, erit $v = 5$

$A = 5$	$\alpha = 6$	$a < \frac{10}{6} = 1$
$B = 6 - 5 = 1$;	$\beta = 1 + 1.4 = 5$;	$b < \frac{6}{5} = 1$
$C = 5 - 1 = 4$;	$\gamma = 6 - 1.3 = 3$;	$c < \frac{9}{3} = 3$
$D = 9 - 4 = 5$;	$\delta = 5 - 3.1 = 2$;	$d < \frac{10}{2} = 5$
$E = 10 - 5 = 5$;	$\varepsilon = 3 - 5.0 = 3$;	$e < \frac{10}{3} = 3$
$F = 9 - 5 = 4$;	$\zeta = 2 + 3.1 = 5$;	$f < \frac{9}{5} = 1$
$G = 5 - 4 = 1$;	$\eta = 3 + 1.3 = 6$;	$g < \frac{6}{6} = 1$
$H = 6 - 1 = 5$;	$\theta = 5 - 1.4 = 1$;	$h < \frac{10}{1} = 10$.

II. Sit $z = 46$, erit $v = 6$

$A = 6$;	$\alpha = 10$	$a = \frac{12}{10} = 1$
$B = 10 - 6 = 4$;	$\beta = 1 + 1.2 = 3$;	$b = \frac{10}{3} = 3$
$C = 9 - 4 = 5$;	$\gamma = 10 - 3.1 = 7$;	$c < \frac{11}{7} = 1$
$D = 7 - 5 = 2$;	$\delta = 3 + 1.3 = 6$;	$d < \frac{8}{6} = 1$.
$E = 6 - 2 = 4$;	$\varepsilon = 7 - 1.2 = 5$;	$e < \frac{10}{5} = 2$
$F = 10 - 4 = 6$;	$\zeta = 6 - 2.2 = 2$;	$f < \frac{12}{2} = 6$
$G = 12 - 6 = 6$;	$\eta = 5 - 6.0 = 5$;	$g < \frac{12}{5} = 2$
$H = 10 - 6 = 4$;	$\theta = 2 + 2.2 = 6$;	$h < \frac{10}{6} = 1$
$I = 6 - 4 = 2$;	$\iota = 5 + 1.2 = 7$;	$i < \frac{8}{7} = 1$
$K = 7 - 2 = 5$:	$\varkappa = 6 - 1.3 = 3$;	$k < \frac{11}{3} = 3$
$L = 9 - 5 = 4$;	$\lambda = 7 + 3.1 = 10$;	$l < \frac{10}{10} = 1$
$M = 10 - 4 = 6$;	$\mu = 3 - 1.2 = 1$;	$m < \frac{12}{1} = 12$.

III. Sit $z = 54$, erit $v = 7$;

$A = 7$;	$\alpha = 5$;	$a < \frac{14}{5} = 2$
$B = 10 - 7 = 3$;	$\beta = 1 + 2.4 = 9$;	$b < \frac{10}{9} = 1$
$C = 9 - 3 = 6$;	$\gamma = 5 - 1.3 = 2$;	$c < \frac{13}{2} = 6$
$D = 12 - 6 = 6$;	$\delta = 9 + 6.0 = 9$;	$d < \frac{13}{9} = 1$
$E = 9 - 6 = 3$;	$\varepsilon = 2 + 1.3 = 5$;	$e < \frac{10}{5} = 2$
$F = 10 - 3 = 7$;	$\zeta = 9 - 2.4 = 1$;	$f < \frac{14}{1} = 14$.

15.

15. Tabulam ergo hic ſubiungam, pro ſingulorum numerorum radicibus quadratis indices continentem, ex quibus fractiones continuae ipſis aequales formari queant. Simul vero litterarum graecarum ſingulis conuenientium valores ſubſcripti reperiuntur.

Numeri ſurdi.	Indices.
$\sqrt{2}$	1, 2, 2, 2 etc. 1 1 1 1
$\sqrt{3}$	1, 1, 2, 1, 2, 1, 2 etc. 1 2 1 2 1 2 1
$\sqrt{5}$	2, 4, 4, 4 etc. 1 1 1 1
$\sqrt{6}$	2, 2, 4, 2, 4, 2, 4 etc. 1 2 1 2 1 2 1
$\sqrt{7}$	2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4 etc. 1 3 2 3 1 3 2 3 1
$\sqrt{8}$	2, 1, 4, 1, 4, 1, 4 etc. 1 4 1 4 1 4 1
$\sqrt{10}$	3, 6, 6, 6 etc. 1 1 1 1
$\sqrt{11}$	3, 3, 6, 3, 6, 3, 6 etc. 1 2 1 2 1 2 1
$\sqrt{12}$	3, 2, 6, 2, 6, 2, 6 etc. 1 3 1 3 1 3 1
$\sqrt{13}$	3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 4, 6 etc. 1 4 3 3 4 1 4 3 3 4 1
$\sqrt{14}$	3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6 etc. 1 5 2 5 1 5 2 5 1
$\sqrt{15}$	3, 1, 6, 1, 6, 1, 6 etc. 1 6 1 6 1 6 1
$\sqrt{17}$	4, 8, 8, 8, 8 etc. 1 1 1 1 1
$\sqrt{18}$	4, 4, 8, 4, 8, 4, 8, 4, 8 etc. 1 2 1 2 1 2 1 2 1

Numeri ſurdi.	Indices.
$\sqrt{19}$	4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8 etc. 1 3 5 2 5 3 1 3 5 2 5 3 1
$\sqrt{20}$	4, 2, 8, 2, 8, 2, 8, 2, 8 etc. 1 4 1 4 1 4 1 4 1
$\sqrt{21}$	4, 1, 1, 2, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 1, 8 etc. 1 5 4 3 4 5 1 5 4 1 4 5 1
$\sqrt{22}$	4, 1, 2, 4, 2, 1, 8, 1, 2, 4, 2, 1, 8 etc. 1 6 3 2 3 6 1 6 3 2 3 6 1
$\sqrt{23}$	4, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8 etc. 1 7 2 7 1 7 2 7 1
$\sqrt{24}$	4, 1, 8, 1, 8, 1, 8 etc. 1 8 1 8 1 8 1
$\sqrt{26}$	5, 10, 10, 10 etc. 1 1 1 1
$\sqrt{27}$	5, 5, 10, 5, 10, 5, 10 etc. 1 2 1 2 1 2 1
$\sqrt{28}$	5, 3, 2, 3, 10, 3, 2, 3, 10 etc. 1 3 4 3 1 3 4 3 1
$\sqrt{29}$	5, 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, 2, 10 etc. 1 4 5 5 4 1 4 5 5 4 1
$\sqrt{30}$	5, 2, 10, 2, 10, 2, 10, 2, 10 etc. 1 5 1 5 1 5 1 5 1
$\sqrt{31}$	5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10 etc. 1 6 5 3 2 3 5 6 1
$\sqrt{32}$	5, 1, 1, 1, 10, 1, 1, 1, 10 etc. 1 7 4 7 1 7 4 7 1
$\sqrt{33}$	5, 1, 2, 1, 10, 1, 2, 1, 10 etc. 1 8 3 8 1 8 3 8 1
$\sqrt{34}$	5, 1, 4, 1, 10, 1, 4, 1, 10 etc. 1 9 2 9 1 9 2 9 1
$\sqrt{35}$	5, 1, 10, 1, 10, 1, 10 etc. 1 10 1 10 1 10 1
$\sqrt{37}$	6, 12, 12, 12 etc. 1 1 1 1
$\sqrt{38}$	6, 6, 12, 6, 12, 6, 12 etc. 1 2 1 2 1 2 1

6, 4,
1 2

Numeri ſurdi.	Indices.
√39	6, 4, 12, 4, 12, 4, 12 etc.
	1 3 1 3 1 3 1
√40	6, 3, 12, 3, 12, 3, 12 etc.
	1 4 1 4 1 4 1
√41	6, 2, 2, 12, 2, 2, 12 etc.
	1 5 5 1 5 5 1
√42	6, 2, 12, 2, 12, 2, 12 etc.
	1 6 1 6 1 6 1
√43	6, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12 etc.
	1 7 6 3 9 2 9 3 6 7 1
√44	6, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12 etc.
	1 8 5 7 4 7 5 8 1
√45	6, 1, 2, 2, 2, 1, 12, 1, 2, 2, 2, 1, 12 etc.
	1 9 4 5 4 9 1 9 4 5 4 9 1
√46	6, 1, 3, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 12 etc.
	1 10 3 7 6 5 2 5 6 7 3 10 1
√47	6, 1, 5, 1, 12, 1, 5, 1, 12 etc.
	1 11 2 11 1 11 2 11 1
√48	6, 1, 12, 1, 12, 1, 12 etc.
	1 12 1 12 1 12 1
√50	7, 14, 14, 14 etc.
	1 1 1 1
√51	7, 7, 14, 7, 14, 7, 14 etc.
	1 2 1 2 1 2 1
√52	7, 4, 1, 2, 1, 4, 14, 4, 1, 2, 1, 4, 14 etc.
	1 3 9 4 9 3 1 3 9 4 9 7 1
√53	7, 3, 1, 1, 3, 14, 3, 1, 1, 3, 14 etc.
	1 4 7 7 4 1 4 7 7 4 1
√54	7, 2, 1, 6, 1, 2, 14, 2, 1, 6, 1, 2, 14 etc.
	1 5 9 2 9 5 1 5 9 2 9 5 1
√55	7, 2, 2, 2, 14, 2, 2, 2, 14, 2, 2, 2, 14 etc.
	1 6 5 6 1 6 5 6 1 6 5 6 1
√56	7, 2, 14, 2, 14, 2, 14 etc.
	1 7 1 7 1 7 1
√57	7, 1, 1, 4, 1, 1, 14 etc.
	1 8 7 3 7 8 1

Numeri ſurdi.	Indices.
$\sqrt{58}$	7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 14 etc. 1 9 6 7 7 6 9 1
$\sqrt{59}$	7, 1, 2, 7, 2, 1, 14 etc. 1 10 5 2 5 10 1
$\sqrt{60}$	7, 1, 2, 1, 14 etc. 1 11 4 11 1
$\sqrt{61}$	7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14 etc. 1 12 3 4 9 5 5 9 4 3 12 1
$\sqrt{62}$	7, 1, 6, 1, 14 etc. 1 13 2 13 1
$\sqrt{63}$	7, 1, 14, 1, 14 etc. 1 14 1 14 1
$\sqrt{65}$	9, 16, 16 etc. 1 1 1
$\sqrt{66}$	8, 8, 16, 8, 16 etc. 1 2 1 2 1
$\sqrt{67}$	8, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16 etc. 1 3 6 7 9 2 9 7 6 3 1
$\sqrt{68}$	8, 5, 16, 4, 16 etc. 1 4 1 4 1
$\sqrt{69}$	8, 3, 3, 1, 4, 1, 3, 3, 16 etc. 1 5 4 11 3 11 4 5 1
$\sqrt{70}$	8, 2, 1, 2, 1, 2, 16 etc. 1 6 9 5 9 6 1
$\sqrt{71}$	8, 2, 2, 1, 7, 1, 2, 2, 16 etc. 1 7 5 11 2 11 5 7 1
$\sqrt{72}$	8, 2, 16, 2, 16 etc. 1 8 1 8 1
$\sqrt{73}$	8, 1, 1, 5, 5, 1, 1, 16 etc. 1 9 8 3 3 8 9 1
$\sqrt{74}$	8, 1, 1, 1, 1, 16 etc. 1 10 7 7 10 1
$\sqrt{75}$	8, 1, 1, 1, 16 etc. 1 11 6 11 1
$\sqrt{76}$	8, 1, 2, 1, 1, 5, 4, 5, 1, 1, 2, 1, 16 etc. 1 12 5 8 9 3 4 3 9 8 5 12 1

8, 1,
1 13

Numeri ſurdi.	Indices.
√77	8, 1, 3, 2, 3, 1, 16 etc. 1 13 4 7 4 13 1
√78	8, 1, 4, 1, 16 etc. 1 14 3 14 1
√79	8, 1, 7, 1, 16 etc. 1 15 2 15 1
√80	8, 1, 16, 1, 16 etc. 1 16 1 16 1
√82	9, 18, 18, 18 etc. 1 1 1 1
√83	9, 9, 18, 9, 18 etc. 1 2 1 2 1
√84	9, 6, 18, 6, 18 etc. 3 3 1 3 1
√85	9, 4, 1, 1, 4, 18 etc. 1 4 9 9 4 1
√86	9, 3, 1, 1, 1 8, 1, 1, 1, 3, 18 etc. 1 5 10 7 11 2 11 7 10 5 1
√87	9, 3, 18, 3, 18 etc. 1 6 1 6 1
√88	9, 2, 1, 1, 1, 2, 18 etc. 1 7 9 8 9 7 1
√89	9. 2, 3, 3, 2, 18 etc. 1 8 5 5 8 1
√90	9, 2, 18, 2, 18 etc. 1 9 1 9 1
√91	9, 1, 1, 5, 1, 5, 1, 1, 18 etc. 1 10 9 3 14 3 9 10 1
√92	9, 1, 1, 2, 4, 2, 1, 1, 18 etc. 1 11 8 7 4 7 8 11 1
√93	9, 1, 1, 1, 4, 6 4, 1, 1, 1, 18 etc. 1 12 7 11 4 3 4 11 7 12 1
√94	9, 1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18 etc. 1 13 6 5 9 10 3 15 2 15 3 10 9 5 6 13 1
√95	9, 1, 2, 1, 18 etc. 1 14 5 14 1

Numeri ſurdi.	Indices.
$\sqrt{96}$	9, 1, 3, 1, 18 etc. 1 15 4 15 1
$\sqrt{97}$	9, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18 etc. 1 16 3 11 8 9 9 8 11 3 16 1
$\sqrt{98}$	9, 1, 8, 1, 18 etc. 1 17 2 17 1
$\sqrt{99}$	9, 1, 18, 1, 18 etc. 1 18 1 18 1
$\sqrt{101}$	10, 20, 20 etc. 1 1 1
$\sqrt{102}$	10, 10, 20, 10, 20 etc. 1 2 1 2 1
$\sqrt{103}$	10, 6, 1, 2, 1, 1, 9, 1, 1, 2, 1, 6, 20 etc. 1 3 13 6 9 11 2 11 9 6 13 3 1
$\sqrt{104}$	10, 5, 20, 5, 20 etc. 1 4 1 4 1
$\sqrt{105}$	10, 4, 20, 4, 20 etc. 1 5 1 5 1
$\sqrt{106}$	10, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 20 etc. 1 6 7 10 9 9 10 7 6 1
$\sqrt{107}$	10, 2, 1, 9, 1, 2, 20 etc. 1 7 13 2 13 7 1
$\sqrt{108}$	10, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 20 etc. 1 8 9 11 4 11 9 8 1
$\sqrt{109}$	10, 2, 3, 1, 2, 4, 1, 6, 6 1, 4, 2, 1, 3, 2, 20 etc. 1 9 5 12 7 4 15 3 3 15 4 7 12 5 9 1
$\sqrt{110}$	10, 2, 20, 2, 20 etc. 1 10 1 10 1
$\sqrt{111}$	10, 1, 1, 6, 1, 1, 20 etc. 1 11 10 3 10 11 1
$\sqrt{112}$	10, 1, 1, 2, 1, 1, 20 etc. 1 12 9 7 9 12 1
$\sqrt{113}$	10, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 20 etc. 1 13 8 11 7 7 11 8 13 1
$\sqrt{114}$	10, 1, 2, 10, 2, 1, 20 etc. 1 14 7 2 7 14 1

10, 1,
1 15

Numeri ſurdi.	Indices.
$\sqrt{115}$	10, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 20 etc.
	1 15 6 11 9 10 9 11 6 15 1
$\sqrt{116}$	10, 1, 3, 2, 1, 4, 1, 2, 3, 1, 20 etc.
	1 16 5 7 11 4 13 7 5 16 1
$\sqrt{117}$	10, 1, 4, 2, 4, 1, 20 etc.
	1 17 4 9 4 17 1
$\sqrt{118}$	10, 1, 6, 3, 2, 10, 2, 3, 6, 1, 20 etc.
	1 18 3 6 9 2 9 6 3 18 1
$\sqrt{119}$	10, 1, 9, 1, 20 etc.
	1 19 2 19 1
$\sqrt{120}$	10, 1, 20, 1, 20 etc.
	1 20 1 20 1

16. In omnibus his indicum ſeriebus periodi deprehenduntur modo ſtrictiores modo largiores, quae indicibus iis, qui primo duplo ſunt maiores, includuntur, atque hae periodi eo clarius in oculos incidunt, ſi primi indices cuiusque ſerici duplicantur. Deinde in qualibet periodo idem indicum ordo, ſiue antrorſum, ſiue retrorſum, obſeruatur: ex quo in qualibet periodo vel vnus datur index medius, vel duo, prout terminorum numerus fuerit par vel impar. In litteris vero etiam graecis ſimiles periodi obſeruantur, vbi imprimis animaduertendum, pro omnibus indicibus 2 v litteram graecam in vnitatem abire. Hanc proprietatem inſignem, quae in ipſis operationibus facilius perſpicitur, quam verborum ambage demonſtratur, probe notaſſe in ſequentibus plurimum intererit.

17. Ex his autem exemplis formas quasdam generales colligere licet, quae ita ſe habent:

I. Si $z = nn + 1$ erunt indices $\frac{n}{1},\ \frac{2n}{1},\ \frac{2n}{1},\ \frac{2n}{1}$ etc.

II. Si $z = nn + 2$ erunt indices $\frac{n}{1}\ \ \frac{n}{2}\ \ \frac{2n}{1}\ \ \frac{n}{2}\ \ \frac{2n}{1}$ etc.

III. Si $z = nn + n$ erunt indices $\frac{n}{1},\ \frac{2}{n},\ \frac{2n}{1},\ \frac{2}{n},\ \frac{2n}{1}$ etc.

IV. Si $z = nn + 2n - 1$ erunt indices $\frac{n}{1},\ \frac{1}{2n-1},\ \frac{n-1}{2},\ \frac{1}{2n-1}\ \ \frac{2n}{1}$ etc.

V. Si $z = nn + 2n$ erunt indices $\frac{n}{1},\ \frac{1}{2n},\ \frac{2n}{1}\ \ \frac{1}{2n},\ \frac{2n}{1}$ etc.

Ac fractionum quidem continuarum ex his indicibus formatarum valor in genere facile definitur, idemque, quem hic aſſignauimus, deprehenditur. Tum vero etiam patet

VI. Si ſit $z = 4nn + 4$ fore indices $\frac{2n}{1},\ \frac{n}{4},\ \frac{4n}{1},\ \frac{n}{4},\ \frac{4n}{1}$ etc.

VII. Si ſit $z = 9nn + 3$ fore indices $\frac{2n}{1},\ \frac{2n}{3},\ \frac{6n}{1},\ \frac{2n}{3},\ \frac{6n}{1}$ etc.

VIII. Si ſit $z = 9nn + 6$ fore indices $\frac{3n}{1},\ \frac{n}{6},\ \frac{6n}{1}\ \ \frac{n}{6},\ \frac{6n}{1}$ etc.

De reſolutione formulae $p = \sqrt{(lqq + 1)}$ in numeris integris.

18. Inuentis indicibus pro radice quadrata numeri cuiusuis z, ea hoc modo per fractionem continuam exprimitur:

$$\sqrt{z} = v + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}}$$

atque

atque ex his indicibus v, a, b, c, d etc. fractiones $\frac{x}{y}$ formari poſſunt, quae tam prope ad $\sqrt{z}$ accedunt, vt nonniſi maioribus numeris adhibendis, eius valor accuratius exhiberi poſſit. Hae fractiones autem ita formantur:

Indices v, a, b c .... m, n,

$$\frac{x}{y} \qquad \frac{1}{0},\ \frac{v}{1},\ \frac{av+1}{a},\ \frac{(ab+1)v+b}{ab+1}\ \ldots\ \frac{M}{P},\ \frac{N}{Q},\ \frac{nN+M}{nQ+P}$$

quae continuo propius valorem irrationalem $\sqrt{z}$ exprimunt.

19. Nouus autem algorithmus ſuccinctum modum ſuppeditat, has fractiones commode per indices repraeſentandi, quae ita ſe habent:

$$\frac{1}{0},\ \frac{(v)}{1},\ \frac{(v,a)}{(a)},\ \frac{(v,a,b)}{(a,b)},\ \frac{(v,a,b,c)}{(a,b,c)},\ \frac{(v,a,b,c,d)}{(a,b,c,d)}\ \text{etc.}$$

vbi cum ex natura progreſſionis ſit:

$$(v,a)=a(v)+1;\ (v,a,b)=b(v,a)+(v);\ (v,a,b,c)$$
$$=c(v,a,b)+(v,a);$$
$$(a)=a1+10;\ (a,b)=b(a)+1;\ (a,b,c)=c(a,b)+(a);$$

erit etiam ex natura harum formularum:

$$(v,a)=v(a)+1;\ (v,a,b(=v(a,b,)+b;\ (v,a,b,c)$$
$$=v(a,b,c)+(b,c)$$

deinde etiam ſequentes transformationes demonſtraui:

$$(v,a,b,c,d,e)=v(a,b,c,d,e)+(b,c,d,e)$$
$$(v,a,b,c,d,e)=(v,a)(b,c,d,e)+v(c,d,e)$$
$$(v,a,b,c,d,e)=(v,a,b)(c,d,e)+(v,a)(d,e)$$
$$(v,a,b,c,d,e)=(v,a,b,c)(d,e)+(v,a,b)(e)$$

quas probe notaſſe in ſequentibus plurimum iuuabit.

20. Videamus iam, quam prope ſingulae iſtae fractiones ad valorem $\sqrt{z}$ accedant, quod pro inſtituto noſtro luculentiſſime inde patebit, ſi ex quaque fractione $\frac{x}{y}$ valorem $xx-zyy$ colligamus, quippe qui quo minor fuerit prae ipſis numeris x et y, eo exactius fractio $\frac{x}{y}$ valori $\sqrt{z}$ aequabitur. Ac primo quidem ſi $\frac{x}{y}=\frac{1}{0}$, erit $xx-zyy=1$. Deinde ſumto $\frac{x}{y}=\frac{v}{1}$, fit $xx-zyy=vv-z$, quae differentia per operationes ſupra expoſitas (12) prima littera graeca negatiue ſumta $-\alpha$ deſignatur. Porro poſito $\frac{x}{y}=\frac{(v,a)}{(a)}=\frac{va+1}{a}$, colligitur

$$xx-zyy=(vv-z)aa+2va+1=-\alpha aa+2va+1$$

ergo $xx-zyy=1+a(2v-\alpha a)=1+a(A-B)=\beta$

ob $v=A$, et $\alpha a=A+B$.

Quocirca hoc caſu fit $xx-zyy=\beta$.

21. Cum igitur nacti ſimus:

$$vv-z=-\alpha \text{ et } (v,a)^2-z(a)^2=\beta$$

hinc vlterius progredi poterimus. Sit igitur

$$\frac{x}{y}=\frac{(v,a,b)}{(a,b)}=\frac{b(v,a)+v}{b(a)+1}$$

atque adhibitis illis reductionibus obtinebimus

$$xx-zyy=\beta bb+2vb(v,a)-2zb(a)-\alpha$$

ergo ob $(v,a)=v(a)+1$, erit

$$xx-zyy=\beta bb-2\alpha ab+2vb-\alpha=-\alpha-b(2\alpha a-\beta b-2v)$$

at eſt $v=A$, $\alpha a=A+B$ et $\beta b=B+C$

ideoque $xx-zyy=-\alpha-b(B-C)=-\gamma$

ita vt ſit $(v,a,b)^2-z(a,b)^2=-\gamma$.

22. Conſideremus nunc fractionem ſequentem:

$$\frac{x}{y} = \frac{(v,a,b,c)}{(a,b,c)} = \frac{c(v,a,b)+(v,a)}{c(a,b)+a.}$$

ex qua colligitur:

$$xx - zyy = -\gamma cc + 2c(v,a,b)(v,a) + \beta$$
$$- 2zca(a,b)$$

cuius pars media reducitur ad

$$2c(\beta b - \alpha a + v)$$

vnde ob $v = A$, $\alpha a = A + B$; $\beta b = B + C$, $\gamma c = C + D$ reſultat $xx - zyy = \beta + c(C - D) = \delta$ ita vt ſit $(v,a,b,c)^2 - z(a,b,c)^2 = \delta$, vnde per inductionem ſequentes valores facile colliguntur.

23. Ne autem hic inductioni nimium videar tribuiſſe, ſequenti modo haec inueſtigatio inſtitui poteſt:

ſit $(v)^2 - z1^2 = \mathfrak{A}$

$(v,a)^2 - z(a)^2 = \mathfrak{B}$

$(v,a,b)^2 - z(a,b)^2 = \mathfrak{C}$

$(v,a,b,c)^2 - z(a,b,c)^2 = \mathfrak{D}$

$(v,a,b,c,d)^2 - z(a,b,c,d)^2 = \mathfrak{E}$

etc.

vbi quidem iam vidimus eſſe $\mathfrak{A} = -\alpha$, $\mathfrak{B} = \beta$, $\mathfrak{C} = -\gamma$ etc. Cum vero ſit

$(v,a) = a(v) + 1$ $\quad$ $(a) = a$

$(v,a,b) = b(v,a) + (v)$ $\quad$ $(a,b) = b(a) + 1$

$(v,a,b,c) = c(v,a,b) + (v,a)$; $(a,b,c) = c(a,b,) + (a)$

$(v,a,b,c,d) = d(v,a,b,c) + (v,a,b)$; $(a,b,c,d) = d,(a,b,c) + (a,b)$

etc.

 habe-

habebimus:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}aa + 1 + 2a,v$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B}bb + \mathfrak{A} + 2b((v,a)(v) - z(a))$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{C}cc + \mathfrak{B} + 2c((v,a,b)(v,a) - z((a,b)(a))$$

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{D}dd + \mathfrak{C} + 2d((v,a,b,c)(v,a,b) - z(a,b,c)\,a,b))$$

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E}ee + \mathfrak{D} + 2e((v,a,b,c,d)(v,a,b,c) - z(a,b,c,d)(a,b,c))$$

etc.

24. Statuamus iam breuitatis gratia:

$$\mathfrak{B} = 1 + \mathfrak{A}aa + 2a.O$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}bb + 2b.P$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}cc + 2c.Q$$

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{C} + \mathfrak{D}dd + 2d.R$$

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{D} + \mathfrak{E}ee + 2e.S$$

etc.

et ex ſuperioribus reductionibus colligemus:

$$P - O = a(v)^2 - za = \mathfrak{A}a$$

$$Q - P = b(v,a)^2 - zb(a)^2 = \mathfrak{B}b$$

$$R - Q = c(v,a,b)^2 - cz(a,b)^2 = \mathfrak{C}c$$

$$S - R = d(v,a,b,c)^2 - dz(a,b,c)^2 = \mathfrak{D}d$$

etc.

ſicque fiet

$$O = v$$

$$P = v + \mathfrak{A}a$$

$$Q = v + \mathfrak{A}a + \mathfrak{B}b$$

$$R = v + \mathfrak{A}a + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}c$$

$$S = v + \mathfrak{A}a + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}c + \mathfrak{D}d$$

etc.

25. Formulae autem ſupra vſurpatae praebent

$A = v$

$B = -v + \alpha a$

$C = v - \alpha a + \beta b$

$D = -v + \alpha a - \beta b + \gamma c$

$E = v - \alpha a + \beta b - \gamma c + \delta c$

vnde patet eſſe $O = A$ et $P = -B$ ob $\mathfrak{A} = -\alpha$. Cum iam ſit $\mathfrak{B} = 1 - \alpha a a + 2 a v = 1 + a(A - B)$ erit vtique $\mathfrak{B} = \beta$, hincque $Q = C$, ex quo porro colligitur:

$\mathfrak{C} = -\alpha + \beta b b - 2 b B = -\alpha - b(2B\ \beta b) = -\alpha - b(B - C)$

ſicque eſt $\mathfrak{C} = -\gamma$ et $R = -D$; ſimili modo

$\mathfrak{D} = \beta - \gamma c c + 2 c C = \beta + c(2C - \gamma c) = \beta + c(C - D)$

ideoque eſt $\mathfrak{D} = \delta$ et $S = E$. Tum vero porro

$$\mathfrak{E} = -\gamma + \delta d d - 2 d D = -\gamma - d(2D - \delta d)$$
$$= \gamma - d(D - E)$$

ac propterea $\mathfrak{E} = -\varepsilon$, vnde ſuperior inductio ſatis confirmatur.

26. Pro fractionibus ergo $\frac{x}{y}$ formulae radicali $\sqrt{z}$ proxime aequalibus ſequentes adipiſcimur relationes:

Si ſumatur

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ erit $xx = zyy + 1$

$\begin{cases} x = (v) \\ y = 1 \end{cases}$ erit $xx = zyy - \alpha$

$$\begin{cases} x = v,a) \\ y = (a) \end{cases} \text{ erit } xx = zyy + \beta$$

$$\begin{cases} x = (v,a,b) \\ y = (a,b,) \end{cases} \text{ erit } xx = zyy - \gamma$$

$$\begin{cases} x = (v,a,b,c) \\ y = (a,b,c) \end{cases} \text{ erit } xx = zyy + \delta$$

$$\begin{cases} x = (v,a,b,c,d) \\ y = (a,b,c,d) \end{cases} \text{ erit } xx = zyy - \varepsilon$$

etc.

vnde problema *Pellianum* ſoluetur, quoties litterarum graecarum per ſaltum excerptarum β, δ, ζ etc. quaepiam in vnitatem abit.

27. Vidimus autem ſupra, nonniſi iis indicibus, qui ſunt $2v$, reſpondere litteram graecam in vnitatem abeuntem; cum igitur quaelibet periodorum, quas in indicum ordine obſeruauimus, indice $2v$ inchoetur, perſpicuum eſt, ſi numeros x et y per indices primae periodi definiamus, fore vel $xx = zyy - 1$, vel $xx = zyy + 1$; ac prius quidem euenit, ſi indicum ſingulas periodos conſtituentium numerus fuerit impar, poſterius vero ſi is fuerit par. Hoc igitur caſu ſtatim habetur ſolutio problematis *Pelliani*, quo requiritur, vt ſit $pp = zqq + 1$, quandoquidem capi oportet $p = x$ et $q = y$.

28. At ſi ex prima periodo prodeat $xx = zyy - 1$, quod euenit ſi indicum numerus eſt impar, tum indices vsque ad initium tertiae periodi ad definiendos nume-

numeros x et y capi poſſent, quorum numerus cum ſit par, hoc modo idonei numeri pro p et q obtinerentur. Verum caſu inuento, quo fit $xx=zyy-1$, multo facilius inde numeri p et q reperiri poſſunt, vt ſit: $pp=zqq+1$. Sumatur enim $p=2xx+1$ et $q=2xy$, eritque $pp-zqq=4x^4+4xx+1$ $-4zxxyy=1+4xx(xx-zyy+1)$, at $xx-zyy+1=0$, ideoque $pp-zqq=1$ ſeu $pp=zqq+1$, quemadmodum problema *Pellianum* poſtulat. Videamus igitur, quomodo pro quouis numero z ex indicibus inde natis numeri p et q ſint definiendi, vt fiat $pp=zqq+1$, vbi quidem caſus ſecundum periodos percurramus.

I. Caſus, quo pro numero z indices ſunt v, $2v$, $2v$, etc.

29. Hic ſingulae periodi vnicum indicem continent, ſumto ergo $x=(v)$ et $y=1$, er t $xx=zyy-1$. Quamobrem, vt fiat $pp=zqq+1$, capiatur:

$$p=2xx+1=2vv+1 \text{ et } q=2xy=2v.$$

Hic caſus, vt ſupra vidimus, locum habet, ſi ſit $z=vv+1$, ſeu quo numerus z vnitate ſuperat quadratum; tum igitur capi debet $p=2vv+1$ ſeu $p=2z-1$ et $q=2v$, quo pacto problemati *Pelliano* ſatisfit, vt ſit $p=\sqrt{(zqq+1)}$. Ita ſi ſit

$z=2$ erit $p=3$ et $q=2$ ſicque $p=\sqrt{(2qq+1)}$
ſi $z=5$ erit $p=9$ et $q=4$ ſicque $p=\sqrt{(5qq+1)}$
ſi $z=10$ erit $p=19$ et $q=6$ ſicque $p=\sqrt{(10qq+1)}$
ſi $z=17$ erit $p=33$ et $q=8$ ſicque $p=\sqrt{(17qq+1)}$
etc.

 II.

II. Caſus, quo pro numero z indices ſunt $v, a, 2v, a, 2v$ etc.

30. Prima periodus conſtat binis numeris v, a, vnde ſumtis $x = (v, a) = va + 1$ et $y = (a) = a$, habebitur $xx = zyy + 1$. Vt igitur pro problemate *Pelliano* fiat $pp = zqq + 1$, capi oportet:

$$p = va + 1 \text{ et } q = a.$$

Ex indicibus autem patet, hunc caſum locum habere, quoties fuerit numerus $z = vv + \frac{2v}{a}$, vnde intelligitur, hunc caſum in integris, de quibus hic agitur, exiſtere non poſſe, niſi ſit a diuiſor ipſius $2v$, vbi duo caſus ſunt conſiderandi:

1. ſi $a = 2n$, erit $v = mn$ et $\frac{2v}{a} = m$
2. ſi $a = 2n + 1$, erit $v = m(2n + 1)$ et $\frac{2v}{a} = 2m$.

III. Caſus, quo pro numero z indices ſunt $v, a, a, 2v, a, a, 2v$ etc.

31. Ex prima periodo, ſumtis numeris x et y, ita vt ſit $x = (v, a, a)$ et $y = (a, a)$, erit $xx = zyy - 1$; vnde vt fiat $pp = zqq + 1$, ſumi debet

$$p = 2xx + 1 \text{ et } q = 2xy.$$

Hic vero eſt $y = aa + 1$, et $x = vy + a$, vnde numeri p et q facillime definiuntur. Ex indicibus autem numerus z eiusmodi habebit formam:

$$z = vv + u, \text{ exiſtente } u = \frac{2av + 1}{aa + 1}$$

vnde

vnde patet numerum a eſſe debere parem. Si ergo ſtatuatur $a = 2n$, neceſſe eſt ſit

$$v = n + m(4nn + 1) \text{ tumque fit } u = 1 + 4mn$$

IV. Caſus, quo pro numero z indices ſunt $v, a, b, a, 2v, a, b, a, 2v$ etc.

32. Quia numerus indicum in quaque periodo eſt par, ſi ſumatur:

$$x = (v, a, b, a) \text{ et } y = (a, b, a)$$

erit $xx = zyy + 1$, ideoque $p = x$ et $q = y$.
Per transformationes autem ſupra oſtenſas duplicatio indicum tolli poteſt hoc modo:

$$x = (a)(v, a, b) + (v, a) \text{ et } y = (a)(a, b) + (a).$$

Hinc ſi ex indicibus v, a, b ſequentes fractiones formentur:

indic. v, a, b

fract. $\frac{1}{0}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$, $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{c}}$

ob $\mathfrak{A} = (v)$, $\mathfrak{B} = (v, a)$, $\mathfrak{C} = (v, a, b)$

et $\mathfrak{a} = 1$, $\mathfrak{b} = (a)$, $\mathfrak{c} = (a, b)$

erit $x = \mathfrak{b}\mathfrak{C} + \mathfrak{a}\mathfrak{B}$ et $y = \mathfrak{b}\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.
Ex indicibus autem fit $z = vv + u$, exiſtente

$$2v = m(a, b, a) - b(a, b)$$

et $u = m(a, b) - b(b)$

V. Caſus, quo pro numero z indices ſunt $v, a, b, b, a, 2v$ etc.

33. Ob indicum cuiusque periodi numerum imparem, ſi capiamus

$$x=(v,a,b,b,a,)\text{ et }y=(a,b,b,a)$$

erit $xx=zyy-1$; hinc pro problemate *Pelliano*, vt fiat $pp=zqq+1$, ſtatui oportet:

$$p=2xx+1\text{ et }q=2xy.$$

Quo autem numeri x et y facilius inueniri queant, ſequentes transformationes inſtituantur:

$$x=(a,b)(v,a,b)+(a)(v,a)\text{ et}$$
$$y=(a,b)\ (a,b)\ +(a)(a)$$

qui ergo per ſolos indices v, a, b fractionibus inde formandis difinientur:

Ind. v, a, b

Fract. $\frac{1}{0}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$, $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{c}}$

vbi $\mathfrak{A}=v$, $\mathfrak{B}=a\mathfrak{A}+1$; $\mathfrak{C}=b\mathfrak{B}+\mathfrak{A}$

et $\mathfrak{a}=1$, $\mathfrak{b}=a\mathfrak{a}+0$; $\mathfrak{c}=b\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$

tum enim capi oportet

$$x=\mathfrak{c}\mathfrak{C}+\mathfrak{b}\mathfrak{B}\text{ et }y=\mathfrak{c}\mathfrak{c}+\mathfrak{b}\mathfrak{b}.$$

Hic autem caſus locum habet, quoties poſito $z=vv+u$ fuerit

$$2v=m(a,b,b,a)+(b,b)(a,b,b)\text{ et}$$
$$u=m(a,b,b)+(b,b)(b,b)$$

VI. Caſus, quo pro numero z indices ſunt v, a, b, c, b, a, $2v$ etc.

34. Quoniam hic numerus indicum in qualibet periodo eſt par, ſi ſumamus

$$x=(v,a,b,c,b,a)\text{ et }y=(a,b,c,b,a)$$

erit

erit $xx = zyy + 1$, ideoque pro *Pelliano* problemate ſtatim habetur $p = x$ et $q = y$. Facilius autem numeri x et y his transformationibus adhibitis inuenientur:

$$x = (a,b)(v,a,b,c) + (a)(v,a,b) \text{ et}$$

$$y = (a,b)(a,b,c) + (a)(a,b)$$

vnde ſi ex indicibus, v, a, b, c, more expoſito, fractiones formentur:

Ind. v, a, b, c

Fract. $\frac{1}{0}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$, $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{c}}$, $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{d}}$

ſumi oportet

$$x = \mathfrak{c}\mathfrak{D} + \mathfrak{b}\mathfrak{C} \text{ et } y = \mathfrak{c}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

At hic caſus locum habet, quoties poſito $z = vv + u$ fuerit

$$2v = m(a,b,c,b,a) - (b,c,b)(a,b,e,b) \text{ et}$$

$$u = m(a,b,c,b) - (b,c,b)(b,c,b)$$

VII. Caſus, quo pro numero z indices ſunt v, a, b, c, c, b, a, $2v$ etc.

35. Hic iterum indicum numerus in qualibet periodo eſt impar, ideoque ſi ponamus

$$x = (v,a,b,c,c,b,a) \text{ et}$$

$$y = (a,b,c,c,b,a)$$

erit $xx = zyy - 1$, ex quo vt fiat $pp = zqq + 1$, ſumi oportet $p = 2xx + 1$, et $q = 2xy$.

Pro faciliori autem numerorum x et y inuentione ex indicibus v, a, b, c formentur fractiones:

Ind. v, a, b, c

Fract. $\frac{1}{0}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$, $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{c}}$, $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{d}}$

hincque erit

$$x = \mathfrak{d}\mathfrak{D} + \mathfrak{c}\mathfrak{C} \text{ et } y = \mathfrak{d}\mathfrak{d} + \mathfrak{c}\mathfrak{c}.$$

At hic caſus locum habebit, quoties poſito $z = vv + u$ fuerit:

$$2v = m(a,b,c,c,b,a) + (b,c,c,b)(a,b,c,c,b) \text{ et}$$
$$u = m(a,b,c,c,b) + (b,c,c,b)(b,c,c,b)$$

VIII. Caſus, quo pro numero z indices ſunt $v, a, b, c, d, c, b, a, 2v$.

36. Hic quaelibet periodus octo continet indices, ideoque ſi ponamus:

$$x = (v,a,b,c,d,c,b,a) \text{ et}$$
$$y = (a,b,c,d,c,b,a)$$

erit $xx = zyy + 1$, et problemate *Pelliano* capi oportet $p = x$, et $q = y$, vt fiat $pp = zqq + 1$. Transformationibus autem adhibitis, numeros x et y per ſolos indices v, a, b, c, d definire licet. Formatis enim inde fractionibus:

Ind. v, a, b, c, d

Fract. $\frac{1}{0}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{b}}$, $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{c}}$, $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{d}}$, $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{e}}$

fiet: $x = \mathfrak{d}\mathfrak{E} + \mathfrak{c}\mathfrak{D}$, et $y = \mathfrak{d}\mathfrak{e} + \mathfrak{c}\mathfrak{d}$.

Hic vero caſus locum habet, quoties poſito $z = vv + u$ fuerit:

$$2v = m(a,b,c,d,c,b,a) - (b,c,d,c,b)(a,b,c,d,c,b)$$
et $u = m(a,b,c,d,c,b) - (b,c,d,c,b)(b,c,d,c,b)$.

Ex-

Expoſitio calculi pro quolibet numero z, vt fiat $pp = zqq + 1$.

37. Primum igitur methodo ſupra expoſita pro numero z, ex eius radice quadrata indices inveſtigari oportet, quam operationem autem vlterius continuari non eſt opus, quam donec indices ordine retrogrado prodire incipiant, quo pacto ſemiſſi laboris ſupra explicati ſuperſedere poterimus. Cum autem in prima periodo vel vnus index medius occurrat, vel bini, hi caſus probe ſunt diſtinguendi, cum ſi vnicus medius affuerit, inuentio numerorum p et q modo in caſibus II, IV, VI et VIII tradito inſtitui debeat: ſin autem bini fuerint medii, ec modo, qui in caſibus I, III, V et VII eſt deſcriptus. Scilicet ſi prius eueniat, numeri p et q numeris x et y aequales ſumuntur, ſin autem poſterius, vti vidimus, ſtatui oportet $p = 2xx + 1$, et $q = 2xy$, ita vt his caſibus numeri p et q caeteris paribus multo grandiores reperiantur.

38. En igitur exempla prioris generis, quo in qualibet periodo vnus datur index medius:

I. Si $z = 6$, ſunt indices 2, 2, 4, hinc operatio

$$\begin{matrix} & 2 & 2 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{x}{y} = \frac{1.5 + 0.2}{1.2 + 0.1} \text{ ergo } \frac{p}{q} = \frac{5}{2} \end{matrix}$$

II. Si $z = 14$, ſunt indices 3, 1, 2, 1, 6

$$\begin{matrix} & 3 & 1 & 2 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{3}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{11}{3}; & \frac{x}{y} = \frac{1.11 + 1.4}{1.3 + 1.1} \text{ ergo } \frac{p}{q} = \frac{15}{4} \end{matrix}$$

III. Si $z = 19$, ſunt indices $4, 2, 1, 3, 1, 2, 8$

$4 \quad 2 \quad 1 \quad 3$

$\frac{1}{0}, \frac{4}{1}, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{48}{11};\ \begin{matrix} x = 3.48 + 2.13 \\ y = 3.11 + 2.3 \end{matrix}$ ergo $\begin{matrix} p = 170 \\ q = 39 \end{matrix}$

IV. Si $z = 31$, ſunt indices $5, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10$

$5 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 5$

$\frac{1}{0}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{11}{2}, \frac{39}{7}, \frac{206}{37}$

hinc $\begin{matrix} x = 7.206 + 2.39 \\ y = 7.\ 37 + 2.\ 7 \end{matrix}$ ergo $\begin{matrix} p = 1520 \\ q = 273 \end{matrix}$

V. Si $z = 44$, ſunt indices $6, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 12$

$6 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2$

$\frac{1}{0}, \frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{13}{2}, \frac{20}{3}, \frac{53}{8}$

hinc $\begin{matrix} x = 3.53 + 2.20 \\ y = 3.\ 8 + 2.\ 3 \end{matrix}$ ergo $\begin{matrix} p = 199 \\ q = 30 \end{matrix}$

VI. Si $z = 55$, ſunt indices $7, 2, 2, 2, 14$

$7 \quad 2 \quad 2$

$\frac{1}{0}, \frac{7}{1}, \frac{15}{2}, \frac{37}{5}$

hinc $\begin{matrix} x = 2.37 + 1.15 \\ y = 2.\ 5 + 1.\ 2 \end{matrix}$ ergo $\begin{matrix} p = 89 \\ q = 12 \end{matrix}$

39. Alterius vero generis, quo bini dantur indices medii in qualibet periodo, haec adiungo exempla.

I. Si $z = 13$, ſunt indices $3, 1, 1, 1, 1, 6$

$3 \quad 1 \quad 1$

$\frac{1}{0}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{7}{2}$ hinc $\begin{matrix} x = 2.7 + 1.4 = 18 \\ y = 2.2 + 1.1 = 5. \end{matrix}$

Ergo $p = 2xx + 1 = 649$
$q = 2xy \qquad = 180$

II.

II. Si $z=29$, ſunt indices $5, 2, 1, 1, 2, 10$

$$\begin{matrix} & 5 & 2 & 1 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{5}{1}, & \frac{11}{2}, & \frac{16}{3} \end{matrix} \text{ hinc } \begin{matrix} x = 3.16 + 2.11 = 70 \\ y = 3.\ 3 + 2.\ 2 = 13. \end{matrix}$$

Ergo $p = 2xx + 1 = 9801$

$q = 2xy \quad = 1820$

III. Si $z=58$, ſunt indices $7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 14$

$$\begin{matrix} & 7 & 1 & 1 & 1 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{7}{1}, & \frac{8}{1}, & \frac{15}{2}, & \frac{23}{3} \end{matrix} \text{ hinc } \begin{matrix} x = 3.23 + 2.15 = 99 \\ y = 3.\ 3 + 2.\ 2 = 13. \end{matrix}$$

Ergo $p = 2xx + 1 = 19603$

$q = 2xy \quad = 2574$

IV. Si $z=61$, indices ſunt $7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14$

$$\begin{matrix} & 7 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{7}{1}, & \frac{8}{1}, & \frac{39}{5}, & \frac{125}{16}, & \frac{164}{21}, & \frac{453}{58} \end{matrix}$$

hinc fit $x = 58.453 + 21.164 = 29718$

$y = 58.\ 58 + 21.\ 21 = 3805.$

Ergo $p = 2xx + 1 = 1766319049$

$q = 2xy \quad = 226153980.$

40. Quodſi pro maioribus numeris z, quam ante ſunt euoluti, quaeri debeant numeri p et q, vt ſit $pp = zqq + 1$, primum methodo ſupra expoſita (§. 12.) indices v, a, b, c, d etc. quaeri oportet, quos autem vlterius continuari non eſt opus, quam donec ad indicem medium, vel binos medios, primae periodi perueniatur; tum vero ex iis per

operationes hic deſcriptas primo numeri x et y, tum vero ipſi quaeſiti p et q determinabuntur. Id quod aliquibus exemplis illuſtrari conueniet.

I. Quaerantur numeri p et q, vt ſit $pp = 157qq + 1$.

41. Cum hic ſit $z = 157$, erit $v = 12$, et $\alpha = 13$, vnde indicum inuentio ita ſe habebit:

$A = 12$,	$\alpha = 13$,	$a = 1$	
$B = 1$,	$\beta = 12$,	$b = 1$	
$C = 11$,	$\gamma = 3$,	$c = 7$	
$D = 10$,	$\delta = 19$,	$d = 1$	
$E = 9$,	$\varepsilon = 4$,	$e = 5$	
$F = 11$,	$\zeta = 9$,	$f = 2$	
$G = 7$,	$\eta = 12$,	$g = 1$	
$H = 5$,	$\theta = 11$,	$h = 1$	medii.
$I = 6$,	$\iota = 11$,	$i = 1$	

Hinc ob binos medios exemplum ad genus ſecundum pertinet, et operationes ita ſunt inſtituendae:

	12	1	1	7	1	5	2	1	1
$\frac{1}{0}$,	$\frac{12}{1}$,	$\frac{13}{1}$,	$\frac{25}{2}$,	$\frac{188}{15}$,	$\frac{213}{17}$,	$\frac{1253}{100}$,	$\frac{2719}{217}$,	$\frac{3972}{317}$,	$\frac{6691}{534}$

Hinc erit $x = 534 . 6691 + 317 . 3972 = 4832118$

et $y = 534 . 534 + 317 . 317 = 385645$.

Quocirca $p = 2xx + 1 = 46698728731849$

et $q = 2xy \quad = 3726964292220$

atque hi adeo ſunt minimi numeri integri formulae $p = \sqrt{(157qq + 1)}$ ſatisfacientes.

II.

II. Quaerantur numeri p et q, vt ſit $$pp = 367qq + 1.$$

42. Hic ergo eſt $z = 367$, $v = 19$, hincque

$A = 19$, $\alpha = 6$, $a = 6$
$B = 17$, $\beta = 13$, $b = 2$
$C = 9$, $\gamma = 22$, $c = 1$
$D = 13$, $\delta = 9$, $d = 9$
$E = 14$, $\varepsilon = 19$, $e = 1$
$F = 5$, $\zeta = 18$, $f = 1$
$G = 13$, $\eta = 11$, $g = 2$
$H = 9$, $\theta = 26$, $h = 1$
$I = 17$, $\iota = 3$, $i = 12$
$K = 19$, $\varkappa = 2$, $k = 19$ medius
$L = 19$, $\lambda = 3$, $l = 12$

hoc ergo exemplum ad genus primum pertinet,

$$\begin{array}{cccccccc} 19 & 6 & 2 & 1 & 9 & 1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{19}{1}, & \frac{115}{6}, & \frac{249}{13}, & \frac{364}{19}, & \frac{3525}{184}, & \frac{3889}{203}, & \frac{7414}{387} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 12 & 19 & \\ \frac{18717}{977}, & \frac{26131}{1364}, & \frac{332289}{17345}, & \frac{6339625}{320919}. \end{array}$$

Hinc erit $x = 17345.6339622 + 1364.332289$
et $y = 17345.330919 + 1364.17345.$
ex quo minimi numeri ſatisfacientes ſunt:

$p = 110413985786$
$q = 5763448635.$

Tabula

Tabula numerorum p *et* q, *quibus fit* $pp = lqq + 1$ *pro omnibus valoribus numeri* l *vsque ad* 100.

l	*q*	*p*	*l*	*q*	*p*
2	2	3	30	2	11
3	1	2	31	273	1520
5	4	9	32	3	17
6	2	5	33	4	23
7	3	8	34	6	35
8	1	3	35	1	6
10	6	19	37	12	73
11	3	10	38	6	37
12	2	7	39	4	25
13	180	649	40	3	19
14	4	15	41	320	2049
15	1	4	42	2	13
17	8	33	43	531	3482
18	4	17	44	30	199
19	39	170	45	24	161
20	2	9	46	3588	24335
21	12	55	47	7	48
22	42	197	48	1	7
23	5	24	50	14	99
24	1	5	51	7	50
26	10	51	52	90	649
27	5	26	53	9100	33125
28	24	127	54	66	485
29	1820	9801	55	12	89

l	q	p	l	q	p
56	2	15	78	6	53
57	20	151	79	9	80
58	2574	19603	80	1	9
59	69	530	82	18	163
60	4	31	83	9	32
61	226153980	1766319049	84	6	55
62	8	63	85	30906	285769
63	1	8	86	1122	10405
65	16	129	87	3	28
66	8	65	88	21	197
67	5967	48842	89	53000	500901
68	4	33	90	2	19
69	936	7775	91	165	1574
70	30	251	92	120	1151
71	413	3480	93	1260	12151
72	2	17	94	221064	2143295
73	267000	2281249	95	4	39
74	430	3699	96	5	49
75	3	26	97	6377352	62809633
76	6630	57799	98	10	99
77	40	351	99	1	10

Exempla denique quaedam numerorum maiorum pro l aſſumtorum adiungam:

ſi erit

$$l=103 \begin{cases} p=227528 \\ q=22419 \end{cases}$$

ſi erit

$$l=109\begin{cases}p=15807067198624 9\\ q=\ 1514042445510 0\end{cases}$$

$$l=113\begin{cases}p=1204353\\ q=\ 113296\end{cases}$$

$$l=157\begin{cases}p=46698728731849\\ q=\ 3726964292220\end{cases}$$

$$l=367\begin{cases}p=110413985786\\ q=\ 5763448635.\end{cases}$$

PROPRIE-

PROPRIETATES TRIANGVLORVM, QVORVM ANGVLI CERTAM INTER SE TENENT RATIONEM.

Auctore

L. EVLERO.

Inter veritates geometricas eae potiſſimum attentione ſunt dignae, quarum demonſtratio ita eſt recondita, vt analyticae inueſtigationi vix vllus locus relinqui videatur. Quae enim ita ſunt comparatae, vt formula analytica facile comprehendi queant, omnino ſuperfluum foret, memoriam earum recordatione fatigare: ad quod genus plurimae ſectionum conicarum proprietates ſunt referendae, quarum plerumque ingens multitudo vnica formula analytica includi poteſt. Elementares autem figurarum proprietates eo maiori cura memoriae ſunt mandandae, quod analyſis ad eas non perducat, ſed iis potius ad altiora tendens ſuperſtrui debeat. Neſcio, an proprietates triangulorum, quas hic euoluere conſtitui, elementaribus ſint annumerandae, nec ne? Si enim ad earum demonſtrationes geometricas ſpectemus, eae ita fiunt intricatae, vt in elementis locum vix inuenire queant: tum vero etiam, quod hic imprimis eſt obſeruandum, ne analyſis quidem ſatis videtur idonea, ad earum veritatem ſtabiliendam;

dam; quamobrem hanc ſpeculationem attentioni geometrarum commendare non dubito.

Occaſionem autem, haec perſcrutandi, mihi praebuit prima quaſi triangulorum proprietas elementaris, qua nouimus, ſi duo anguli fuerint inter ſe aequales, etiam duo latera, ipſis ſcilicet oppoſita, inter ſe aequalia eſſe futura. Quemadmodum ergo hoc caſu ex data angulorum conditione certa relatio laterum ſequitur, ita generatim affirmare licet, quoties in triangulo certa quaedam ratio inter duos angulos datur, inde neceſſario quoque certam quandam relationem inter latera determinari. Ex quo haec naſcitur quaeſtio: *Si in triangulo, cuius anguli ſint* α, β, γ, *latera iis oppoſita litteris* a, b, c *deſignentur, haecque conditio detur, vt ſit* $\alpha:\beta = m:n$: *relationem inter latera* a, b, c *inde ortam inueſtigare?* Problema hoc ſtatim ac ratio data $m:n$ tantillum aſſumitur complicata, analytice tractatum in taedioſiſſimos calculos praecipitare tentanti mox patebit: ſin autem a caſu ſimpliciſſimo, quo $\beta = \alpha$, et $b - a = 0$, incipientes, continuo ad magis compoſitos ordine progrediamur, egregiam tandem progreſſionis legem obſeruare licebit, quae eo magis eſt notatu digna, quod per ſolam inductionem ſit inuenta, vixque demonſtrationem admittere videatur.

Problema 1.

Tab. I. Fig. 2. 1. Si in triangulo ABC fuerit ang. B = 2 ang. A, inter eius latera AB = c, AC = b et BC = a relationem inde oriundam inueſtigare.

Solutio.

Solutio.

Angulo B per rectam BD biſecto, erit triangulum ADB iſoſceles, et triangulum BCD toti ACB ſimile,
vnde fit AC:BC=AB:BD=BC:CD,

ſeu $b : a = c : \frac{ac}{b} = a : \frac{aa}{b}$.

Ergo BD$=\frac{ac}{b}$ et CD$=\frac{aa}{b}$; hinc AD$=b-\frac{aa}{b}$.
At ob BD=AD habebimus $ac=bb-aa$, qua ergo aequatione continetur relatio quaeſita inter latera trianguli, quae eſt vel (AC+BC)(AC-BC)=AB.BC vel AC²=BC(AB+BC).

Coroll. 1.

2. Vltima aequatio facilem hanc ſuppeditat demonſtrationem formulae inuentae; producto enim latere AB in C, vt ſit BE=BC, erit angulus E ſemiſſis ipſius ABC, ideoque ipſi A aequalis, vnde triangula iſoſcelia ACE et CBE erunt ſimilia; hinc AE:AC=CE:BC, ſeu AB+BC:AC=AC:BC.

Coroll. 2.

3. Viciſſim ergo, quoties inter latera trianguli ABC haec relatio deprehenditur, vt ſit AC²=BC.(AB+BC) ſeu $bb=aa+ac$, toties concludi oportet, angulum ABC eſſe duplum anguli BAC.

Scholion.

4. Haec inuerſa propoſitio, etſi eius veritas ex praecedente neceſſario ſequitur, tamen non ita facile geometrice demonſtratur. Si ſcilicet fuerit $AC^2 = AB.BC + BC^2$, oſtendendum eſt, fore angulum A ſemiſſem anguli ABC. Hunc in finem demiſſo ex C in AB perpendiculo CP, ex elementis conſtat, eſſe $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BP$; cum igitur ſit $AC^2 = AB.BC + BC^2$, erit BC^2 vtrinque auferendo $AB^2 - 2AB.BP = AB.BC$, et per AB dividendo $AB - 2BP = BC$. Capiatur $PQ = BP$, vt ſit $CQ = BC$, eritque $AQ = BC$ ſeu $AQ = CQ$, vnde angulus BQC, cui aequalis eſt ABC, duplus eſt anguli A, quae eſt demonſtratio propoſitionis inverſae.

Problema 2.

Tab. I. fig. 3. 5. Si in triangulo ABC angulus ABC fuerit triplus anguli A, relationem, quae hinc in latera trianguli redundat, $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ definire.

Solutio.

Ex angulo B recta Bc ita ducatur, vt angulus CBc aequalis ſit angulo A, ideoque angulus ABc eius duplus, ſicque triangulum ABc ad caſum praecedentis problematis pertineat. At triangulum BCc ſimile eſt triangulo ACB, vnde fit

$$AC:BC = AB:Bc = BC:Cc$$

$$b : a = c : \tfrac{ac}{b} = a : \tfrac{aa}{b}.$$

Ergo

Ergo $Bc = \frac{ac}{b}$, et $Cc = \frac{aa}{b}$, hincque $Ac = \frac{bb-aa}{b}$.
Iam in triangulo ABc ad analogiam ponantur latera

$$AB = \gamma,\ Ac = \beta,\ \text{et}\ Bc = \alpha$$

et ex problemate praecedente habetur pro hoc triangulo iſta proprietas:

$$\beta\beta - \alpha\alpha - \alpha\gamma = 0.$$

Ex modo inuentis autem nouimus eſſe

$$\gamma = c;\ \beta = \frac{bb-aa}{b};\ \text{et}\ \alpha = \frac{ac}{b}$$

qui valores in illa aequatione ſubſtituti praebent:

$$\frac{(bb-aa)^2}{bb} - \frac{aacc}{bb} - \frac{acc}{b} = 0,\ \text{ſiue}$$

$$(bb-aa)^2 - acc(a+b) = 0$$

quae aequatio per $a+b$ diuiſa abit in hanc:

$$(bb-aa)(b-a) - acc = 0$$

qua character indolis propoſitae continetur, quod angulus ABC ſit triplus anguli A.

Coroll. 1.

6. Quando ergo in triangulo ABC angulus ad B triplus eſt anguli A, tum inter eius latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ haec datur relatio, vt ſit $(bb-aa)(b-a) - acc = 0$, ſeu $(b-a)^2(b+a) - acc = 0$, quae euoluta fit

$$b^3 - abb - aab + a^3 - acc = 0.$$

Coroll. 2.

Coroll. 2.

7. Ad hanc proprietatem geometrice enunciandam centro C radio $CB = a$ deſcribatur circulus, latus AC productum ſecans in D et E, latus vero AB in F. Iam cum ſit $AD = b + a$, et $AE = b - a$, erit $AD.AE^2 = BC.AB^2$. Ex elementis vero eſt $AE.AD = AF.AB$, vnde ſit $AE.AF = BC.AB$, ideoque $AE:CE = AB:AF$, quam proportionem geometrice demonſtrari oportet.

Coroll. 3.

8. In eadem figura cum ſit angulus CFB $= ABC = 3A$, erit angulus $ACF = 2A$, et $BCD = ABC + A = 4A$, vnde arcus BD eſt duplus arcus EF. Ducta ergo recta BE, erit ang. EBF $= \frac{1}{2} ECF = A$, ideoque $BE = AE$. Simili modo ducta recta DF, angulus ADF quoque aequatur angulo A, ex quo ſit $DF = AF$.

Coroll. 4.

9. Hinc analogia ante inuenta $AE:CE = AB:AF$ abit in iſtam $BE:CE = AB:DF = DF + BF:DF$ ſeu $BE.DF = CE.AB = BC(BF + DF)$. Quae proprietas geometrice ita oſtenditur: Sumto arcu $EG = EF$, ductisque AG et BG, erit $AG = AF$ et $BG = DF$, ob arcum $FG = BD$, ideoque BFG $= BDF$ et $AG = BG$, ob $AF = DF$. Nunc vero ambo triangula iſoſcelia AGB et BCE ſunt ſimilia, quia ang. $CEB = 2A = BAG$; vnde ſequitur:

AB:

$AB : AG = BE : CE$, ſeu $AB : AF = AE : BC$, vel $BC.AB = AE.AF$, quae eſt proprietas ſupra eruta.

Scholion.

10. Inuenta ergo proprietas concinnius hoc modo geometrice demonſtrabitur:

Centro C radioque CB deſcripto circulo latus AC in D et E, latus vero AB in F ſecante, ductisque BE et CF, ob angulum $CFB = CBF = 3A$, erit angulus $CEB = 2A = CBE$, et quia angulus $ABE = A$, erit $BE = AE$. Tum ſumto arcu $EG = EF$, ductisque AG et BG, erit vtique $AG = AF$, et tam $BAG = 2A$, quam $ABG = 2A$, ideoque $BG = AG = AF$. Simile ergo erit triangulum AGB triangulo BEC, vnde fit $AB : AG = BE : BC$, et quia $AG = AF$, et $BE = AE$, erit $AB : AF = AE : BC$. Ex elementis vero eſt $AF : AE = AD : AB$, vnde fit componendo

$AB : AE = AE.AD : BC.AB$, ſeu $AE^2.AD = BC.AB^2$ quae aequatio dat $(AC - BC)^2 (AC + BC) = BC.AB^2$, quae eſt proprietas ſupra inuenta, et nunc geometrice demonſtrata.

Problema 3.

11. Si in triangulo ABC angulus ABC fuerit quadruplus anguli A, inter eius latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, relationem illa conditione determinatam inueſtigare. Tab. I. Fig. 4.

 Solutio.

Solutio.

Ex angulo quadruplo B ducatur recta Bc abſcindens angulum $CBc = A$, vt in triangulo ABc angulus ad B triplus ſit anguli A, hocque triangulum ad caſum problematis praecedentis pertineat. Triangulum autem BCc ſimile erit triangulo ACB, vnde colligitur vt ante:

$$Bc = \frac{ac}{b}.\ Cc = \frac{aa}{b},\ \text{hincque}\ Bc = \frac{bb-aa}{b}.$$

Ponantur iam pro triangulo ABc latera $AB = \gamma$, $Ac = \beta$ et $Bc = \alpha$, et inter haec latera per problema praecedens haec relatio intercedet, vt ſit:

$$\beta^3 - \alpha\beta\beta - \alpha\alpha\beta - \alpha(\gamma\gamma - \alpha\alpha) = 0.$$

Hic igitur loco α, β, γ valores illi $\frac{ac}{b}$, $\frac{bb-aa}{b}$ et c ſubſtituantur, ſeu ad fractiones tollendas, quia ibi dimenſionum numerus vbique eſt idem, hi valores per b multiplicati, quaſi eſſet $\alpha = ac$, $\beta = bb - aa$ et $\gamma = bc$, ſcribantur; ſicque exorietur haec aequatio:

$$(bb-aa)^3\ ac(bb-aa)^2 - aacc(bb-aa) - ac^3(bb-aa = 0$$

quae cum manifeſto diuiſorem habeat $bb - aa$, erit aequatio relationem quaeſitam exprimens:

$$(bb-aa)^2 - ac(bb-aa) - aacc - ac^3 = 0.$$

Coroll.

12. Aequatio haec euoluta, et ſecundum poteſtates ipſius b diſpoſita, abit in hanc formam:

$$b^4 - a(2a+c)bb - a(ac-aa)(a+c) = 0$$

qua deinceps erit vtendum.

Pro-

Problema 4.

13. Si in triangulo ABC angulus ABC fuerit quintuplus anguli A, inter eius latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ relationem iſta conditione determinatam inueſtigare.

Solutio.

Ducta iterum recta Bc, angulum CBc ipſi A aequalem abſcindente, vt triangulum BCc toti ACB ſimile fiat, triangulum vero ABc ad caſum praecedentem ſit referendum, pro quo ſi ponamus latera $AB = \gamma$, $Ac = \beta$ et $Bc = \alpha$, erit vti modo inuenimus:

$$\beta^4 - \alpha(2\alpha + \gamma)\beta\beta - \alpha(\gamma\gamma - \alpha\alpha)(\alpha + \gamma) = 0$$

At vero hic, vti ante oſtendimus, has ſubſtitutiones fieri oportet: $\alpha = ac$, $\beta = bb - aa$, et $\gamma = bc$, vnde oritur haec aequatio:

$$(bb - aa)^4 - acc(2a + b)(bb - aa)^2 - ac^4(bb - aa)(a + b) = 0$$

quae diuiſa per $(bb - aa)(b + a)$ induit hanc formam:

$$(bb - aa)^2(b - a) - acc(2a + b)(b - a) - ac^4 = 0$$

et facta euolutione prodit

$$b^5 - ab^4 - 2aab^3 - a(cc - 2aa)bb - aa(cc - aa)b - a(cc - aa)^2 = 0.$$

Problema 5.

14. Si in triangulo ABC angulus ABC fuerit ſextuplus anguli A, inter eius latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ relationem iſta conditione determinatam inueſtigare.

Solutio.

Ex ſuperioribus ſatis iam eſt perſpicuum, hanc relationem inueniri, ſi in ea, quam modo ſumus adepti, loco litterarum a, b, c ſcribamus has formulas: ac, $bb-aa$, et bc; ſicque prodit:

$$(bb-aa)^5-ac(bb-aa)^4-2aacc(bb-aa)^3-ac^3(bb-2aa)(bb-aa)^2$$
$$-aac^4(bb-aa)^2-ac^5(bb-aa)^2=0$$

quae aequatio per $(bb-aa)^2$ diuiſa induit hanc formam:

$$(bb-aa)^3-ac(bb-aa)^2-2aacc(bb-aa)-ac^3(bb-2aa)$$
$$-aac^4-ac^5=0$$

euolutione autem facta obtinet

$$b^6-a(3a+c)b^4+a(3a^3+2aac-2acc-c^3)bb-a(cc-aa)^2$$
$$(c+a)=0 \text{ ſeu}$$
$$b^6-a(c+3a)b^4-a(c+a)(cc+ac-3aa)bb-a(cc-aa)^2$$
$$(c+a)=0.$$

Coroll. 1.

15. Si hic ſimili modo fiat ſubſtitutio $a=ac$, $b=bb-aa$ et $c=bc$, oritur aequatio pro triangulo ABC, in quo angulus ad B eſt ſeptuplus anguli A, quae ergo erit:

$$(bb-aa)^6-acc(b+3a)(bb-aa)^4-ac^4(b+a)(bb+ab-3aa)(bb-aa)^2$$
$$-ac^6(bb-aa)^2(b+a)=0$$

quae iam per $(bb-aa)^2(b+a)$ diuiſionem admittit, et dat

$$(bb-aa)^3(b-a)-acc(b+3a)(bb-aa)(b-a)-ac^4(bb+ab-3aa)$$
$$-ac^6=0$$

ſeu

ſeu

$$b^7 - ab^6 - 3aab^5 - a(cc-3aa)b^4 - aa(2cc-3aa)b^3 - a(cc-aa) \\ (cc-3aa)bb - aa(cc-aa)^2 b - a(cc-aa)^3 = 0.$$

Coroll. 2.

16. Ope eiusdem ſubſtitutionis hinc obtinetur aequatio pro triangulo ABC, in quo angulus ad B eſt octuplus anguli A; ſcilicet:

$$(bb-aa)^7 - ac(bb-aa)^6 - 3aacc(bb-aa)^5 - ac^3(bb-3aa)(bb-aa)^4 \\ - aac^4(2bb-3aa)(bb-aa)^3 - ac^5(bb-aa)(bb-3aa)(bb-aa)^2 \\ - aac^6(bb-aa)^2(bb-aa) - ac^7(bb-aa)^3 = 0$$

quae aequatio per $(bb-aa)^3$ diuiſa praebet:

$$(bb-aa)^4 - ac(bb-aa)^3 - 3aacc(bb-aa)^2 - ac^3(bb-3aa)(bb-aa) \\ - aac^4(2bb-3aa) - ac^5(bb-3aa) - aac^6 - ac^7 = 0$$

ex cuius euolutione naſcitur haec forma:

$$b^8 - a(c+4a)b^6 - a(c^3+3acc-3aac-6a^3)b^4 - a(c+a)(cc-aa)(cc+ac \\ - 4aa)b^2 - a(c+a)(cc-aa)^3 = 0.$$

Scholion.

17. Nunc igitur rem in genere conſiderando, ſi angulus ABC ad angulum A teneat rationem $= n : 1$, vt ſit $ABC = n.BAC$, poſitis lateribus $AB = c$, $AC = b$, et $BC = a$, contemplemus aequationes pro caſibus ſimplicioribus hactenus inuentas, quas propterea ita ordine exhibeamus, litterisque maiuſculis deſignemus:

ſi	erit
$n=1$	$b-a=0\ ..\ A$
$n=2$	$bb-a(a+c)=0\ ..\ B$
$n=3$	$b^3-abb-aab-a(cc-aa)=0\ ..\ C$
$n=4$	$b^4-a(c+2a)bb-a(c+a)(cc-aa)=0\ ..\ D$
$n=5$	$b^5-ab^4-2aab^3-a(cc-2aa)bb-aa(cc-aa)b-a(cc-aa)^2=0\ ..\ E$
$n=6$	$b^6-a(c+3a)b^4-a(c+a)(cc+ac-3aa)bb-a(c+a)(cc-aa)^2=0\ ..\ F$
$n=7$	$b^7-ab^6-3aab^5-a(cc-3aa)b^4-aa(2cc-3aa)b^3-a(cc-aa)(cc-3aa)bb$ $-aa(cc-aa)^2b-a(cc-aa)^3=0\ ..\ G$
$n=8$	$b^8-a(c+4a)b^6-a(c^3+3acc-3aac-ba^3)b^4-a(c+a)(cc-aa)(cc+ac$ $-4aa)b^2-a(c+a)(cc-aa)^3=0\ ..\ H.$

Hic igitur ſtatim conſtat, has formulas nonniſi alternatim ſumtas commode inter ſe comparari poſſe; quandoquidem in iis, quae numeris paribus reſpondent, littera b tantum pares habet dimenſiones, in imparibus autem eiusdem litterae b, praeter pares, etiam impares dimenſiones occurrunt, dum contra hoc caſu littera c tantum pares dimenſiones obtinet. Hinc iſtas formulas, prouti n eſt numerus vel par vel impar, ſeorſim percurramus, in legem progreſſionis inquiſituri, vbi quidem primo oſtendam, vtroque caſu has formulas ſeriem recurrentem conſtituere, cuius quisque terminus per binos praecedentes determinatur; deinde vero etiam formam generalem exhibere conabor.

Problema 6.

18. Si in triangulo ABC fuerit angulus $B=2iA$, denotante $2i$ numerum integrum parem quem-

quemcunque, naturam relationis, quae inter trianguli latera $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ intercedit, inueſtigare.

Solutio.

Hic igitur conſiderari oportet progreſſionem earum alternarum formularum, quas ante litteris B, D, F, H etc. deſignauimus, quae ita ſe habent:

ſi	inuenta eſt formula
$i = 1$	$B = bb - a(c + a) = 0$
$i = 2$	$D = b^4 - a(c + 2a)bb - a(c + a)(cc - aa) = 0$
$i = 3$	$F = b^6 - a(c + 3a)b^4 - a(c + a)(cc + ac - 3aa)bb$ $- a(c + a)(cc - aa)^2 = 0$
$i = 4$	$H = b^8 - a(c + 4a)b^6 - a(c^3 + 3acc - 3aac - 6a^3)b^4$ $- a(c + a)(cc - aa)(cc + ac - 4aa)bb - a(c + a)(cc - aa)^2 = 0$

quarum formularum lex quo facilius obſeruetur, eas etiam ſecundum poteſtates litterae c diſponamus:

ſi	erit
$i = 1$	$B = (bb - aa) - ac = 0$
$i = 2$	$D = (bb - aa)^2 - ac(bb - aa) - aacc - ac^3 = 0$
$i = 3$	$F = (bb - aa)^3 - ac(bb - aa)^2 - 2aacc(bb - aa)$ $- ac^3(bb - 2aa) - aac^4 - ac^5 = 0$
$i = 4$	$H = (bb - aa)^4 - ac(bb - aa)^3 - 3aacc(bb - aa)^2$ $- ac^3(bb - 3aa)(bb - aa) - aac^4(2bb - 3aa)$ $- ac^5(bb - 3aa) - aac^6 - ac^7 = 0.$

Hic primum obſeruo, ſi a quauis formula praecedens per $bb - aa$ multiplicata ſubtrahatur, reſidua multo ſimpliciora eſſe proditura; erit enim:

D - B

$D - B(bb-aa) = -aacc - ac^3$

$F - D(bb-aa) = -aacc(bb-aa) + a^3c^3 - aac^4 - ac^5$

$H - F(bb-aa) = -aacc(bb-aa)^2 + a^3c^3(bb-aa)$
$\quad -aac^4(bb-2aa) + 2a^3c^5 - aac^6 - ac^7$

ſubtrahatur inſuper a qualibet praecedens per cc multiplicata, reperieturque:

$D - B(bb-aa+cc) = -bbcc$

$F - D(bb-aa+cc) = -bbcc(bb-aa) + abbc^3$

$H - F(bb-aa+cc) = -bbcc(bb-aa)^2 + abbc^3(bb-aa)$
$\quad + aabbc^4 + abbc^5$

quae formae per $-bbcc$ diuiſae praebent

$$\frac{B(bb-aa+cc)-D}{bbcc} = 1$$

$$\frac{D(bb-aa+cc)-F}{bbcc} = bb-aa-ac = B$$

$$\frac{F(bb-aa+cc)-H}{bbcc} = (bb-aa)^2 - ac(bb-aa) - aacc - ac^3 = D$$

vbi profecto caſu non euenire videtur, vt primo quidem vnitas, tum vero ipſae litterae B et D prodeant; pro inductione quidem hinc ſtabilienda hi duo caſus certe minime ſufficerent, verum calculo ad ſequentem formulam K continuato, nonſolum idem contingit, ſed etiam pro formulis ordine imparibus A, C, E, G deinceps eadem lex progreſſionis deprehendetur. Quam ob rem non dubito, huic inductioni innixus pronunciare, formulas has B, D, F, H etc. ſeriem conſtituere recurrentem, cuius ſcala relationis $bb-aa-cc$, $-bbcc$, hincque terminum antecedentem ipſi $i=0$ reſpondentem eſſe vnitatem. Ita his formulis ita diſpoſitis:

i ...	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7
	1,	B,	D,	F,	H,	K,	M,	O etc.

erit

erit primo quidem $B = bb - aa - ac$, tum vero ſecundum legem ſeriei recurrentis:

$$D = (bb - aa + cc)B - bbcc.1 \quad \text{pro } n = 4$$
$$F = (bb - aa + cc)D - bbcc\,B \quad \text{pro } n = 6$$
$$H = (bb - aa + cc)F - bbcc\,D \quad \text{pro } n = 8$$
$$K = (bb - aa + cc)H - bbcc\,F \quad \text{pro } n = 10$$
$$M = (bb - aa + cc)K - bbcc\,H \quad \text{pro } n = 12$$

etc.

vnde has formulas, quouſque lubuerit, continuare licet.

Coroll. 1.

19. Si ergo haec ſeries formetur: $1 + Bz + Dz^2 + Fz^3 +$ etc. ea ex euolutione huiusmodi fractionis:

$$\frac{1 + \Delta z}{1 - (bb + aa + cc)z + bbcczz}$$

naſcitur, vbi quidem eſt $\Delta = -ac - cc$, haecque fractio adeo illius ſeriei in infinitum prolatae ſummam exhibet.

Coroll. 2.

20. Hinc porro in genere formulam indefinite numero i conuenientem exhibere licet, quippe quae ita exprimetur:

$$\mathfrak{A}\left(\frac{bb - aa + cc + \surd(a^4 + b^4 + c^4 - 2aabb - 2aacc - 2bbcc)}{2}\right)^i$$
$$\mathfrak{B}\left(\frac{bb - aa + cc - \surd(a^4 + b^4 + c^4 - 2aabb - 2aacc - 2bbcc)}{2}\right)^i$$

 vbi

vbi quidem, applicatione ad duas primores facta, fit
$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 1$
et $\frac{bb - aa + cc}{2} + \frac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\surd \ldots = bb - aa - ac$
ſeu $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \frac{bb - (a+c)^2}{\surd \ldots} = -\surd \frac{(a+c+b)(a+c-b)}{(a+b-c)(b+c-a)}$;

Scholion.

Tab. I. Fig. 5. 21. Formula haec generalis eo maiori cura euolui meretur, quod adhuc ſoli inductioni innititur, ideoque vberiori confirmatione indiget. Sint igitur trianguli ABC latera $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, et anguli $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, vbi quidem aſſumimus eſſe $\beta = 2i\alpha$. Nunc vero eſt
$\text{coſ}\,\alpha = \frac{bb - aa + cc}{2bc}$ et $\text{ſin.}\,\alpha = \frac{\surd(2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4)}{2bc}$.
ex quo formula noſtra inuenta induet hanc formam:

$$\mathfrak{A}(bc\,\text{coſ.}\alpha + bc\surd -1\,\text{ſin.}\alpha)^i + \mathfrak{B}(bc\,\text{coſ.}\alpha - bc\surd -1\,\text{ſin.}\alpha)^i$$

quae per principia nota transfunditur in hanc:

$$\mathfrak{A}b^ic^i(\text{coſ.}i\alpha + \surd -1\,\text{ſin.}i\alpha) + \mathfrak{B}b^ic^i(\text{coſ.}i\alpha - \surd -1\,\text{ſin.}i\alpha)$$

Cum vero ſit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 1$, et $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \frac{bb - (a+c)^2}{2bc\surd -1.\text{ſin.}\alpha}$, ex formula $\text{coſ.}\beta = \text{coſ.}\,2i\alpha = \frac{aa + bc - bb}{2ac}$, ſequitur fore

$$1 + \text{coſ.}\,2i\alpha = \frac{(a+c)^2 - bb}{2ac}, \text{ ideoque } \mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \frac{a(1 + \text{coſ.}\,2i\alpha)}{b\surd -1 - \text{ſin.}\alpha}$$

at $\text{ſin.}\alpha : \text{ſin.}\,2i\alpha = a : b$, vnde $\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \frac{1 + \text{coſ.}\,2i\alpha}{\surd -1.\text{ſin.}\,2i\alpha}$, ſeu $\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \frac{\text{coſ.}\,i\alpha}{\surd -1.\text{ſin.}\,i\alpha}$. Quo circa habebitur:

$$\mathfrak{A} = \frac{-\text{coſ.}i\alpha + \surd -1.\text{ſin.}i\alpha}{2\surd -1.\text{ſin}\,i\alpha}, \text{ et } \mathfrak{B} = \frac{\text{coſ.}\,i\alpha + \surd -1.\text{ſin.}\,i\alpha}{2\surd -1\,\text{ſin.}\,i\alpha}.$$

ſicque

ſicque formula inuenta ſit

$$\frac{b^i c^i}{2\sqrt{-1}.\text{ſin}.i\alpha}((\text{coſ}.i\alpha+\sqrt{-1}.\text{ſin}.i\alpha)(-\text{coſ}.i\alpha+\sqrt{-1}.\text{ſin}.i\alpha)$$
$$+(\text{coſ}.i\alpha-\sqrt{-1}.\text{ſin}.i\alpha)(\text{coſ}.i\alpha+\sqrt{-1}.\text{ſin}.i\alpha))$$

quae cum ſponte in nihilum abeat, euidens eſt, caſu, quo angulus $\beta=2i\alpha$, formulam inuentam nihilo eſſe aequalem, ideoque inductionem veritati conſentaneam.

Problema 7.

22. Si in triangulo ABC fuerit angulus $\beta=(2i+1)\alpha$, exiſtente $2i+1$ numero impare quocunque integro, naturam relationis, quae hinc inter latera trianguli a, b, c intercedit, inueſtigare.

Solutio.

Ex ſerie ergo formularum ſupra (17) exhibita, eas alternas conſiderari oportet, quae litteris A, C, E, G etc. ſunt deſignatae, et ordine expoſitae, ita ſe habent:

ſi	formula inuenta eſt
$i=0$	$A=b-a=0$
$i=1$	$C=b^3-abb-aab-a(cc-aa)=0$
$i=2$	$E=b^5-ab^4-2aab^3-a(cc-2aa)bb-aa(cc-aa)b-a(cc-aa)^2=0$
$i=3$	$G=b^7-ab^6-3aab^5-a(cc-3aa)b^4-aa(2cc-3aa)b^3-a(cc-aa)(cc-3aa)bb-aa(cc-aa)^2b-a(cc-aa)^3=0$

 quae

quae eaedem ſecundum poteſtates ipſius c diſpoſitae ita repraeſententur:

ſi	erit
$i=0$	$A=(b-a)=0$
$i=1$	$C=(b-a)(bb-aa)-acc=0$
$i=2$	$E=(b-a)(bb-aa)^2-acc(bb+ab-2aa)-ac^4=0$
$i=3$	$G=(b-a)(bb-aa)^3-acc(bb-aa)(bb+2ab-3aa)$ $-ac^4(bb+ab-3aa)-ac^6=0.$

Atque ex his colligimus primo:

$$(bb-aa)A-C=acc$$
$$(bb-aa)C-E=aacc(b-a)+ac^4$$
$$(bb-aa)E-G=aacc(bb-aa)(b-a)+aac^4(b-2a)+ac^6.$$

tum vero porro:

$$(bb-aa+cc)A-C=bcc$$
$$(bb-aa+cc)C-E=bbcc(b-a)=bbccA$$
$$(bb-aa+cc)E-G=bbcc(b-a)(bb-aa)-abbc^4=bbccC.$$

Vnde iam multo maiori fiducia concludimus, has formulas A, C, E, G etc. ſeriem recurrentem conſtituere, cuius ſcala relationis ſit $bb-aa+cc$, et terminum primo A praecedentem cenſendum eſſe $=\frac{1}{b}$. Quare ex cognitis duobus primis $A=b-a$ et $C=(b-a)(bb-aa)-acc$ ſequentes hac lege formantur.

$$E=(bb-aa+cc)C-bbccA \text{ pro } n=5$$
$$G=(bb-aa+cc)E-bbccC \text{ pro } n=7$$
$$I=(bb-aa+cc)G-bbccE \text{ pro } n=9$$
$$L=(bb-aa+cc)I-bbccG \text{ pro } n=11$$
$$N=(bb-aa+cc)L-bbccI \text{ pro } n=13$$

etc.

Coroll.

Coroll. 1.

23. His igitur formulis ita ſecundum numeros i diſpoſitis, erit

i 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

formula A, C, E, G, I, L, N etc.

et terminus indefinite numero i conueniens erit, vt ante, huius formae:

$$\mathfrak{A}\left(\frac{bb - aa + cc + \surd(a^4 + b^4 + b^4 - 2aabb - 2aacc - 2bbcc)}{2}\right)^i$$

$$+ \mathfrak{B}\left(\frac{bb - aa + cc - \surd(a^4 + b^4 + c^4 - 2aabb - 2aacc - 2bbcc)}{2}\right)^i.$$

Coroll. 1.

24. Coefficientes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ex binis terminis initialibus A et C ita definiuntur, vt primo ſit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = A = b - a$, tum vero $\frac{(b-a)(bb-aa+cc)}{2} + \frac{1}{2}$

$(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\surd(\ldots) = (b-a)(bb - aa) - acc$

ergo $(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\surd(\ldots) = (b-a)(bb - aa - (b+a)cc$

$= (b+a)(bb - 2ab + aa - cc$

hincque $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \frac{(b+a)((b-a)^2 - cc)}{\surd(a^4 + b^4 + c^4 - 2aabb - 2aacc - 2bbcc)}$.

Scholion.

25. Euoluamus hanc formulam generalem pari modo, quo ante fecimus (21), eritque prorſus vt ante forma noſtra generalis:

$\mathfrak{A}(bc\,\mathrm{coſ.}\alpha + bc\surd{-1}.\mathrm{ſin.}\alpha)^i + \mathfrak{B}(bc\,\mathrm{coſ.}\alpha - bc\surd{-1}.\mathrm{ſin.}\alpha)$

quae pariter in hanc abit:

$\mathfrak{A}b^ic^i(\mathrm{coſ.}i\alpha + \surd{-1}.\mathrm{ſin.}i\alpha) + \mathfrak{B}b^ic^i(\mathrm{coſ.}i\alpha - \surd{-1}.\mathrm{ſin.}i\alpha)$

 vbi

vbi eſt $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=b-a$, et $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\frac{(b+a)((b-a)^2-cc)}{2bc\sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\alpha}$.
Nunc vero, ob ang. $\gamma=180^\circ-2(i+1)\alpha$, erit
$\text{coſ.}\,2(i+1)\alpha=\frac{cc-aa-bb}{2ab}$ et $1+\text{coſ.}\,2(i+1)\alpha=\frac{cc-(b-a)^2}{2ab}$
vnde $\mathfrak{B}-\mathfrak{A}=\frac{a(b+a)(1+\text{coſ.}\,2(i+1)\alpha)}{c\sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\alpha}$.
At eſt $a:c=\text{ſin.}\,\alpha:\text{ſin.}\,2(i+1)\alpha$, ideoque $\mathfrak{B}-\mathfrak{A}$
$=\frac{(b+a)\,\text{coſ.}(i+1)\alpha}{\sqrt{-1}.\,\text{ſin.}(i+1)\alpha}$, vnde colligimus

$$\mathfrak{A}=-\frac{(b+a)\,\text{coſ.}(i+1)\alpha+(b-a)\sqrt{-1}.\,\text{ſin.}(i+1)\alpha}{2\sqrt{-1}.\,\text{ſin.}(i+1)\alpha} \text{ et}$$

$$\mathfrak{B}=\frac{(b+a)\,\text{coſ.}(i+1)\alpha+(b-a)\sqrt{-1}.\,\text{ſin.}(i+1)\alpha}{2\sqrt{-1}.\,\text{ſin.}(i+1)\alpha}.$$

Quoniam latera a et b ſunt ſinibus angulorum oppoſitorum proportionalia, ſtatuamus $a=2f\,\text{ſin.}\,\alpha$, et $b=2f\,\text{ſin.}(2i+1)\alpha$, eritque

$$a\,\text{coſ.}(i+1)\alpha=f(\text{ſin.}(i+2)\alpha-\text{ſin.}\,i\alpha);\; a\,\text{ſin.}(i+1)\alpha =f(\text{coſ.}\,i\alpha-\text{coſ.}(i+2)\alpha)$$

$$b\,\text{coſ.}(i+1)\alpha=f(\text{ſin.}(3i+2)\alpha+\text{ſin.}\,i\alpha);\; b\,\text{ſin.}(i+i)\alpha =f(\text{coſ.}\,i\alpha-\text{coſ.}(3i+2)\alpha)$$

vnde colligimus:

$$(a+b)\,\text{coſ.}(i+1)\alpha=f(\text{ſin.}(i+2)\alpha+\text{ſin.}(3i+2)\alpha) \text{ et}$$
$$(b-a)\,\text{ſin.}(i+1)\alpha=f(\text{coſ.}(i+2)\alpha-\text{coſ.}(3i+2)\alpha).$$

Quare cum ſit generatim

$$\text{ſin.}\,\mu+\text{ſin.}\,\nu=2\,\text{ſin.}\tfrac{\mu+\nu}{2}\,\text{coſ.}\tfrac{\nu-\mu}{2} \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\,\mu-\text{coſ.}\,\nu=2\,\text{ſin.}\tfrac{\mu+\nu}{2}\,\text{ſin.}\tfrac{\nu-\mu}{2}$$

habebimus:

$$(a+b)\,\text{coſ.}(i+1)\alpha=2f\,\text{ſin.}(2i+2)\alpha\,\text{coſ.}\,i\alpha \text{ et}$$
$$(b-a)\,\text{ſin.}(i+1)\alpha=2f\,\text{ſin.}(2i+2)\alpha\,\text{ſin.}\,i\alpha$$

ac

ac propterea adipiſcimur:

$$\mathfrak{A} = \frac{f\,ſin.(2i+2)\alpha}{\sqrt{-1}.ſin.(i+1)\alpha}(-coſ.i\alpha + \sqrt{-1}.ſin.i\alpha) \text{ et}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{f\,ſin.(2i+2)\alpha}{\sqrt{-1}.ſin.(i+1)\alpha}(coſ.i\alpha + \sqrt{-1}.ſin.i\alpha)$$

vnde perſpicuum eſt, fore

$$\mathfrak{A}(coſ.i\alpha+\sqrt{-1}.ſin.i\alpha)+\mathfrak{B}(coſ.i\alpha-\sqrt{-1}.ſin.i\alpha)=0,$$

quo ipſo veritas inductionis noſtrae euincitur. His autem obſeruatis, nunc demum ſolutionem noſtri Problematis directe aggredi licet.

Problema 8.

26. Si in triangulo ABC angulus B ad angulum A rationem teneat quamcunque multiplam, vt n ad 1, relationem, quae inde inter latera trianguli $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ intercedit, analytice inueſtigare.

Solutio.

Poſito angulo $A=\alpha$, vt ſit angulus $B=n\alpha$, erit, vti ex angulorum doctrina conſtat:

$$coſ.n\alpha+\sqrt{-1}.ſin.n\alpha=(coſ.\alpha+\sqrt{-1}.ſin.\alpha)^n \text{ et}$$

$$coſ.n\alpha-\sqrt{-1}.ſin.n\alpha=(coſ.\alpha-\sqrt{-1}.ſin.\alpha)^n, \text{ ideoque}$$

$$\frac{coſ.n\alpha+\sqrt{-1}.ſin.n\alpha}{coſ.n\alpha-\sqrt{-1}.ſin.n\alpha}=\left(\frac{coſ.\alpha+\sqrt{-1}ſin.\alpha}{coſ.\alpha-\sqrt{-1}ſin.\alpha}\right)^n.$$

Iam prout n eſt numerus par vel impar, duo caſus ſunt euoluendi

Sit primo $n=2i$, et vtrinque radix quadrata extrahatur, fietque:

$$\frac{coſ.i\alpha+\sqrt{-1}.ſin.i\alpha}{coſ.i\alpha-\sqrt{-1}\,ſin.i\alpha}=\left(\frac{coſ.\alpha+\sqrt{-1}.ſin\,\alpha}{coſ.\alpha-\sqrt{-1}.ſin.\alpha}\right)^i$$

nunc

nunc vero eſt $\operatorname{coſ}.2i\alpha = \frac{aa+cc-bb}{2ac}$, ideoque $\operatorname{coſ}.i\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+c)^2-bb}{ac}}$ et $\operatorname{ſin}.i\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bb-(c-a)^2}{ac}}$ deinde $\operatorname{coſ}.\alpha = \frac{bb-aa+cc}{2bc}$ et $\operatorname{ſin}.\alpha = \frac{\sqrt{(2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4)}}{2bc}$. Sit breuitatis gratia.

$$\Delta = \sqrt{(a^4+b^4+c^4-2aabb-2aacc-2bbcc)}$$

et noſtra aequatio fit

$$\frac{(a+c)^2-bb+\Delta}{(a+c)^2-bb-\Delta} = \left(\frac{bb-aa+cc+\Delta}{bb-aa+cc-\Delta}\right)^i \text{ ſeu}$$

$$((a+c)^2-bb-\Delta)(bb-aa+cc+\Delta)^i - ((a+c)^2 - bb+\Delta)(bb-aa+cc-\Delta)^i = 0$$

quae per 2Δ diuiſa conuenit cum forma ſupra inuenta. Sit deinde $n = 2i+1$, et multiplicando aequationem per $\frac{\operatorname{coſ}.\alpha-\sqrt{-1}.\operatorname{ſin}.\alpha}{\operatorname{coſ}.\alpha+\sqrt{-1}.\operatorname{ſin}.\alpha}$ orietur,

$$\frac{\operatorname{coſ}.2i\alpha-\sqrt{-1}.\operatorname{ſin}.2i\alpha}{\operatorname{coſ}.2i\alpha-\sqrt{-1}.\operatorname{ſin}.2i\alpha} = \left(\frac{\operatorname{coſ}.\alpha+\sqrt{-1}.\operatorname{ſin}.\alpha}{\operatorname{coſ}.\alpha-\sqrt{-1}.\operatorname{ſin}.\alpha}\right)^{2i}$$

et quadratam radicem extrahendo:

$$\frac{\operatorname{coſ}.i\alpha+\sqrt{-1}.\operatorname{ſin}.i\alpha}{\operatorname{coſ}.i\alpha-\sqrt{-1}.\operatorname{ſin}\ i\alpha} = \left(\frac{\operatorname{coſ}.\alpha+\sqrt{-1}.\operatorname{ſin}.\alpha}{\operatorname{coſ}.\alpha-\sqrt{-1}.\operatorname{ſin}.\alpha}\right)^i.$$

Cum nunc ſit $\gamma = 180^\circ - 2(i+1)\alpha$, erit

$\operatorname{coſ}.2(i+1)\alpha = \frac{cc-bb-aa}{2ab}$ hincque

$\operatorname{coſ}.(i+1)\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{cc-(b-a)^2}{ab}}$ et $\operatorname{ſin}.(i+1)\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+a)^2-cc}{ab}}$. Eſt vero $\operatorname{coſ}.\alpha = \frac{bb-aa+cc}{2bc}$ et $\operatorname{ſin}.\alpha\sqrt{-1} = \frac{\Delta}{2bc}$ ſeu $\operatorname{ſin}.\alpha = \frac{\Delta}{2bc\sqrt{-1}}$, vbi notetur eſſe $\frac{\Delta}{\sqrt{-1}} = \sqrt{(cc-(b-a)^2((b+a)^2-cc)}$; quamobrem elicietur

$$\operatorname{coſ}.i\alpha = \frac{1}{4bc\sqrt{ab}}((bb-aa+cc)\sqrt{(cc-(b-a)^2)} + ((b+a)^2 - cc)\sqrt{(cc-(b-a)^2)}$$

ſeu

ſeu $\cos. i\alpha = \frac{b+a}{2c\sqrt{ab}}\sqrt{(cc-(b-a)^2)}$, tum vero

$$\sin. i\alpha = \frac{1}{4bc\sqrt{ab}}((bb-aa+cc)\sqrt{((b+a)^2-cc)} - (cc-(b-a)^2)\sqrt{((b+a)^2-cc)})$$

ſeu $\sin. i\alpha = \frac{b-a}{2c\sqrt{ab}}\sqrt{((b+a)^2-cc)}$. Quibus ſubſtitutis erit:

$$\frac{(b+a)(cc-(b-a)^2)+(b-a)\Delta}{(b+a)(cc-(b-a)^2)-(b-a)\Delta} = \left(\frac{bb-ae+cc+\Delta}{bb-aa+cc-\Delta}\right)^i$$

et aequatio hinc ſupra inuenta colligitur:

$$\left(b+a-\frac{(b-a)\Delta}{cc-(b-a)^2}\right)(bb-aa+cc+\Delta)^i-\left(b+a+\frac{(b-a)\Delta}{cc-(b-a)^2}\right)(bb-aa+cc-\Delta)^i=0$$

dummodo haec ducatur in $\frac{cc-(b-a)^2}{-2\Delta}$, atque ex hac forma ſimul natura ſeriei recurrentis intelligitur.

Coroll. 1.

27. Pro caſu ergo quo in triangulo ABC angulus $B = 2iA$ aequatio laterum relationem exprimens eſt:

$$\left(1+\frac{bb-(a+c)^2}{\Delta}\right)(bb-aa+cc+\Delta)^i+\left(1-\frac{bb+(a+c)^2}{\Delta}\right)(bb-aa+cc-\Delta)^i=0$$

pro caſu autem, quo angulus $B = (2i+1)A$, habetur:

$$\left(b-a-\frac{(b+a)(cc-(b-a)^2)}{\Delta}\right)(bb-aa+cc+\Delta)^i+\left(b-a+\frac{(b+a)(oc-(b-a)^2)}{\Delta}\right)(bb-aa+cc-\Delta)^i=0.$$

Coroll. 2.

28. Quodſi ergo has conſtituamus formas:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{bb-aa+cc+\Delta}{2}\right)^i+\tfrac{1}{2}\left(\frac{bb-aa+cc-\Delta}{2}\right)^i=V$$

$$\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{bb-aa+cc+\Delta}{2}\right)^i-\frac{1}{2\Delta}\left(\frac{bb-aa+cc-\Delta}{2}\right)^i=W$$

quarum vtraque eſt rationalis non obſtante formula irrationali:

$$\Delta=\sqrt{(a^4+b^4+c^4-2aabb-2aacc-2bbcc)}$$
$$=\sqrt{((bb-aa+cc)^2-4bbcc)}$$

pro caſu $B=2iA$ erit

$$V+(bb-(a+c)^2)W=0$$

pro caſu vero $B=(2i+1)A$ erit

$$(b-a)V+(b+a)((b-a)^2-cc)W=0.$$

Coroll. 3.

29. Quodſi pro ſingulis valoribus numeri integri i ambae formae V et W euoluantur, binae exorientur ſeries recurrentes per eandem ſcalam relationis $bb-aa+cc, -bbcc$ continuandae, ex quibus deinceps ambae illae triangulorum proprietates facile exhibentur.

Scholion.

30. Quo has ſeries ſuccinctius exprimamus ſit breuitatis gratia $bb-aa+cc=ff$, et pro ſerie priori $V=\left(\frac{ff+\Delta}{2}\right)^i+\left(\frac{ff-\Delta}{2}\right)^i$

Ob

Ob $\Delta = \sqrt{(f^4 - 4bbcc)}$ et ſcalam relationis $ff, -bbcc$ inueniemus:

ſi	valores ipſius V
$i=0$	2
$i=1$	ff
$i=2$	$f^4 - 2bbcc$
$i=3$	$f^6 - 3bbccff$
$i=4$	$f^8 - 4bbccf^4 + 2b^4c^4$
$i=5$	$f^{10} - 5bbccf^6 + 5b^4c^4ff$
$i=6$	$f^{12} - 6bbccf^8 + 9b^4c^4f^4 - 2b^6c^6$
$i=7$	$f^{14} - 7bbccf^{10} + 14b^4c^4f^6 - 7b^6c^6f^2$

vnde generatim colligitur fore . . . . . $V =$
$f^{2i}\ ibbccf^{2i-4} + \frac{i(i-3)}{1.\,2}b^4c^4f^{2i-8} - \frac{i(i-4)(i-5)}{1.\,2.\,3}b^6c^6f^{2i-12} + \text{etc.}$

Deinde pro altera forma $W = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{ff+\Delta}{2}\right)^i - \frac{1}{\Delta}\left(\frac{ff-\Delta}{2}\right)^i$ ſequens naſcetur ſeries:

ſi	valores ipſius W
$i=0$	0
$i=1$	1
$i=2$	ff
$i=3$	$f^4 - bbcc$
$i=4$	$f^6 - 2bbccff$
$i=5$	$f^8 - 3bbccf^4 + b^4c^4$
$i=6$	$f^{10} - 4bbccf^6 + 3b^4c^4ff$
$i=7$	$f^{12} - 5bbccf^8 + 6b^4c^4f^4 - b^6c^6$

vnde in genere haec forma erit . . . . $W =$

$$f^{2i-2} - (i-2)bbccf^{2i-6} + \frac{(i-3)(i-4)}{1.\,2}b^4c^4f^{2i-10} - \frac{(i-4)(i-5)(i-6)}{1.\,2.\,3}b^6c^6f^{2i-14} + \text{etc.}$$

vbi probe notandum eſt, has ambas expreſſiones generales tantum vsque ad terminos euaneſcentes proferri debere, etiamſi deinceps denuo termini finiti redeant. Caeterum hinc patet, fore . $\frac{1}{2}(V+ffW)=$

$$f^{2i}-(i-1)bbccf^{2i-4}+\frac{(i-2)(i-3)}{1.\ 2}b^4c^4f^{2i-8}$$
$$-\frac{(i-3)(i-4)(i-5)}{1.\ 2.\ 3}b^6c^6f^{2i-12}+\text{etc.}$$

atque . . . . $\frac{1}{2}(V-ffW)=$

$$-bbccf^{2i-4}+(i-3)b^4c^4f^{2i-8}-\frac{(i-4)(i-5)}{1.\ 2}b^6c^6f^{2i-12}$$
$$+\frac{(i-5)(i-6)(i-7)}{1.\ 2.\ 3}b^8c^8f^{2i-16}-\text{etc.}$$

Hinc iam pro caſu triangulorum, vbi angulus $B=2iA$, ob $bb=ff+aa-cc$, aequatio laterum relationem exprimens erit:

$$\tfrac{1}{2}(V+ffW)-c(a+c)W=0$$

pro altero autem caſu, vbi angulus $B=(2i+1)A$, poſito hic $cc=ff-bb+aa$, aequatio laterum relationem exprimens erit:

$$\tfrac{1}{2}b(V-ffW)-\tfrac{1}{2}a(V+ffW)+b(bb-aa)W=0.$$

Verum etiam alio modo hae expreſſiones generales absque introductione quantitatis $ff=bb-aa+cc$ repraeſentari poſſunt, vti in ſequenti problemate videbimus.

Problema 9.

31. Si in triangulo ABC angulus B ad angulum A rationem teneat quamcunque multiplam, vt n ad 1, aequationem, qua relatio inter latera

AB

$AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ exprimitur, in genere exhibere.

Solutio.

Si aequationes pro ſingulis caſibus ſupra inventas attentius conſideremus, haud difficulter legem certam in terminorum progreſſu obſeruabimus, ex indole progreſſionis demonſtrata facile confirmandam. Duos autem caſus hic diſtingui oportet, prout numerus ille n fuerit par, vel impar. Pro vtroque autem caſu aequatio quaeſita ſequenti modo exhiberi poterit:

Pro caſu, quo $n = 2i$.

aequatio laterum relationem exprimens ita ſe habet:

$$\frac{b^{2i}}{a} = \begin{array}{l} + c b^{2i-2} + c(cc - (i-1)aa)b^{2i-4} + c\left(c^4 - 2(i-2)aacc + \frac{(i-2)(i-1)}{1.\ 2} a^4\right) b^{2i-6} \\ + iab^{2i-2} + a\left((i-1)cc - \frac{(i-1)i}{1.\ 2} aa\right) b^{2i-4} + a\left((i-2)c^4 - \frac{2(i-2)(i-1)}{1.\ 2.} a^2 c^2 + \frac{(i-2)(i-1)i}{1.\ 2.\ 3} a^4\right) b^{2i-6} \end{array}$$

$$+ c\left(c^6 - 3(i-3)a^2c^4 + \frac{3(i-3)(i-2)}{1.\ 2} a^4 c^2 - \frac{(i-3)(i-2)(i-1)}{1.\ 2.\ 3} a^6\right) b^{2i-8}$$

$$+ a\left((i-3)c^6 - \frac{3(i-3)(i-2)}{1.\ 2} a^2 c^4 + \frac{3(i-3)(i-2)(i-1)}{1.\ 2.\ 3} a^4 c^2 - \frac{(i-3)(i-2)(i-1)i}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^6\right) b^{2i-8}$$

$$+ c\left(c^8 - 4(i-4)a^2c^6 + \frac{6(i-4)(i-3)}{1.\ 2} a^4 c^4 - \frac{4(i-4)(i-3)(i-2)}{1.\ 2,\ 3} a^6 c^2 + \frac{(i-4)(i-3)(i-2)(i-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^8\right) b^{2i-10}$$

$$+ a\left((i-4)c^8 - \frac{4(i-4)(i-3)}{1.\ 2.} a^2 c^6 + \frac{6(i-4)(i-3)(i-2)}{1.\ 2.\ 3.} a^4 c^4 - \frac{4(i-4)(i-3)(i-2)(i-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} a^6 c^2 \right.$$

$$\left. + \frac{(i-4)(i-3)(i-2)(i-1)i}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} a^8\right) b^{2i-10}$$

cuius lex continuationis ſatis eſt manifeſta.

Pro caſu, quo $n = 2i + 1$.

aequatio laterum relationem exprimens ita ſe habet:

$$\frac{b^{2i+1}}{a} = \begin{array}{l} + b^{2i} + (cc - iaa) b^{2i-2} + \left(c^4 - 2(i-1)aacc + \frac{(i-1)i}{1.\,2} a^4\right) b^{2i-4} \\ + iab^{2i-1} + a\left((i-1)cc - \frac{(i-1)}{1.\,2} aa\right) b^{2i-3} + a\left((i-2)c^4 - \frac{2(i-2)(i-1)}{1.\,2} a^2 c^2 + \frac{(i-2)(i-1)i}{1.\,2.\,3} a^4\right) b^{2i-5} \end{array}$$

$$+ \left(c^6 - 3(i-2)a^2c^4 + 3\frac{(i-2)(i-1)}{1.\,2} a^4c^2 - \frac{(i-2)(i-1)i}{1.\,2.\,3} a^6\right) b^{2i-6}$$

$$+ a\left((i-3)c^6 - 3\frac{(i-3)(i-2)}{1.\,2} a^2c^4 + 3\frac{(i-3)(i-2)(i-1)}{1.\,2.\,3} a^4c^2 - \frac{(i-3)(i-2)(i-1)}{1.\,2.\,3.\,4} a^6\right) b^{2i-7}$$

etc.

quae aequatio commodius hac forma, ſecundum poteſtates ipſius c diſpoſita, repraeſentari poteſt:

$$\frac{b^{2i+1}}{a} = c^{2i} + c^{2i-2}\left\{\begin{array}{c} bb - iaa \\ + ab \end{array}\right\} + c^{2i-4}\left\{\begin{array}{c} b^4 - 2(i-1)aabb + \frac{(i-1)i}{1.\,2} a^4 \\ + 2ab^3 - (i-1)a^3b \end{array}\right\}$$

$$+ c^{2i-6}\left\{\begin{array}{l} b^6 - 3(i-2)a^2b^4 + \frac{3(i-2)(i-1)}{1.\,2} a^4b^2 - \frac{(i-2)(i-1)i}{1.\,2.\,3} a^6 \\ + 3ab^5 - 3(i-2)a^3b^3 + \frac{(i-2)(i-1)}{1.\,2} a^5b \end{array}\right\}$$

$$+ c^{2i-8}\left\{\begin{array}{l} b^8 - 4(i-3)a^2b^6 + \frac{6(i-3)(i-2)}{1.\,2} a^4b^4 - \frac{4(i-3)(i-2)(i-1)}{1.\,2.\,3} a^6b^2 + \frac{(i-3)(i-2)(i-1)i}{1.\,2.\,3.\,4} a^8 \\ + 4ab^7 - 6(i-3)a^3b^5 + \frac{4(i-3)(i-2)}{1.\,2} a^5b^3 - \frac{(i-3)(i-2)(i-1)}{1.\,2.\,3} a^8 \end{array}\right\}$$

etc.

Scholion.

32. His conſiderationibus doctrina triangulorum non mediocriter amplificari videtur, dum ſtatim atque in quopiam triangulo ratio inter binos eius angulos innoteſcit, ſimul relatio certa inter eius latera exhiberi poteſt. Cum autem haec nimis ſint generalia, quandoquidem ex hac relatione vnicum

cum latus per bina reliqua determinatur, conueniet, has proprietates generales inuentas ad certam triangulorum ſpeciem accommodari, vbi quidem triangula iſoſcelia prae caeteris ſunt notatu digna, quia in iis ſaepenumero ratio inter angulum verticalem et angulos ad baſin praeſcribi ſolet, quoties ſcilicet polygona regularia ſunt conſtruenda. Duo autem caſus hic euoluendi occurrunt, prout vel angulus ad baſin eſt multiplus anguli verticalis, vel angulus verticalis multiplus anguli ad baſin; quos ambos in ſequentibus problematibus ſum expediturus.

Problema 10.

33. Si in triangulo iſoſcele BAC angulus ad baſin fuerit multiplus anguli verticalis A in ratione $n:1$, inueſtigare relationem inter baſin $BC = a$ et latera $AB = AC = b$. Tab. I. Fig. 6.

Solutio.

Primum obſeruandum eſt, ob hanc rationem ipſos angulos dari; poſita enim menſura duorum angulorum rectorum $= \pi$, et angulo verticali $A = \alpha$, ob $\alpha + 2n\alpha = \pi$, fit $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}$. Iam formulis ante inuentis huc transferendis, erit $c = b$, et binis caſibus ſeorſim tractatis, prout n eſt numerus vel par vel impar, quorum vtroque formulae ſeriem recurrentem conſtituunt, cuius ſcala relationis eſt $2bb - aa, -b^4$, primo ponendo $n = 2i$, habebimus:

ſi

ſi	has aequationes
$i=0$	$1=0$
$i=1$	$B=bb-ab-aa=0$
$i=2$	$D=b^4-2ab^3-3aabb+a^3b+a^4=0$
$i=3$	$F=b^6-3ab^5-6aab^4+4a^3b^3+5a^4bb-a^5b-a^6=0$
$i=4$	$H=b^8-4ab^7-10aab^6+10a^3b^5+15a^4b^4-6a^5b^3-7a^6b^2+a^7b+a^8=0$

vnde concludimus, in genere fore:

$$0=b^{2i}-iab^{2i-1}-\frac{i(i+1)}{1.2}a^2b^{2i-2}+\frac{i(ii-1)}{1.2.3}a^3b^{2i-3}+\frac{i(ii-1)(i+2)}{1.2.3.4}a^4b^{2i-4}$$
$$-\frac{i(ii-1)(ii-4)}{1.2.3.4.5}a^5b^{2i-5}-\frac{i(ii-1)(ii-4)(i+3)}{1.2.3.4.5.6}a^6b^{2i-6}\text{ etc.}$$

Pro altero caſu, quo $n=2i+1$, habebimus:

ſi	has aequationes
$i=0$	$A=b-a=0$
$i=1$	$C=b^3-2abb-aab+a^3=0$
$i=2$	$E=b^5-3ab^4-3aab^3+4a^3b^2+a^4b-a^5=0$
$i=3$	$G=b^7-4ab^6-6aab^5+10a^3b^4+5a^4b^3-6a^5b^2-a^6b+a^7=0$

vnde concludimus in genere fore:

$$0=b^{2i+1}-(i+1)ab^{2i}-\frac{i(i+1)}{1.2}a^2b^{2i-1}+\frac{i(i+1)(i+2)}{1.2.3}a^3b^{2i-2}$$
$$-\frac{(i-1)i(i+1)(i+2)}{1.2.3.4}a^4b^{2i-3}$$
$$-\frac{(i-1)i(i+1)(i+2)(i+3)}{1.2.3.4.5}a^5b^{2i-4}+\frac{(i-2)(i-1)(i+1)(i+2)(i+3)}{1.2.3.4.5.6}a^6b^{2i-5}\text{ etc.}$$

quae forma, ſi ponamus $n=2i-1$, commodius ita exhibetur:

$$0=b^{2i-1}-iab^{2i-2}-\frac{i(i-1)}{1.2}a^2b^{2i-3}+\frac{i(ii-1)}{1.2.3}a^3b^{2i-4}+\frac{i(ii-1)(i-2)}{1.2.3.4}a^4b^{2i-5}$$
$$-\frac{i(ii-1)(ii-4)}{1.2.3.4.5}a^5b^{2i-6}-\frac{i(ii-1)(ii-4)(i-3)}{1.2.3.4.5.6}a^6b^{2i-7}\text{ etc.}$$

Coroll.

Coroll. 1.

34. Cum in formulis generalibus ſupra exhibitis poni debeat $c = b$, erit pro caſu $n = 2i$ aequatio generalis:

$$\mathfrak{A}\left(\frac{2bb-aa+a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i + \mathfrak{B}\left(\frac{2bb-aa-a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i = 0$$

exiſtente $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=1$ et $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\frac{-a-2b}{\sqrt{(aa-4bb)}}$, hincque aequatio noſtra:

$$\left(\frac{a+2b}{\sqrt{(aa-4bb)}}-1\right)\left(\frac{2bb-aa+a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i = \left(\frac{a+2b}{\sqrt{(aa-4bb)}}+1\right)\left(\frac{2bb-aa-a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i$$

Coroll. 2.

35. Pro caſu autem $n = 2i+1$, ob $c = b$, ex §. 23. adipiſcimur hanc aequationem:

$$\mathfrak{A}\left(\frac{2bb-aa+a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i + \mathfrak{B}\left(\frac{2bb-aa-a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i = 0$$

vbi eſt $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=b-a$ et $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\frac{(b+a)(a-2b)}{\sqrt{(aa-4bb)}}$: ideoque

$$\left(b-a+\frac{(b+a)(a-2b)}{\sqrt{(aa-4bb)}}\right)\left(\frac{2bb-aa+a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i =$$
$$\left(\frac{(b+a)(a-2b)}{\sqrt{(aa-4bb)}}-b+a\right)\left(\frac{2bb-aa-a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i.$$

Coroll. 3.

36. Si pro i ſcribamus $i-1$, vt ſit $n=2i-1$, haec oritur aequatio:

$$\left(\frac{a-2b}{\sqrt{(aa-4bb)}}+1\right)\left(\frac{2bb-aa+a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i = \left(\frac{a-2b}{\sqrt{(aa-4bb)}}-1\right)\left(\frac{2bb-aa-a\sqrt{(aa-4bb)}}{2}\right)^i$$

 hinc

hinc autem prodeunt ſuperiores aequationes per $2b$ multiplicatae.

Scholion.

37. Formae generales hic exhibitae a ſumma poteſtate ipſius b incipiunt; eaedem vero etiam ita inuerſae repraeſentari poſſunt, vt a ſumma poteſtate ipſius a incipiant. Ita pro caſu priori, quo $n = 2i$, colligimus hanc aequationem:

$$0 = a^{2i} - (2i-1)a^{2i-2}b^2 + \frac{(2i-2)(2i-3)}{1.\ 2}a^{2i-4}b^4 - \frac{(2i-3)(2i-4)(2i-5)}{1.\ 2.\ 3}a^{2i-6}b^6 \text{ etc.}$$
$$+ a^{2i-1}b - (2i-2)a^{2i-3}b^3 + \frac{(2i-3)(2i-4)}{1.\ 2}a^{2i-5}b^5 - \frac{(2i-4)(2i-5)(2i-6)}{1.\ 2.\ 3}a^{2i-7}b^7 \text{ etc.}$$

Pro caſu autem poſteriori, quo $n = 2i + 1$, iſtam:

$$0 = \begin{cases} + a^{2i+1} - 2ia^{2i-1}b^2 + \frac{(2i-1)(2i-2)}{1.\ 2}a^{2i-3}b^4 - \frac{(2i-2)(2i-3)(2i-4)}{1.\ 2.\ 3}a^{2i-5}b^6 \\ - a^{2i}b + (2i-1)a^{2i-2}b^3 - \frac{(2i-2)(2i-3)}{1.\ 2}a^{2i-4}b^5 + \frac{(2i-3)(2i-4)(2i-5)}{1.\ 2.\ 3}a^{2i-6}b^7 \text{ etc.} \end{cases}$$

Verum notandum eſt, has expreſſiones tantum eo vsque continuari debere, quoad ad terminum euaneſcentem perueniatur, et ſequentes, etiamſi non euaneſcant, tamen reiici oportere, cui cautioni formae ſuperiores non ſunt obnoxiae, ex quo eae quoque ad caſus, vbi i non eſt numerus integer, extendi poſſunt, vbi quidem aequatio ſerie infinita conſtabit.

Proble-

Problema II.

38. Si in triangulo iſoſcele ABC angulus verticalis B ſit multiplus anguli ad baſin A in ratione $n:1$, vt ſit $B = nA$, inueſtigare relationem inter baſin $AC = b$ et latera $BA = BC = a$. Tab. I. Fig. 7.

Solutio.

Poſitis angulis ad baſin $A = C = \alpha$, vt ſit verticalis $B = n\alpha$, erit $(n+2)\alpha = \pi$, ideoque $\alpha = \frac{\pi}{n+2}$ et $B = \frac{n\pi}{n+2}$. In formulis ergo ſupra inuentis poni debet $c = a$, ita vt iam ſcala relationis ſit $bb, -aabb$. Quare caſus iterum binos diſtinguendo, prout n fuerit numerus par vel impar, habebimus:

Pro caſu $n = 2i$.

ſi	has aequationes
$i = 0$	$1 = 0$
$i = 1$	$B = bb - 2aa = 0$
$i = 2$	$D = b^4 - 3aabb = 0$
$i = 3$	$F = b^6 - 4aab^4 + 2a^4bb = 0$
$i = 4$	$H = b^8 - 5aab^6 + 5a^4b^4 = 0$
$i = 5$	$K = b^{10} - 6aab^8 + 9a^4b^6 - 2a^6b^4 = 0$
$i = 6$	$M = b^{12} - 7aab^{10} + 14a^4b^8 - 7a^6b^6 = 0$
$i = 7$	$O = b^{14} - 8aab^{12} + 20a^4b^{10} - 16a^6b^8 + 2a^8b^6 = 0$
$i = 8$	$Q = b^{16} - 9aab^{14} + 27a^4b^{12} - 30a^6b^{10} + 9a^8b^8 = 0$

etc.

quae ad has formas ſimpliciores reducuntur:

$i = 1$	$bb - 2aa = 0$
$i = 2$	$bb - 3aa = 0$
$i = 3$	$b^4 - 4aabb + 2a^4 = 0$
$i = 4$	$b^4 - 5aabb + 5a^4 = 0$
$i = 5$	$b^6 - 6aab^4 + 9a^4b^2 - 2a^6 = 0$
$i = 6$	$b^6 - 7aab^4 + 14a^4b^2 - 7a^6 = 0$
$i = 7$	$b^8 - 8aab^6 + 20a^4b^4 - 16a^6bb + 2a^8 = 0$
$i = 8$	$b^8 - 9aab^6 + 27a^4b^4 - 30a^6bb + 9a^8 = 0$

etc.

Hic ergo iterum duos caſus diſcerni conuenit, prout numerus i ſit par vel impar.

Si ſit $i = 2\lambda - 1$ et $n = 4\lambda - 2$ erit aequatio:

$$0 = b^{2\lambda} - 2\lambda aab^{2\lambda-2} + \frac{2\lambda(2\lambda-3)}{1.\ 2}a^4b^{2\lambda-4} - \frac{2\lambda(2\lambda-4)(2\lambda-5)}{1.\ 2.\ 3}a^6b^{2\lambda-6}$$
$$+ \frac{2\lambda(2\lambda-5)(2\lambda-6)(2\lambda-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^8b^{2\lambda-8} - \text{etc.}$$

et ordine inuerſo ita ſe habebit:

$$0 = a^{2\lambda} - \frac{\lambda\lambda}{1.\ 2}a^{2\lambda-2}b^2 + \frac{\lambda\lambda(\lambda\lambda-1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{2\lambda-4}b^4 - \frac{\lambda\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda\lambda-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}a^{2\lambda-6}b^6 + \text{etc.}$$

Sin autem ſit $i = 2\lambda$, et $n = 4\lambda$, erit aequatio:

$$0 = b^{2\lambda} - (2\lambda+1)aab^{2\lambda-2} + \frac{(2\lambda+1)(2\lambda-2)}{1.\ 2}a^4b^{2\lambda-4} - \frac{(2\lambda+1)(2\lambda-3)(2\lambda-4)}{1.\ 2.\ 3}a^6b^{2\lambda-6}$$
$$+ \frac{(2\lambda+1)(2\lambda-4)(2\lambda-5)(2\lambda-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^8b^{2\lambda+8} - \text{etc.}$$

quae ordine inuerſo ita ſe habebit:

$$0 = (2\lambda+1)a^{2\lambda} - \frac{(2\lambda+1)\lambda(\lambda+1)}{1.\ 2.\ 3}a^{2\lambda-2}b^2 + \frac{(2\lambda+1)\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda+2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^{2\lambda-4}b^4$$
$$- \frac{(2\lambda+1)\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda\lambda-4)(\lambda+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}a^{2\lambda-6}b^6 \text{ etc.}$$

ſeu

ſeu per $2\lambda+1$ diuidendo hoc modo:

$$0=a^{2\lambda}-\frac{\lambda(\lambda+1)}{2.\ 3}a^{2\lambda-2}b^{2}+\frac{\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda+2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}a^{2\lambda-4}b^{4}-\frac{\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda\lambda-4)(\lambda+3)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}a^{2\lambda-6}b^{6}$$
$$+\frac{\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda\lambda-4)(\lambda\lambda-9)(\lambda+4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}a^{2\lambda-8}b^{8}-\text{etc.}$$

Nunc igitur ad alterum caſum progrediamur.

Pro caſu $n=2i+1$.

ſi	erit aequatio
$i=0$	$b-a=0$
$i=1$	$b^{3}-abb-aab=0$
$i=2$	$b^{5}-ab^{4}-2aab^{3}+a^{3}bb=0$
$i=3$	$b^{7}-ab^{6}-3aab^{5}+2a^{3}b^{4}+a^{4}b^{3}=0$
$i=4$	$b^{9}-ab^{8}-4aab^{7}+3a^{3}b^{6}+3a^{4}b^{5}-a^{5}b^{4}=0$
$i=5$	$b^{11}-ab^{10}-5aab^{9}+4a^{3}b^{8}+6a^{4}b^{7}-3a^{5}b^{6}-a^{6}b^{5}=0$

quae reducuntur ad has formas ſimpliciores:

$i=0$	$b-a=0$
$i=1$	$bb-ab-aa=0$
$i=2$	$b^{3}-abb-2aab+a^{3}=0$
$i=3$	$b^{4}-ab^{3}-3aabb+2a^{3}b+a^{4}=0$
$i=4$	$b^{5}-ab^{4}-4aab^{3}+3a^{3}bb+3a^{4}b-a^{5}=0$
$i=5$	$b^{6}-ab^{5}-5aab^{4}+4a^{3}b^{3}+6a^{4}b^{2}-3a^{5}b-a^{6}=0$

vnde in genere concluditur fore:

$$0=\begin{cases}+b^{i+1}-ia^{2}b^{i-1}+\frac{(i-1)(i-2)}{1.\ 2}a^{4}b^{i-3}-\frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{1.\ 2.\ 3}a^{6}b^{i-5}\\ -ab^{i}+(i-1)a^{3}b^{i-2}-\frac{(i-2)(i-3)}{1.\ 2}a^{5}b^{i-4}+\frac{(i-3)(i-4)(i-5)}{1.\ 2.\ 8}a^{7}b^{i-6}\text{etc.}\end{cases}$$

Inuerſe autem duos caſus contemplari conuenit:

I. Si $i = 2(\lambda - 1)$, et $n = 4\lambda - 3$, erit

$$0 = a^{2\lambda-1} - \frac{\lambda}{1} a^{2\lambda-2} b^2 - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.\ 2} a^{2\lambda-3} b^2 + \frac{\lambda(\lambda\lambda-1)}{1.\ 2.\ 3} a^{2\lambda-4} b^3 + \frac{\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^{2\lambda-5} b^4 \text{ etc.}$$

II. Si $i = 2\lambda - 1$, et $n = 4i - 1$, erit

$$0 = a^{2\lambda} + \frac{\lambda}{1} a^{2\lambda-1} b - \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.\ 2} a^{2\lambda-2} b^2 - \frac{\lambda(\lambda\lambda-1)}{1.\ 2.\ 3} a^{2\lambda-4} b^4 + \frac{\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda+2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^{2\lambda-6} b^6 \text{ etc.}$$

ſicque pro omnibus caſibus, quibus n eſt numerus integer, aequationes inter latera a et b eruimus.

SOLV-

SOLVTIO FACILIS

PROBLEMATVM QVORVMDAM GEOMETRICORVM DIFFICILLIMORVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

In omni triangulo quatuor potiſſimum dantur puncta, quae in Geometria conſiderari ſolent.

1. Interſectio ternorum perpendiculorum, quae ex ſingulis angulis in latera oppoſita demittuntur.

2. Interſectio ternarum rectarum, quae ex ſingulis angulis ductae latera oppoſita biſecant; quod punctum ſimul eſt centrum grauitatis trianguli.

3. Interſectio ternarum rectarum, quae ſingulos angulos bifariam ſecant, in quod punctum incidit centrum circuli triangulo inſcripti.

4. Interſectio ternarum rectarum ad ſingula latera normalium eaque biſecantium, in quo puncto reperitur centrum circuli triangulo circumſcripti.

2. Ex his quatuor punctis, ſi dentur poſitione terna quaecunque, euidens eſt, triangulum inde determinari, niſi forte illa puncta in vno coaleſcant, quod cum eueniat in triangulo aequilatero, hoc caſu omnia triangula aequilatera problemati aeque ſatisfa-

tisfacient. Hinc igitur quatuor naſcentur problemata, prout quodque eorum quatuor punctorum, pro trianguli determinatione praetermittitur, quae quemadmodum commodiſſime reſolui queant, hic oſtendere conſtitui.

3. Problemata autem haec ſolutu eſſe difficillima, mox experietur, quicunque ea fuerit aggreſſus, cum vix perſpiciatur, cuiusmodi quantitates incognitas in calculum introduci oporteat, vt ſaltem ad aequationes ſolutionem continentes perueniatur. Totum ergo negotium ad idoneam quantitatum incognitarum electionem reducitur, in quo id imprimis eſt cauendum, ne in calculos taedioſiſſimos et omnino inextricabiles delabamur. Tum vero omnibus difficultatibus feliciter ſuperatis inſignes quaedam affectiones inter illa quatuor puncta ſe prodent, quarum cognitio in Geometria haud leuis momenti eſt cenſenda.

Tab. II. Fig. 1. 2. 3. 4. 4. Ne figurae nimia linearum in iis ducendarum multitudine onerentur, idem triangulum ABC quater exhibeo, in primo ſcilicet (fig. 1.) rectae AM, BN et CN in latera oppoſita ſunt normales, earumque interſectionem littera E deſigno, vbi primum ſitum eſt punctum eorum quatuor, quae commemoraui. In ſecunda figura rectae A*a*, B*b* et C*c* latera oppoſita biſecant, quarum interſectionem indicat punctum F ſecundum, de quatuor illis punctis memoratis et centrum grauitatis trianguli.

guli. In tertia figura rectae $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ angulos A, B, C biſecant, earumque interſectio G praebet tertium punctum ante memoratum, nempe centrum circuli inſcripti. Tandem in quarta figura ex ſingulorum laterum punctis mediis S, T, V erectae ſunt perpendiculares SH, TH et VH ſua interſectione H centrum circuli circumſcripti exhibentes.

5. Quo horum quatuor punctorum poſitionem facilius definire eaque deinceps inter ſe comparare queam, ex ſingulis in latus AB pro baſi aſſumtum demitto perpendicula EP, FQ, GR et HS, quorum quidem primum et quartum iam in conſtructione ipſa occurrunt. Tum vero voco terna trianguli latera:

$$AB = c;\ AC = b \text{ et } BC = a$$

praeterea vero etiam aream trianguli in computum duci decet, quae ſit $= A$, eritque vti conſtat:

$$AA = \tfrac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

ſeu $$AA = \tfrac{1}{16}(2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4)$$

Hinc igitur ſitum cuiusque horum quatuor punctorum reſpectu baſis AB ſeorſim inueſtigo ſequenti modo. Tab. II. Fig. 1.

I. *Pro interſectione perpendiculorum* E.

6. Primo ex elementis conſtat fore:

$$AP = \frac{cc+bb-aa}{2c}, \text{ ſimilique modo } BM = \frac{aa+cc-bb}{2a}.$$

Deinde vero ob $\frac{1}{2}AM.BC = A$ erit $AM = \frac{2A}{a}$,

vnde ſimilitudo triangulorum ABM et AEP praebet

$$AM : BM = AP : EP$$

hincque fit $EP = \frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8cA}$.

Quocirca ſitus puncti E reſpectu baſis AB ita definitur vt ſit

$$AP = \frac{cc+bb-aa}{2c} \text{ et } PE = \frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8cA}.$$

II. *Pro centro grauitatis* F.

Tab. II. Fig. 2. 7. Demiſſo ex angulo C in baſin AB perpendiculo CP habemus vt ante $AP = \frac{cc+bb-aa}{2c}$ et $CP = \frac{2A}{c}$.

Iam vero ex elementis conſtat eſſe $FQ = \frac{1}{3}CP = \frac{2A}{3c}$ et $cQ = \frac{1}{3}cP$. Cum autem ſit $Ac = \frac{1}{2}c$ erit $cP = \frac{bb-aa}{2c}$ ideoque $cQ = \frac{bb-aa}{6c}$, et conſequenter $AQ = \frac{3cc+bb-aa}{6c}$. Quam ob rem ſitus puncti F reſpectu baſis AB ita definitur, vt ſit:

$$AQ = \frac{3cc+bb-aa}{6c} \text{ et } QF = \frac{2A}{3c}.$$

III. *Pro centro circuli inſcripti* G.

Fig. 3. 8. Cum GR ſit radius circuli inſcripti, erit $\frac{1}{2}GR(a+b+c)$ area trianguli $= A$ vnde fit $GR = \frac{2A}{a+b+c}$. Tum vero poſito ſegmento $AR = x$, ſi ab AC ex A par portio reſcindatur, habebitur ibi punctum contactus, a quo proinde punctum C diſtat interuallo $= b-x$. Deinde ob $BR = c-x$ ſi a latere BC ex A aequale interuallum $c-x$ reſcindatur,

datur, ibi hoc latus a circulo tangetur, vnde punctum C ab iſto puncto diſtabit interuallo $= a - c + x$, quod cum ex circuli natura illi $b - x$ ſit aequale, erit $x = \frac{c + b - a}{2}$. Quare hoc punctum G reſpectu baſis AB ita definitur vt ſit:

$$AR = \frac{c + b - a}{2} \text{ et } RG = \frac{2A}{a + b + c}.$$

IV. *Pro centro circuli circumſcripti* H. Tab. II. Fig. 4.

9. Hic quidem ſtatim eſt ex conſtructione $AS = \frac{1}{2}c$. Tum vero ex A in BC ducto perpendiculo AM, erit $AM = \frac{2A}{a}$ et $CM = \frac{aa + bb - cc}{2a}$. Iuncta autem recta AH ex natura circuli liquet fore angulum AHS aequalem angulo ACB, ideoque triangulum AHS ſimile erit triangulo ACM vnde fit;

$$AM : CM = AS : HS$$

ſicque colligitur $HS = \frac{c(aa + bb - cc)}{8A}$.
Quare ſitus puncti H reſpectu baſis AB ita definitur vt ſit:

$$AS = \frac{1}{2}c \text{ et } SH = \frac{c(aa + bb - cc)}{8A}.$$

10. Hinc iam definire poterimus diſtantias inter haec quaterna puncta, ſi quidem in eadem figura exprimerentur, erit enim;

$$EF^2 = (AP - AQ)^2 + (PE - QF)^2$$
$$EG^2 = (AP - AR)^2 + (PE - RG)^2$$
$$EH^2 = (AP - AS)^2 + (PE - SH)^2$$

$$FG^2=(AQ-AR)^2+(QF-RG)^2$$
$$FH^2=(AQ-AS)^2+(QF-SH)^2$$
$$GH^2=(AR-AS)^2+RG-SH)^2.$$

Haec autem interualla ideo colligi oportet, quod ſi proponantur terna horum quatuor punctorum quaeque tanquam data, nihil aliud praeter eorum mutuas diſtantias pro cognito aſſumatur, vnde deinceps latera trianguli ſint inueſtiganda.

11. Hic autem imprimis eſt obſeruandum diſtantias illas inter quatuor noſtra puncta neceſſario ita exprimi debere, vt tria trianguli latera in expreſſiones aequaliter ingrediantur, cum nulli lateri prae reliquis reſpectu harum diſtantiarum vlla praerogatiua tribui queat. Quam ob cauſam latera trianguli ſine vllo diſcrimine contemplaturus ponam:

$$a+b+c=p;\ ab+ac+bc=q \text{ et } abc=r$$

ita vt loco laterum iam iſtas ternas quantitates p, q et r ad ſingula aeque relatas in calculum ſim introducturus. Hinc cum ſit:

$$aa+bb+cc=pp-2q;\ aabb+aacc+bbcc=qq-2pr$$
$$a^4+b^4+c^4=p^4-4ppq+2qq+4pr$$

area A ita exprimitur vt ſit:

$$AA=\tfrac{1}{16}p(-p^3+4pq-8r)=\frac{-p^4+4ppq-3pr}{16}.$$

Hoc notato ſuperiores ſex diſtantias ad has nouas quantitates ſeorſim ſum reuocaturus.

I. *Inueſtigatio diſtantiae punctorum* E *et* F.

12. Hic primo habemus:

$$AP - AQ = \frac{cc+bb-aa}{2c} - \frac{3cc-bb+aa}{6c} = \frac{bb-aa}{3c}$$

$$PE - QF = \frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8c\mathrm{A}} - \frac{2\mathrm{A}}{3c}$$

$$= \frac{3(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)-16\mathrm{AA}}{24c\mathrm{A}}$$

quae expreſſiones ad communem denominatorem reductae, fiunt:

$$AP - AQ = \frac{(bb-aa)\sqrt{(2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4)}}{12c\mathrm{A}}$$

$$PE - QF = \frac{2c^4-a^4-b^4+2aabb-bbcc-aacc}{12c\mathrm{A}}$$

quarum quadrata addita praebent:

$$EF^2 = \frac{1}{16\mathrm{AA}}\left\{\begin{array}{l} +a^6+b^6+c^6 \\ -a^4bb-aab^4-a^4cc-aac^4-b^4cc^4-bbc^4) \\ +3aabbcc \end{array}\right.$$

vbi vtque litterae a, b, c aequaliter inſunt. Eſt vero:

$$a^4bb+aab^4+\text{etc.} = ppqq-2q^3-2p^3r+4pqr-3rr$$

$$a^6+b^6+c^6 = p^6-6p^4q+9ppqq-2q^3+6p^3r$$
$$-12pqr-3rr$$

ex quo obtinemus:

$$EF^2 = \frac{1}{36\mathrm{AA}}(p^6-6p^4q+8ppqq+8p^3r-16pqr+9rr)$$

quae expreſſionem ad hanc formam reducere licet:

$$EF^2 = \frac{rr}{4\mathrm{AA}} = \frac{4}{9}(pp-2q).$$

II. *Inueſtigatio diſtantiae punctorum* E *et* G.

13. Hic habemus:

$$AP - AR = \frac{cc + bb - aa}{2c} - \frac{c - b + a}{2} = \frac{bb - bc - aa + ac}{2c}$$

$$PE - RG = \frac{(cc + bb - aa)(aa + cc - bb)}{8c\Lambda} - \frac{2\Lambda}{a + b + c} \text{ ſeu}$$

$$PE - RG = \frac{c^4 - a^4 - b^4 + 2aabb}{8c\Lambda} + \frac{p^3 - 4pq + 8r}{8\Lambda}$$

atque ad communem denominatorem reducendo:

$$AP - AR = \frac{bb - bc - aa + ac)\sqrt{(2aabb + aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4)}}{8c\Lambda}$$

$$PE - RG = \frac{2c^4 - (a+b)c^3 - (a-b)^2 cc + (a+b)(a-b)^2 c - (aa - bb)^2}{8c\Lambda}$$

quorum quadratorum ſumma per $4cc$ diuiſa ad hanc formam redit:

$$EG^2 = \frac{1}{16\Lambda\Lambda}\left\{\begin{array}{l} + a^6 - a^5 b - a^4 bb + 3a^4 bc - 2a^3 bbc + 2a^3 b^3 \\ + b^6 - ab^5 - aab^4 + 3ab^4 c - 2a^3 bcc + 2a^3 c^3 \\ + c^6 - a^5 c - a^4 cc + 3abc^4 - 2aab^3 c + 2b^3 c^3 + 6aabbcc) \\ \quad - ac^5 - aac^4 \qquad\qquad - 2ab^3 cc \\ \quad - b^5 c - b^4 cc \qquad\qquad - 2aabc^3 \\ \quad - bc^5 - bbc^4 \qquad\qquad - 2abbc^3 \end{array}\right.$$

Antequam hanc expreſſionem ad litteras p, q et r reduco, obſeruo eſſe:

$$EG^2 \begin{array}{l} + aa - ab \\ + bb - ac \\ + cc - bc \end{array} = \frac{abc}{4\Lambda\Lambda}\left\{\begin{array}{l} + a^3 - aab + 3abc \\ + b^3 - abb \\ + c^3 - aac \\ \qquad - acc \\ \qquad - bbc \\ \qquad - bcc \end{array}\right\}$$

$$= \frac{abc(aa + bb + cc - 2ab - 2ac - 2bc)(a + b + c)}{4\Lambda\Lambda} + \frac{9aabbcc}{4\Lambda\Lambda}.$$

Iam

Iam cum ſit $aa+bb+cc=pp-2q$ reductio eſt facilis, quippe prodit:

$$EG^2+pp-3q=\frac{pr(pp-4q)+9rr}{4AA}$$

ſicque haec diſtantia ita definitur vt ſit:

$$EG^2=\frac{r(p^3-4pq+9r)}{4AA}-pp+3q=\frac{rr}{4AA}-\frac{4r}{p}-pp+3q.$$

III. *Inueſtigatio diſtantiae punctorum* E *et* H.

14. Cum hic ſit:

$$AP-AS=\frac{cc+bb-aa}{2c}-\frac{1}{2}c$$

$$PE-SH=\frac{(cc+bb-aa)(aa+cc-bb)}{8cA}-\frac{c(aa+bb-cc)}{8A}$$

habebimus:

$$AP-AS=\frac{bb-aa}{2c} \text{ et } PE-SH=\frac{2c^4-(aa+bb)cc-(aa-bb)^2}{8cA}$$

et quadratis addendis diuiſione facta per $4cc$ obtinetur:

$$EH^2=\frac{1}{16AA}\left\{\begin{array}{l}+a^6-a^4bb-aac^4+3aabbcc\\+b^6-a^4cc-b^4cc\\+c^6-aab^4-bbc^4\end{array}\right\}$$

quae ob $16AA=-a^4-b^4-c^4+2aabb+2aacc+bbcc$ reducitur ad hanc formam:

$$EH^2=\frac{9aabbcc}{16AA}-aa-bb-cc$$

vbi ſubſtitutio facile conficitur, reſultat enim:

$$EH^2=\frac{9rr}{16AA}-pp+2q.$$

IV.

IV. *Inueſtigatio diſtantiae punctorum* F *et* G.

15. Ex formulis ſupra inuentis habemus hic:

$$AQ - AR = \frac{3cc+bb-aa}{6c} - \frac{c-b+a}{2} = \frac{3(a-b)c-aa+bb}{6c}$$

$$GF - RG = \frac{2A}{3c} - \frac{2A}{a+b+c} = \frac{2A(a+b-2c)}{3c(a+b+c)}$$

quorum quadratorum ſumma reducitur ad hanc formam:

$$FG^2 = \frac{1}{9(a+b+c)^2}\left\{\begin{matrix} -a^4+a^3b+4aabb-5abcc \\ -b^4+ab^3+4aacc-5abbc \\ -c^4+a^3c+4bbcc-5aabc \\ +ac^3 \\ +b^3c \\ +bc^3. \end{matrix}\right\}$$

Cum nunc ſit:

$$a^4+b^4+c^4 = p^4-4ppq+2qq+4pr$$

$$aabb+aacc+bbcc = qq-2pr$$

$$a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+b^3c+bc^3 = ppq-2qq-pr$$

$$abcc+abbc+aabc = pr$$

expreſſio inuenta hanc induit formam:

$$FG^2 = \frac{1}{9pp}(-p^4+5ppq-18pr) = \frac{-p^3+5pq-18r}{9p}$$

V. *Inueſtigatio diſtantiae punctorum* F *et* H.

16. Pro hoc caſu habemus:

$$AQ - AS = \frac{3cc+bb-aa}{6c} - \tfrac{1}{2}c = \frac{bb-aa}{6c}$$

$$QF - SH = \frac{2A}{3c} - \frac{c(aa+bb-cc)}{8A} = \frac{2c^4-(aa+bb)cc-(aa-bb)^2}{24cA}$$

Quod-

Quodſi has formulas cum caſu primo comparemus, deprehendimus eſſe:

$$AQ - AS = \tfrac{1}{2}(AP - AQ) \text{ et } QF - SH = \tfrac{1}{2}(PE - QF)$$

vnde manifeſtum eſt fore $FH = \frac{1}{2}EF$ ideoque $FH^2 = \frac{rr}{16AA} - \frac{1}{9}(pp - 2q)$.

VI. *Inueſtigatio diſtantiae punctorum* G *et* H.

17. Pro hoc caſu poſtremo habetur:

$$AR - AS = \frac{c+b-a}{2} - \tfrac{1}{2}c = \frac{b-a}{2}$$

$$RG - SH = \frac{2A}{a+b+c} - \frac{c(aa+bb-cc)}{8A} = \frac{(a+b)c^3 + (aa+bb)cc - (a+b)(aa+bb)c - (aa-bb)^2}{8(a+b+c)A}$$

quarum binarum formularum quadrata ſi addantur reperitur ſequens expreſſio:

$$GH^2 = \frac{abc}{16(a+b+c)^2AA}\left\{\begin{array}{l} +a^5 + a^4b + ab^4 + abc^3 - 2a^3bb - 2aab^3 \\ +b^5 + a^4c + ac^4 + ab^3c - 2a^3cc - 2aac^3 \\ +c^5 + b^4c + bc^4 + a^3bc - 2b^3cc - 2bbc^3 \end{array}\right\}$$

quae per $a+b+c$ reducta abit in hanc:

$$GH^2 = \frac{abc}{16(a+b+c)AA}\left\{\begin{array}{l} +a^4 + aabc - 2aabb \\ +b^4 + abbc - 2aacc \\ +c^4 + abcc - 2bbcc \end{array}\right\}$$

vnde facta ſubſtitutione colligitur

$$GH^2 = \frac{r}{16pAA}(p^4 - 4ppq + 9pr) - \frac{r(p^3 - 4pq + 9r)}{16AA}$$

ſeu $GH^2 = \frac{rr}{16AA} - \frac{r}{p}$.

18. En ergo ſub vno conſpectu quadrata ſex horum interuallorum:

I. $EF^2 = \frac{rr}{4AA} - \frac{4}{9}(pp - 2q)$

II. $EG^2 = \frac{rr}{4AA} - pp + 3q - \frac{4r}{p}$

III. $EH^2 = \frac{9rr}{16AA} - pp + 2q$

IV. $FG^2 = -\frac{1}{9}pp + \frac{5}{9}q - \frac{2r}{p}$

V. $FH^2 = \frac{rr}{16AA} - \frac{1}{9}(pp - 2q)$

VI. $GH^2 = \frac{rr}{16AA} - \frac{r}{p}$

Tab. II. Fig. 5. vbi euidens eſt, eſſe $EH = \frac{3}{2}EF$ et $FH = \frac{1}{2}EF$, ſicque punctum H per puncta E, F ſponte determinatur, ſcilicet ſi tria puncta E, F, G forment triangulum EFG tum quartum punctum H ita in recta EF producta erit ſitum vt ſit $FH = \frac{1}{2}EF$ ideoque $EH = \frac{3}{2}EF$. Hinc vero deducitur $4GH^2 + 2EG^2 = 3EF^2 + 6FG^2$, quod cum valoribus inventis apprime congruit.

19. Quo nunc has formulas ad maiorem ſimplicitatem reuocemus, ponamus $4pq - p^3 - 8r = 4s$ vt ſit $4AA = ps$ et $4q = pp + \frac{8r}{p} + \frac{4s}{p}$; tum vero faciamus:

$$\frac{rr}{ps} = R, \ \frac{r}{p} = Q \text{ et } pp = P$$

ita vt P, Q, R ſint quantitates duas dimenſiones involuentes. Quoniam igitur hinc eſt $\frac{-s}{p} = \frac{QQ}{R}$ erit $p = \sqrt{P}$; $q = \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{QQ}{R}$, et $r = Q\sqrt{P}$, atque

que $4AA = \frac{PQQ}{R}$ et interualla noſtra ita exprimentur:

I. $EF^2 = R - \frac{2}{9}P + \frac{16}{9}Q + \frac{8QQ}{9R}$

II. $EG^2 = R - \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{3QQ}{R}$

III. $EH^2 = \frac{9}{4}R - \frac{1}{2}P + 4Q + \frac{2QQ}{R}$

IV. $FG^2 = \quad + \frac{1}{36}P - \frac{8}{9}Q + \frac{5QQ}{9R}$

V. $FH^2 = \frac{1}{4}R - \frac{1}{18}P + \frac{4}{9}Q + \frac{2QQ}{9R}$

VI. $GH^2 = \frac{3}{4}R - Q.$

20. Cum igitur horum quatuor punctorum terna niſi capiantur haec tria E, F et H iam contineant determinationem quarti, vnicum reſultat problema, quod ita ſe habet.

Problema.

Datis poſitione his quatuor punctis in quolibet triangulo aſſignabilibus 1°. *Interſectione perpendicularium ex ſingulis angulis in latera oppoſita ductarum* E, 2°. *Centro grauitatis* F, 3°. *Centro circuli inſcripti* G *et* 4° *centro circuli circumſcripti* H; *conſtruere triangulum.* Tab. II. Fig. 5.

Quod problema ex hactenus erutis horum punctorum affectionibus ſatis concinne reſoluere licebit.

Solutio.

21. Cum poſitio horum quatuor punctorum per eorum diſtantias detur, vocemus:

 $GH = f,$

$$GH=f,\ FH=g \text{ et } FG=h$$

nouimusque fore $EF=2g$ et $EH=3g$, itemque

$$EG=\sqrt{(6gg+3hh-2ff)}.$$

Nunc igitur ſtatim habemus has tres aequationes

$$\text{I. } ff=\tfrac{1}{4}R-Q$$

$$\text{II. } gg=\tfrac{1}{4}R-\tfrac{1}{18}P+\tfrac{4}{9}Q+\tfrac{2QQ}{9R}$$

$$\text{III. } hh=\tfrac{1}{36}P-\tfrac{8}{9}Q+\tfrac{6QQ}{9R}$$

ex quarum reſolutione colligimus:

$$R=\frac{4f^4}{3gg+6hh-2ff};\quad Q=\frac{3ff(ff-gg-2hh)}{3gg+6hh-2ff}$$

$$\text{et } P=\frac{27f^4}{3gg+6hh-2ff}-12ff-15gg+6hh$$

vnde fit $\frac{QQ}{R}=\frac{9(ff-gg-2hh)^2}{4(3gg+6hh-2ff)}$.

22. His valoribus inuentis inueſtigentur tres ſequentes expreſſiones:

$$p=\sqrt{P},\ q=\tfrac{1}{4}P+2Q+\tfrac{QQ}{R}, \text{ et } r=Q\sqrt{P}$$

indeque formetur haec aequatio cubica:

$$z^3-pzz+qz-r=0$$

cuius tres radices dabunt tria latera trianguli quaeſiti, quo pacto eius conſtructio facillima habetur.

Exemplum.

23. Sumtis lateribus trianguli $a=5$, $b=6$ et $c=7$, vt ſit area $A=6\sqrt{6}$, inde colliguntur diſtantiae quaternorum punctorum:

EF^2

$EF^2 = \frac{155}{72}$; $EG^2 = \frac{11}{8}$; $EH^2 = \frac{155}{32}$; $FG^2 = \frac{1}{9}$; $FH^2 = \frac{155}{288}$; $GH^2 = \frac{35}{32}$

vnde ſitus horum punctorum talis prodit vti in fig. 6. repraeſentatur. Cum igitur habeamus: Tab. II. Fig. 6.

$$ff = \tfrac{35}{32};\ gg = \tfrac{155}{288} \text{ et } hh = \tfrac{1}{9}$$

videamus num ſolutio inuenta ad triangulum aſſumtum perducat.

24. Hinc autem fit $3gg + 6hh - 2ff = \frac{3}{32}$, tum vero $ff - gg - 2hh = \frac{1}{3}$; $4ff + 5gg - 2hh = \frac{219}{32}$; colligitur

$$R = \tfrac{1225}{24};\ Q = \tfrac{35}{3};\ P = 324 \text{ et } \tfrac{QQ}{R} = \tfrac{24}{9} = \tfrac{8}{3}$$

vnde nanciſcimur:

$$p = \sqrt{P} = 18;\ q = 107 \text{ et } r = \tfrac{35}{3}.\,18 = 5.6.7 = 210$$

et aequatio cubica hinc oritur:

$$z^3 - 18zz + 107z - 210 = 0$$

cuius tres radices manifeſto ſunt 5, 6, 7 quae ſunt ipſa tria latera trianguli ſatisfacientis.

Caſus quo quatuor puncta in directum ſunt ſita.

25. Hoc ergo caſu cum ſit: Fig. 7.

$FH = g$; $FG = h$; $GH = f$; $EF = 2g$; $EH = 3g$ et $EG = 2g - h$

 erit

erit $g = f - h$, vnde facta hac ſubſtitutione colligimus:

$$R = \frac{4f^4}{(3h - f)^2}; \quad Q = \frac{3ffh(2f - 3h)}{(f - 3h)^2}; \quad P = \frac{3h(4f - 3h)^3}{(f - 3h)^2}$$

ideoque $\frac{QQ}{R} = \frac{9hh(2f - 3h)^2}{4(f - 3h)^2}$.

Ex his vero porro elicimus:

$$p = \frac{(4f - 3h)\sqrt{3h(4f - 3h)}}{f - 3h}$$

$$q = \frac{3fh(4f - 3h)(5f - 6h)}{(f - 3h)^2}$$

$$r = \frac{3ffh(2f - 3h)(4f - 3h)\sqrt{3h(4f - 3h)}}{(f - 3h)^3}.$$

26. Cum iam radices huius aequationis cubicae:

$$z^3 - pzz + qz - r = 0$$

praebeant tria latera a, b, c trianguli quaeſiti, ponamus ad eam concinniorem reddendam

$$z = \frac{y\sqrt{3h(4f - 3h)}}{f - 3h}$$

et prodibit haec aequatio:

$$y^3 - (4f - 3h)yy + f(5f - 6h)y - ff(2f - 3h) = 0$$

cuius radices manifeſto ſunt

$$f, \quad f, \quad \text{et } 2f - 3h.$$

Quocirca trianguli quaeſiti, quod ſit iſosceles, latera erunt:

$$a = b = \frac{f\sqrt{3h(4f - 3h)}}{f - 3h}; \text{ et } c = \frac{(2f - 3h)\sqrt{3h(4f - 3h)}}{f - 3h}.$$

27 Hic autem caſus per ſe ſolutu et facilis, cum recta illa, in qua ſunt puncta data triangulum

lum in duas partes ſimiles neceſſario ſecet, ideoque triangulum ſit iſoſceles. Poſito autem ſtatim a principio $b = a$, fit $A = \frac{1}{4}c\sqrt{(4aa-cc)}$ et $AP = AQ = AR = AS = \frac{1}{2}c$, tum vero

$$PE = \frac{c^3}{4A};\ QF = \frac{2A}{3c};\ RG = \frac{2A}{2a+c};\ SH = \frac{c(2aa-cc)}{8A}$$

vnde ob puncta P, Q, R, S coincidentia in baſis puncto medio, quod ſit O, interualla inter haec puncta erunt:

$$OF - OE = \frac{2(aa-cc)}{3\sqrt{(4aa-cc)}};\ OG - OE = \frac{c(a-c)}{\sqrt{(4aa-cc)}};$$
$$OH - OE = \frac{aa-cc}{\sqrt{(4aa-cc)}}$$
$$OF - OG = \frac{(a-c)(2a-c)}{3\sqrt{(4aa-cc)}};\ OH - OF = \frac{aa-cc}{3\sqrt{(4aa-cc)}};$$
$$OH - OG = \frac{a(a-c)}{\sqrt{(4aa-cc)}}.$$

28. Hic duos caſus contemplari conuenit prout fuerit vel $a > c$ vel $a < c$, nam ſi $a = c$, ſeu triangulum aequilaterum, omnia quatuor puncta in vnum coaleſcunt;

I. Si $a > c$ puncta erunt diſpoſita vti fig. 8. refert, vbi eſt $HF = \frac{1}{3}EH$ ſeu $EF = \frac{2}{3}EH$ et $EG < \frac{1}{2}EH$ hocque caſu punctum baſis medium O in recta HE producta vltra E cadit: vt ſit $OE = \frac{cc}{2\sqrt{(4aa-cc)}}$. Tab. II. Fig. 8.

II. Si $a < c$, puncta erunt diſpoſita vti fig. 9. refert, vbi eſt iterum $HF = \frac{1}{3}EH$ ſeu $EF = \frac{2}{3}EH$ at $EG > \frac{1}{2}EH$ Hoc autem caſu punctum baſis medium O in recta EH producta vltra H cadit; vt ſit Fig. 9.

HO

$HO = \frac{2aa - cc}{2\surd(4aa - cc)}$, vnde ſi $2aa < cc$ punctum O adeo intra H et E cadit.

29. Datis ergo in recta punctis tribus E, G et H, ita vt G intra extrema E et H ſit ſitum; videndum eſt vtrum ſit $EG < \frac{1}{2}EH$ an $EG > \frac{1}{2}EH$.

Tab. II. Fig. 8. Priori caſu quo $EG < \frac{1}{2}EH$ ſolutio ita ſe habet. Sit $EH = 2d$ et $EG = d - e$, hincque reperitur

$$a = b = \frac{(d+e)}{2e}\surd(d+3e)(3d+e)$$
$$c = \frac{d-e}{2e}\surd(d+3e)(3d+e), \text{ et } OE = \frac{(d-e)^2}{4e}.$$

Fig. 9. Poſteriori caſu $EG > \frac{1}{2}EH$ ſolutio erit haec: ſit $EH = 2d$ et $EG = d + e$, hincque colligitur

$$a = b = \frac{d-e}{2e}\surd(d-3e)(3d-e); \; c = \frac{d+e}{2e}\surd(d-3e)(3d-e)$$

et $OE = \frac{(d+e)^2}{2e}$, vnde patet hunc caſum locum habere non poſſe, ſi d intra limites $3e$ et $\frac{1}{3}e$ contineatur. Cum enim eſſe debet $2a > c$ neceſſe eſt ſit $d > 3e$.

Fig. 5. 30. Ex hoc caſu colligere licet, etiam in genere ſolutionem concinniorem eſſe prodituram, ſi omiſſo puncto F tria puncta E, G et H conſiderentur. Ponamus ergo:

$$EG = e, \; GH = f \text{ et } EH = k$$

eritque $FH = g = \frac{1}{3}k$, $EF = \frac{2}{3}k$ et $FG = h = \surd(\frac{1}{3}ee + \frac{2}{3}ff - \frac{2}{9}kk)$

hincque adipiſcimur $R = \frac{4f^4}{2ff + 2ee - kk}$, $Q = \frac{ff(kk - ff - 2ee)}{2ee + 2ff - kk}$ et

et $P = \frac{27f^4}{2ee - 2ff - kk} + 2ee - 8ff - 3kk = \frac{4e^4 + 11f^4 + 3k^4 - 12eeff + 2ffkk - 8eekk}{2ee + 2ff - kk}$

tum vero $\frac{QQ}{R} = \frac{(kk - ff - 2ee)^2}{4(2ee + 2ff - kk)}$, vnde fit

$p = \sqrt{P}$, $q = \frac{2e^4 + f^4 + k^4 - 6eeff - 3eekk + 2ffkk}{2ee + 2ff - kk}$ et $r = Q\sqrt{P}$

et aequationis $z^3 - pzz + qz - r = 0$ radices dant latera trianguli quaeſiti: quae aequatio poſito $z = y\sqrt{P}$ abit in hanc:

$$y^3 - yy + \frac{(2e^4 + f^4 + k^4 - 6eeff + 3eekk + 2ffkk)y - ff(kk - 2ee - ff)}{4e^4 + 11f^4 + 3k^4 - 12eeff - 8eekk + 2ffkk} = 0.$$

31. Hic autem obſeruo quantitates has datas e, f, k non ſolum ita aſſumi oportere, vt triangulum conſtituant, ſed quoniam latera trianguli quaeſiti a, b, c tanquam poſitiua ſpectari poſſunt, etiam tam P quam Q et R valores poſitiuos recipere debent. Non ſolum ergo eſſe debet $kk < 2ee + 2ff$ ſed etiam $kk > 2ee + ff$, tum vero vt P fiat poſitiuum, neceſſe eſt

ſit $3kk > 4ee + ff + 2\sqrt{(e^4 + 11eeff - 8f^4)}$

qua conditione cum illis collata ſequitur eſſe debere

$$ff > \tfrac{8}{19}ee \text{ et } ff < \tfrac{11 + \sqrt{153}}{16}ee \text{ ſeu } ff < \tfrac{19}{13}ee$$

alioquin problema nullam admitteret ſolutionem.

32. *Exempl.* Sit $ee = ff$ erit $R = \frac{4f^4}{4ff - kk}$; $Q = \frac{ff(kk - 3ff)}{4ff - kk}$

et $P = \frac{27f^4}{4ff - kk} - 6ff - 3kk = \frac{3(kk - ff)^2}{4ff - kk}$; atque $\frac{QQ}{R} = \frac{(kk - 3ff)^2}{4(4ff - kk)}$

ideoque $p = \frac{(kk - ff)\sqrt{3}}{\sqrt{(4ff - kk)}}$; $q = \frac{k^4 - ffkk - 3f^4}{4ff - kk}$; et $r = \frac{ff(kk - 3ff)(kk - ff)\sqrt{3}}{4(ff - kk)\sqrt{(4ff - kk)}}$

 ſit

ſit iam $ee = ff = 2$ et $kk = 7$; ficque

$$p = 5\sqrt{3}; \; q = 23, \text{ et } r = 10\sqrt{3}$$

et latera trianguli quaeſiti erunt radices huius aequationis cubicae $z^3 - 5zz\sqrt{3} + 23z - 10\sqrt{3} = 0$, quae poſito;

$$z = \frac{y}{\sqrt{3}} \text{ abit in } y^3 - 15yy + 69y - 90 = 0$$

cuius vna radix eſt $y = 6$, vnde binae reliquae ſunt

$$y = \frac{9 + \sqrt{21}}{2} \quad \text{et } y = \frac{9 - \sqrt{21}}{2}$$

ſicque trianguli quaeſiti latera ſunt:

$$a = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}; \; b = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}; \; c = 2\sqrt{3}.$$

33. Verum etiam generalius manente $ee = ff$ quomodocunque accipiatur k, ſi ponatur $z = \frac{y}{\sqrt{3(4ff - kk)}}$ habetur haec aequatio reſoluenda:

$$y^3 - 3(kk - ff)yy + 3(k^4 - ffkk - 3f^4)y$$
$$- 9ff(kk - 3ff)(kk - ff) = 0$$

cui primo ſatisfacit $y = 3ff$, et duae reliquae radices ex hac aequatione

$$yy - 3(kk - 2ff)y + 3(kk - 3ff)(kk - ff) = 0$$

quae ſunt $y = \frac{3(kk - 2ff) \pm k\sqrt{3(4ff - kk)}}{2}$

ſicque tria latera trianguli quaeſiti fiunt:

$$a = \frac{(kk - 2ff)\sqrt{3}}{2\sqrt{(4ff - kk)}} + \frac{1}{2}k$$

$$b = \frac{(kk - 2ff)\sqrt{3}}{2\sqrt{(4ff - kk)}} - \frac{1}{2}k$$

$$c = \frac{ff\sqrt{3}}{\sqrt{(4ff - kk)}}.$$

34. Re-

34. Reliquis caſibus negotium non tam facile expeditur, quia aequatio cubica factores non admittit. Quod vt exemplo oſtendatur ſit $ee = 3$, $ff = 2$ et $kk = 9$; vnde trianguli latera ſunt radices huius aequationis cubicae $z^3 - zz\sqrt{71} + 22z - 2\sqrt{71} = 0$; ad quam reſoluendam quaeratur angulus α, cuius coſinus ſit $= +\sqrt{\frac{71}{75}}$, qui erit acutus, quo inuento latera trianguli eruat:

$$a = \tfrac{1}{3}\sqrt{71} + \tfrac{2}{3}\sqrt{5}.\text{coſ.}(60^\circ - \tfrac{1}{3}\alpha) \text{ et } c = \tfrac{1}{3}\sqrt{71} - \tfrac{2}{3}\sqrt{5}.\text{coſ.}\,\tfrac{1}{3}\alpha$$

$$b = \tfrac{1}{3}\sqrt{71} + \tfrac{2}{3}\sqrt{5}.\text{coſ.}(60^\circ + \tfrac{1}{3}\alpha) \text{ vbi eſt proxime } \alpha = 11^\circ.\ 32'.\ 13''$$

ſicque per anguli triſectionem problema ſemper ſatis expedite reſoluetur.

OBSERVATIONES ANALYTICAE.

Auctore

L. EVLERO.

Conſideranti poteſtates, quae ex eleuatione huius formae trinomiae $1 + x + xx$ naſcuntur, termini medii maximis coefficientibus numericis deprehenduntur affecti, quorum ordo progreſſionis cum non parum ſit reconditus, omni attentione dignus videtur; praecipue quoniam huiusmodi ſpeculationes plerumque fructum haud ſpernendum in Analyſi afferre ſolent. Primum ergo harum poteſtatum ſimpliciores conſpectui exponam:

Exponens poteſtatis	Poteſtates euolutae
0	1
1	$1+x+x^2$
2	$1+2x+3x^2+2x^3+x^4$
3	$1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$
4	$1+4x+10x^2+16x^3+19x^4+16x^5+10x^6+4x^7+x^8$
5	$1+5x+15x^2+30x^3+45x^4+51x^5+45x^6+30x^7+15x^8+5x^9+x^{10}$
	etc.

hinc ſi termini medii ex ſingulis poteſtatibus ordine repraeſententur, haec exoritur progreſſio:

$$1,\ 1x,\ 3x^2,\ 7x^3,\ 19x^4,\ 51x^5,\ 141x^6 \text{ etc.}$$

qui

qui numeri, quanam lege progrediantur, haud immerito indagari videtur, vt non ſolum inde terminus generalis ſeu coefficiens dignitati indefinitae x^n conueniens innoteſcat, ſed etiam inſignes huius ſeriei proprietates explorentur. Hunc in finem ſequentia problemata proponam, quorum reſolutio deinceps ad alias ſpeculationes non parum curioſas manuducet.

Problema 1.

1. Euoluta hac poteſtate indefinita $(1+x+xx)^n$ coefficientem termini medii ſeu dignitatis x^n definire.

*S*olutio.

Poteſtas propoſita ita ſub forma binomii repraeſentetur $(x(1+x)+1)^n$, quae more ſolito euoluta praebet:

$$x^n(1+x)^n + \frac{n}{1}x^{n-1}(1+x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}(1+x)^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{n-3}(1+x)^{n-3} \text{ etc.}$$

ex cuius ſingulis membris, ſi vlterius euoluantur, terminos formae x^n elici oportet. Ac primum quidem membrum praebet x^n, cum reliquae poteſtates omnes ipſius x ex eius euolutione ortae futurae ſint altiores. Ex ſecundo autem membro pro hac dignitate x^n oritur:

$$\frac{n}{1}x^{n-1}.\ \frac{n-1}{1}x = \frac{n(n-1)}{1.\ 1}x^n$$

ex tertio membro ſimili modo conſequimur:

$$\frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} x^2 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.1.2} x^n$$

quas cunctas partes ſi in vnam ſummam colligamus obtinetur dignitatis x^n coefficiens quaeſitus:

$$1 + \frac{n(n-1)}{1.1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.1.2.3} \text{ etc.}$$

Coroll. 1.

2. Haec ergo ſeries, quae quoties n eſt numerus integer abrumpitur, coefficientem praebet dignitatis x^n pro ſerie propoſita $1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 19x^4 +$ etc. ſicque eius ope terminus quantumuis ab initio remotus ſtatim ſine praecedentibus inueniri poteſt.

Coroll. 2.

3. Quod ſi pro n ſucceſſiue numeros 1, 2, 3 etc. ſubſtituamus, ſequentes valores reperiuntur:

n	coefficiens ipſius x^n
0	1
1	1
2	$1 + 2 = 3$
3	$1 + 6 = 7$
4	$1 + 12 + 6 = 19$
5	$1 + 20 + 30 = 51$
6	$1 + 30 + 90 + 20 = 141$
7	$1 + 42 + 210 + 140 = 393$

n | coe-

n	coefficiens ipſius x^n
8	1+ 56+ 420+ 560+ 70=1107
9	1+ 72+ 756+1680+ 630=3139
10	1+ 90+1260+4200+3150+ 252=8953
11	1+110+1980+9240+11550+2772=25653
12	1+132+2970+18480+34650+16632+924=73789

etc.

Coroll. 3.

4. Series horum numerorum ita eſt comparata, vt quisque terminus cum triplo praecedentis commode conferri poſſe videatur, ex qua comparatione ſequentes differentiae naſcuntur:

1, 1, 3, 7, 19, 51, 141, 393, 1107, 3139 etc.
3, 3, 9, 21, 57, 153, 423, 1179, 3321

2, 0, 2, 2, 6, 12, 30, 72, 182 etc.

Scholion 1.

5. Si has differentias accuratius contemplemur, non ſine ratione euenire videtur, quod eae ſint numeri pronici, ſeu trigonales duplicati in forma $mm+m$ contenti, ac ſi ad iſtorum pronicorum numerorum radices ſpectemus, quae hanc ſeriem conſtituunt: Exemplum memorabile inductionis fallacis.

1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 etc.

ea manifeſto eſt recurrens, cuius quisque terminus eſt ſumma binorum praecedentium. Qui ordo cum in

in decem primoribus terminis deprehendatur, quis dubitauerit eundem vniuerſae ſeriei tribuere? ſaepe profecto inductiones minus certae ſucceſſu non fuerunt deſtitutae. Operae ergo pretium erit hanc rationem accuratius perpendere, ſcilicet cum numerus 13 conueniat ſeriei termino x^9, in genere dignitati x^n reſpondebit numerus:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$$

cuius numerus pronicus eſt:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-4} + \frac{1}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-4} - \frac{2}{5}(-1)^{n-2}.$$

Quare ſi in ſerie propoſita bini termini contigui generatim ita exhibeantur:

$$1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 10x^4 \ldots Px^n + Qx^{n+1}$$

erit $3P - Q =$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} + \frac{1}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} - \frac{2}{5}(-1)^{n-1}$$

vnde concluditur fore:

$$P = \frac{3^n + (-1)^n}{10} + \frac{1}{5}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{5}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ita vt ipſa quoque ſeries propoſita foret recurrens ſcala relationis exiſtente:

6, − 8, − 8, 13, 4, − 3

ſecun-

ſecundum quam erit:

$$3139 = 6.1107 - 8.393 - 8.141 + 14.51 + 4.9 - 3.7.$$

Scholion 2.

6. Verum quantumuis probabili inductione haec lex progreſſionis inniti videatur, dum adeo in decem primoribus terminis locum habet; tamen ea fallax deprehenditur, dum iam in termino vndecimo 8953 fallit; hoc enim a triplo praecedentis 9117 ſublato reſiduum 464 ne numerus quidem pronicus eſt, multo minus radicem pronicam habet $21 = 13 + 8$, eſt enim $21^2 + 21 = 462$, qui numerus binario deficit ab eo 464, qui ſecundum legem obſeruatam reſultare debebat. Quam ob cauſam nunc quidem in veram progreſſionis legem huius ſeriei ſum inquiſiturus, vt pateat quomodo quisque terminus per aliquot praecedentes reuera determinetur.

Problema 2.

7. Pro ſerie propoſita

$$1,\ x,\ 3x^2,\ 7x^3,\ 19x^4,\ 51x^5 \text{ etc.}$$

inueſtigare legem, qua quisque terminus per aliquot praecedentes determinatur.

Solutio.

Conſiderentur generatim aliquot huius ſeriei termini ſe mutuo ſequentes:

$$1,\ x,\ 3x^2,\ 7x^3 \ldots\ldots Px^n,\ Qx^{n+1},\ Rx^{n+2}$$

 et

et quoniam in problemate praecedente vidimus eſſe:

$$P = 1 + \frac{n(n-1)}{1.\ 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 1.\ 2.\ 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 1.\ 2.\ 2.\ 3.\ 3} \text{ etc.}$$

erit ſimili modo:

$$Q = 1 + \frac{(n+1)n}{1.\ 1} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.\ 1.\ 2.\ 2} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 1.\ 2.\ 2.\ 3.\ 3} \text{ etc.}$$

$$R = 1 + \frac{(n+2)(n+1)}{1.\ 1} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.\ 1.\ 2.\ 2} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 1.\ 2.\ 2.\ 3.\ 3} \text{ etc.}$$

vnde quamlibet a ſequente ſubtrahendo colligimus:

$$Q - P = \frac{2n}{1} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1.\ 1.\ 2} + \frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 1.\ 2.\ 2.\ 3} \text{ etc.}$$

$$R - Q = \frac{2(n+1)}{1} + \frac{2(n+1)n(n-1)}{1.\ 1.\ 2} + \frac{2(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 1.\ 2.\ 2.\ 3} \text{ etc.}$$

hinc capiamus hanc formam:

$$\frac{n+2}{n+1}(R-Q) = \frac{2(n+2)}{1} + \frac{2(n+2)n(n-1)}{1.\ 1.\ 2} + \frac{2(n+2)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 1.\ 2.\ 2.\ 3} \text{ etc.}$$

a qua illa $Q - P$ ſubtrahatur vt fiat:

$$\frac{n+2}{n+1}(R-Q) - (Q-P) = 4 + \frac{4n(n-1)}{1.\ 1} + \frac{4n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 1.\ 2.\ 2} + \text{ etc.}$$

quae ſeries cum ſit $= 4P$, habebimus:

$$R = Q + \frac{(n+1)(Q-P)}{n+2} + \frac{4(n+1)P}{n+2} \text{ ſeu}$$

$$R = \frac{(2n+3)Q + 3(n+1)P}{n+2}.$$

Coroll. 1.

8. En ergo legem qua quisque ſeriei terminus per binos praecedentes determinatur, quae ita ſe habet:

$$R = Q + \frac{n+1}{n+2}(Q + 3P)$$

vnde etiam ex binis ſequentibus Q et R praecedens P ita definitur:

$$P = \frac{(n+2)R - (2n+3)Q}{3(n+1)}.$$

Coroll.

Coroll. 2.

9. Quo appareat, quomodo haec lex in ſerie propoſita locum habeat, per caſus aliquot eam illuſtremus:

ſi $n = 0$, $\quad 3 = 1 + \frac{1}{2}(1 + 3.1)$

ſi $n = 1$, $\quad 7 = 3 + \frac{2}{3}(3 + 3.1)$

ſi $n = 2$, $\quad 19 = 7 + \frac{3}{4}(7 + 3.3)$

ſi $n = 3$, $\quad 51 = 19 + \frac{4}{5}(19 + 3.7)$

ſi $n = 4$, $\quad 141 = 51 + \frac{5}{6}(51 + 3.19)$

etc.

Coroll. 3.

10. Quoniam igitur in relationem, quae inter ternos terminos contiguos intercedit, ipſe exponens n ingreditur, hinc facile colligitur hanc ſeriem non ad genus recurrentium eſſe referendam.

Coroll. 4.

11. Inter quatuor autem continuos terminos P, Q, R et S relatio ab exponente n libera exhiberi poteſt, cum enim ex ternis prioribus ſit
$n = \frac{2R - 3Q - 3P}{3P + 2Q - R}$
erit ſimili modo $n + 1 = \frac{2S - 3R - 3Q}{3Q + 2R - S}$
vnde concludimus fore

$$S = R + Q + \frac{3P(Q + R) + 2QR}{6P + 3Q - R}$$

 quae

quae eſt relatio conſtans, qua per ternos quosque terminos contiguos ſequens definitur.

Scholion 1.

12. Inuenta lege, qua noſtrae progreſſionis quisque terminus a binis praecedentibus pendet, iam multo facilius hanc progreſſionem quousque lubuerit continuare licet. Ita cum dignitates x^{11} et x^{12} affectae ſint numeris 25653 et 73789, ſequentis x^{13} ob $n = 11$ coefficiens erit:

$$73789 + \tfrac{12}{13}(73789 + 3 \cdot 25653) = 212941$$

et dignitatis x^{14}

$$212941 + \tfrac{13}{14}(212941 + 3 \cdot 73789) = 616227$$

vnde noſtra progreſſio ad dignitatem viceſimam vsque continuata ita ſe habebit:

1	
$1x$	$25653x^{11}$
$3x^2$	$73789x^{12}$
$7x^3$	$212941x^{13}$
$19x^4$	$616227x^{14}$
$51x^5$	$1787607x^{15}$
$141x^6$	$5196627x^{16}$
$393x^7$	$15134931x^{17}$
$1107x^8$	$44152809x^{18}$
$3139x^9$	$128996853x^{19}$
$8953x^{10}$	$377379369x^{20}$

circa

circa quos numeros obſeruo nullum eorum eſſe per 5 diuiſibilem, dignitatum vero $x^{3\alpha+2}$ coefficientes eſſe per 3. diuiſibiles, dignitatum $x^{7\alpha+3}$ per 7. neque vero hinc quicquam circa indolem horum numerorum concludere licet. Verum ex lege progreſſionis hic inuenta eius ſummam, ſiquidem in infinitum continuetur, definire poterimus, cui fini ſequens problema deſtinatur.

Scholion 2.

13. Si noſtrae progreſſionis quilibet terminus a triplo antecedentis ſubtrahatur, differentiae talem progreſſionem conſtituunt:

1.2; 2.1; 3.2; 4.3; 5.6; 6.12; 7.26; 8.58; 9.134; 10.317; 11.766; 12.1883; 13.4698; 14.11871; 15.30330; 16.78249; 17.203622; 18.533955

pro qua generatim ſtatuamus:

$$mp; \quad (m+1)q; \quad (m+2)r$$

vbi primum notatu dignum occurrit, quod horum terminorum factores priores in ſerie numerorum naturali progrediantur, poſteriores vero ita ſint comparati, vt quilibet ex binis praecedentibus hoc modo conficiatur:

$$r = \frac{3mp + 2(m+1)q}{m+4}.$$

Problema 3.

14. Si ſeries noſtra

$$1 + x + 3x^2 + 7x^3 + 19x^4 + \text{etc.}$$

in infinitum continuetur, eius ſummam inueſtigare:

Solutio.

Cum relatio cuiusque termini ad binos antecedentes ſit definita, ſtatuamus:

$s = 1 + x + 3x^2 + \ldots + Px^n + Qx^{n+1} + Rx^{n+2} + \text{etc.}$

vbi notetur eſſe $(n+2)R - (2n+3)Q - 3(n+1)P = 0$ cui conditioni vt ſatisfaciamus, ſumamus differentiale:

$$\frac{ds}{dx} = 1 + 6x + \ldots + nPx^{n-1} + (n+1)Qx^n + (n+2)Rx^{n+1} \text{ etc.}$$

quod multiplicatum per $1 - 2x - 3xx$ praebet:

$$\frac{ds}{dx}(1 - 2x - 3xx) =$$

$$\begin{array}{llllll} 1 + 6x + 21xx & \ldots & + nPx^{n-1} & + (n+1)Qx^n & + (n+2)Rx^{n+1} \\ \quad\; - 2 \;\; - 12 & & & - 2nP & - (2n+2)Q \\ \qquad\quad - 3 & & & & - 3nP \end{array}$$

quae ſeries reducitur ad hanc:

$$1 + 4x + 6xx \ldots (Q + 3P)x^{n+1} + \text{etc.}$$

At ipſa ſeries propoſita per $1 + 3x$ multiplicata dat $s(1 + 3x) = 1 + 4x + 6xx \ldots\ldots (Q + 3P)x^{n+1}$ vnde manifeſtum eſt fore:

$$\frac{ds}{dx}(1 - 2x - 3xx) = s(1 + 3x) \text{ ideoque}$$

$\frac{ds}{s}$

$\frac{ds}{s} = \frac{dx(1+3x)}{1-2x-3xx}$, cuius integratio praebet

$$s = \frac{1}{\sqrt{(1-2x-3xx)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-3x)}}$$

quae eſt ipſa ſumma ſeriei propoſitae in infinitum continuatae.

Coroll. 1.

15. Liquet ergo ſeriei huius ſummam eſſe imaginariam niſi ſumatur $x < \frac{1}{3}$, caſu autem $x = \frac{1}{3}$ fieri infinitam. At ipſi x valores negatiuos tribuendo, puta $x = -y$, ſumma fit finita ſumendo $y < 1$, at caſu $y > 1$ imaginaria euadit. Ita ſtatuendo $x = -\frac{1}{2}$ fit

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8} + \frac{19}{16} - \frac{51}{32} + \frac{141}{64} - \text{etc.}$$

Coroll. 2.

16. Nunc ergo nouimus ſeriem noſtram quoque reſultare ſi formula irrationalis $(1-2x-3xx)^{-\frac{1}{2}}$ more ſolito in ſeriem euoluatur: quae formula cum ita repraeſentari poſſit $s = ((1-x)^2 - 4xx)^{-\frac{1}{2}}$, prodit:

$$s = \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1} \cdot \frac{xx}{(1-x)^3} + \frac{2 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^4}{(1-x)^5} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^6}{(1-x)^7} + \text{etc.}$$

ex cuius vlteriori euolutione oritur:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
s = 1 & +x & +x^2 & +x^3 & +x^4 & +x^5 & +x^6 & +x^7 & +x^8 & +x^9 & +x^{10} \\
 & & +2.1 & +2.3 & +2.6 & +2.10 & +2.15 & +2.21 & +2.28 & +2.36 & +2.45 \\
 & & & & +6.1 & +6.5 & +6.15 & +6.35 & +6.70 & +6.126 & +6.210 \\
 & & & & & & +20.1 & +20.7 & +20.28 & +20.84 & +20.210 \\
 & & & & & & & & +70.1 & +70.9 & +70.45 \\
 & & & & & & & & & & +252.1
\end{array}$$

Coroll.

Coroll. 3.

17 Hinc colligimus in genere dignitatis x^n coefficientem numericum ita expreſſum iri:

$$+ \frac{2}{1} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

quae forma non diſcrepat ab ea, quam problemate primo inuenimus.

Scholion.

18. Quodſi formam huius ſummae accuratius perpendamus, haud difficulter inde methodum multo latius patentem elicimus, cuius ope adeo haec poteſtas generalior $(a + bx + cxx)^n$ ita pertractari poterit, vt non ſolum termini medii ſingularum poteſtatum ſed etiam termini a mediis vtrinque aequidiſtantes aſſignari queant. Hanc ergo methodum in ſequente problemate ſum expoſiturus.

Problema 4.

19. Si trinomii $a + bx + cxx$ ſingulae poteſtates euoluantur, indeque tam termini medii, quam a mediis aequidiſtantes ſeorſim in ſeries diſponantur, ſingularum harum ſerierum naturam et ſummam inueſtigare.

Solutio.

Conſideretur formula iſta $\frac{1}{1 - y(a + bx + cxx)}$ quae euoluta praebet:

$$1 + y(a + bx + cxx) + yy(a + bx + cxx)^2 + y^3(a + bx + cxx)^3 \text{ etc.}$$

vbi

vbi cum trinomii propoſiti ſingulae poteſtates occurrant, a explicatis orietur:

$$1$$
$$y(a+bx+cxx)$$
$$y^2(a^2+2abx+2acx^2+2bcx^3+ccx^4)$$
$$+bb$$
$$y^3(a^3+3a^2bx+3a^2cx^2+6abcx^3+3bbcx^4+3bccx^5+c^3x^6)$$
$$+3ab^2+b^3+3acc$$
etc.

hinc ſi primo termini medii, tum vero termini a mediis vtrinque aequidiſtantes capiantur, naſcentur ſequentes ſeries:

$$1+bxy+(2ac+bb)xxyy+(6abc+b^3)x^3y^3+\text{ etc.}$$
$$y(a+cxx)(1+2bxy+(3ac+3bb)xxyy+\text{ etc.})$$
$$y^2(a^2+c^2x^4)(1+3bxy+\text{ etc.})$$
$$y^3(a^3+c^3x^6)(1+4bxy+\text{ etc.})$$
$$y^4(a^4+c^4x^8)(1+5bxy+\text{ etc.})$$
etc.

Omiſſis ergo his multiplicatoribus, quia in ſeriebus ipſis adſunt poteſtates producti xy, ponamus $xy=z$ et indicemus iſtas ſeries hoc modo:

$$1+bz+(2ac+bb)zz+(6abc+b^3)z^3=P$$
$$1+2bz+(3ac+3bb)zz+\text{ etc.}=Q$$
$$1+3bz+\text{ etc.}=R$$
$$1+4bz+\text{ etc.}=S$$
etc.

 ita

ita vt iam ob $y = \frac{z}{x}$, habeamus:

$$\frac{1}{1 - bz - z(\frac{a}{x} + cx)} = P + z(\frac{a}{x} + cx)Q + zz(\frac{aa}{xx} + ccxx)R$$
$$+ z^3(\frac{a^3}{x^3} + c^3x^3)S + \text{etc.}$$

multiplicetur vtrinque per $1 - bz - z(\frac{a}{x} + cx)$, et quoniam quantitates P, Q, R etc. a ſola z pendent, omnia membra ſecundum poteſtates ipſius x tam poſitiua quam negatiua diſponantur: quo facto obtinebimus:

$$\begin{array}{llll} 1 = P(1-bz) & + Qz(1-bz)cx & + Rzz(1-bz)c^2x^2 & + Sz^3(1-bz)c^3x^3 \\ & - Pz.\,cx & - Qzz.\,ccx^2 & - Rz^3c^3x^3 \\ - 2Qaczz & - Rz^3.\,accx & - Sz^4.\,ac^3x^2 & - Tz^5ac^4x^3 \\ & + Qz(1-bz)\frac{a}{x} & + Rzz(1-bz)\frac{a^2}{x^2} & + Sz^3(1-bz)\frac{a^3}{x^3} \\ & - Pz.\,\frac{a}{x} & - Qzz.\,\frac{aa}{xx} & - Rz^3.\,\frac{a^3}{x^3} \\ & - Rz^3ac.\,\frac{a}{x} & - Sz^4ac.\,\frac{aa}{xx} & - Tz^5ac.\,\frac{a^3}{x^3} \end{array}$$

vbi euidens eſt poteſtates negatiuas ipſius x iisdem conditionibus ad nihilum redigi ac poſitiuas. Hinc ergo ſequentes determinationes adipiſcimur:

$$Q = \frac{P(1 - bz) - 1}{2aczz}$$
$$R = \frac{Q(1 - bz) - P}{aczz}$$
$$S = \frac{R(1 - bz) - Q}{aczz}$$
$$T = \frac{S(1 - bz) - R}{aczz}$$
etc.

Vide-

Videmus ergo quantitates P, Q, R, S etc. ſecundum ſeriem recurrentem progredi, cuius ſcala relationis eſt:

$$\frac{1-bz}{aczz}; \quad -\frac{1}{aczz}$$

hinc ſi illis quantitatibus indices tribuantur:

$$\overset{0}{P}, \overset{1}{Q}, \overset{2}{R}, \overset{3}{S} \ldots\ldots \overset{n}{Z}$$

ita vt Z ſit ea, quae indici n conuenit, ex natura recurrentiae erit:

$$Z = A\left(\frac{1-bz-\surd((1-bz)^2-4aczz)}{2aczz}\right)^n + B\left(\frac{1-bz+\surd((1-bz)^2-4aczz)}{2aczz}\right)^n$$

vbi cum conſtet quantitatem Z eiusmodi ſerie exprimi, vt ſit:

$$Z = 1 + (n+1)bz + \ldots zz + \ldots z^3 + \ldots z^4 \text{ etc.}$$

vnde manifeſtum eſt neceſſario eſſe debere $B=0$, quia alioquin termini ex poſteriori membro orientur poteſtatibus negatiuis ipſius z affecti. Facto ergo $B=0$, erit:

$$Z = A\left(\frac{1-bz-\surd(1-2bz+(bb-4ac)zz)}{2aczz}\right)^n$$

Iam fiat $n=0$, ac neceſſe eſt prodire $A=P$, poſito autem $n=1$, effici debet:

$$A.\frac{1-bz-\surd(1-2bz+(bb-4ac)zz)}{2aczz} = Q.$$

Cum igitur ſit $A=P$ et $2aczzQ+1=P(1-bz)$ ſequitur fore:

$$P(1-bz)-P\surd(1-2bz+(bb-4ac)zz) = P(1-bz)-1$$

 ideoque

ideoque $P = \frac{1}{\sqrt{(1-2bz+(bb-4ac)zz)}}$.

Quocirca ſeriei noſtrae P, Q, R, S . . . Z terminus generalis eſt:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{(1-2bz+(bb-4ac)zz)}} \left(\frac{1-bz-\sqrt{(1-2bz+(bb-4ac)zz)}}{2acz z}\right)^n.$$

Poſito ergo $y = 1$ vt ſit $x = z$, ſi omnes poteſtates trinomii $a+bz+czz$ euoluantur, ſeries terminorum intermediorum $1+bz+(2ac+bb)zz$ etc. erit $= P$

terminorum autem a mediis, n locis in antecedentia remotorum ſumma eſt $= a^n Z$, totidem vero locis in conſequentia remotorum ſumma $= c^n z^n Z$. At omnium harum ſerierum iunctim ſumtarum ſumma eſt $= \frac{1}{1-a-bz-czz}$.

Coroll. 1.

20 Quantitates ergo P, Q, R, S etc. progreſſionem geometricam conſtituunt, cuius primus terminus eſt $P = \frac{1}{\sqrt{(1-2bz+(bb-4ac)zz)}}$, et denominator progreſſionis:

$$\frac{1-bz-\sqrt{(1-2bz+(bb-4ac)zz)}}{2aczz}.$$

Coroll. 2.

21. Si ſumamus $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$, prodit caſus ante tractatus quo poteſtates trinomii $1+z$

$1+z+zz$ conſiderauimus, quarum termini medii ſeriem conſtituunt, cuius ſumma eſt $= \frac{1}{\sqrt{(1-2z-3zz)}}$, vti ſupra inuenimus.

Problema 5.

22. Formulam in praecedente problemate inventam:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2bz+(bb-4ac)zz)}}\left(\frac{1-bz-\sqrt{(1-2bz+(bb-4ac)zz)}}{2aczz}\right)^n$$

in ſeriem conuertere, cuius termini ſecundum dignitates ipſius z procedant.

Solutio.

Sit breuitatis gratia $bb-4ac=e$, ac ponatur

$$s=\frac{1}{\sqrt{(1-2bz+ezz)}}\left(\frac{1-bz-\sqrt{(1-2bz+ezz)}}{2aczz}\right)^n$$

quam relationem inter z et s per differentiationem ab irrationalitate liberari oportet. Hunc in finem ſtatuatur:

$\frac{1-bz-\sqrt{(1-2bz+ezz)}}{2aczz}=v$ vt ſit $acvvzz-(1-bz)v+1=0$

vnde differentiando fit:

$$dv(2acvzz-1+bz)+vdz(2acvz+b)=0 \text{ ſeu}$$

$$dv\sqrt{(1-2bz+ezz)}=\frac{vdz}{z}(1-\sqrt{(1-2bz+ezz)})$$

ideoque $\frac{dv}{v}=\frac{dz}{z\sqrt{(1-2bz+ezz)}}-\frac{dz}{z}$.

Hinc illa aequatione logarithmice differentiata prodit

$$\frac{ds}{s}=\frac{dz(b-ez)}{1-2bz+ezz}-\frac{ndz}{z}+\frac{ndz}{z\sqrt{(1-2bz+ezz)}}.$$

 Pona-

Ponamus tantiſper $\frac{dt}{t} = \frac{ds}{s} + \frac{ndz}{z} - \frac{dz(b-ez)}{1-2bz+ezz}$, vt ſit $\frac{dt}{t} = \frac{ndz}{z\sqrt{(1-2bz+ezz)}}$, vnde quadrata ſumendo colligimus: $zzdt^2(1-2bz+ezz) = nn\mathrm{H}dz^2$, quae aequatio denuo differentiata poſito elemento dz conſtante dat:

$$zzddt(1-2bz+ezz) + zdtdz(1-3bz+2ezz) = nntdz^2$$

ſeu $\frac{ddt}{t} + \frac{dz(1-3bz+2ezz)}{z(1-2bz+ezz)} \cdot \frac{dt}{t} - \frac{nndz^2}{zz(1-2bz+ezz)} = 0.$

Iam cum ſit $\frac{ddt}{t} = d.\frac{dt}{t} + \frac{dt^2}{tt}$ erit

$$\frac{ddt}{t} = \frac{dds}{s} - \frac{ds^2}{ss} - \frac{ndz^2}{zz} + \frac{dz^2(e-2bb+2bez-eezz)}{(1-2bz+ezz)^2} + \frac{nndz^2}{zz} - \frac{2ndz^2(b-ez)}{z(1-2bz+ezz)}$$
$$+ \frac{ds^2}{ss} + \frac{2ndzds}{sz} - \frac{2dzds(b-ez)}{s(1-2bz+ezz)} + \frac{dz^2(bb-2bez+eezz)}{(1-2bz+ezz)^2}.$$

Facta ergo ſubſtitutione ſuperior aequatio in hanc abit formam:

$$\frac{dds}{s} + \frac{2ndz}{z}\cdot\frac{ds}{s} - \frac{2dz(b-ez)}{1-2bz+ezz}\cdot\frac{ds}{s} + \frac{n(n-1)dz^2}{zz} - \frac{2ndz^2(b-ez)}{z(1-2bz+ezz)} + \frac{dz^2(e-bb)}{(1-2bz+ezz)^2}$$
$$+ \frac{dz(1-3bz+2ezz)}{z(1-2bz+ezz)}\cdot\frac{ds}{s} + \frac{ndz^2(1-3bz+2ezz)}{zz(1-2bz+ezz)} - \frac{dz^2(b-(e+3bb)z+5bezz-2eez^3)}{z(1-2bz+ezz)^2}$$
$$- \frac{nndz^2}{zz(1-2bz+ezz)} = 0$$

vbi ſi termini per $(1-2bz+ezz)^2$ diuiſi in vnam ſummam colligantur, fractio per $1-2bz+ezz$ deprimi poterit, vnde facta reductione adipiſcimur:

$$\frac{dds}{s} + \frac{2ndz}{z}\cdot\frac{ds}{s} + \frac{dz(1-5bz+4ezz)}{z(1-2bz+ezz)}\cdot\frac{ds}{s} - \frac{nndz^2(2b-ez)}{z(1-2bz+ezz)} - \frac{3ndz^2(b-ez)}{z(1-2bz+ezz)}$$
$$- \frac{dz^2(b-2ez)}{z(1-2bz+ezz)} = 0$$

quae ordinata euadit:

$$zdds(1-2bz+ezz) + dzds(2n+1-(4n+5)bz+2(n+2)ezz)$$
$$-sdz^2((n+1)(2n+1)b-(n+1)(n+2)zz) = 0.$$

Cum

Cum nunc conſtet poſito $z=0$ fieri $s=1$, fingamus hanc ſeriem:

$$s=1+Az+Bzz+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\text{etc.}$$

qua ſerie ſubſtituta ſequens forma ad nihilum eſt redigenda:

$$\begin{array}{lllll}
 & 2Bz+6Czz & +12Dz^3 & +20Ez^4 \\
 & -4Bb & -12Cb & -24Db \\
 & & +2Be & +6Ce \\
(2n+1)A & +2(2n+1)B & +3(2n+1)C & +4(2n+1)D & +5(2n+1)E \\
 & -(4n+5)A & -2(4n+5)Bb & -3(4n+5)Cb & -4(4n+5)Db \\
 & & +2(n+2)Ae & +4(n+2)Be & +6(n+2)Ce \\
-(n+1)(2n+1)b & -(n+1)(2n+1)Ab & -(n+1)(2n+1)Bb & -(n+1)(2n+1)Cb & -(n+1)(2n+1)De \\
 & +(n+1)(n+2)e & +(n+1)(n+2)Ae & +(n+1)(n+2)Be & +(n+1)(n+2)Ce
\end{array}$$

vnde colligimus has determinationes:

$$A=(n+1)b$$

$$B=\frac{(n+2)((2n+3)Ab-(n+1)e)}{2(2n+2)}$$

$$C=\frac{(n+3)((2n+5)Bb-(n+2)Ae)}{3(2n+3)}$$

$$D=\frac{(n+1)((2n+7)Cb-(n+3)Be)}{4(2n+4)}$$

$$E=\frac{(n+5)((2n+9)Db-(n+4)Ce)}{5(2n+5)}$$

etc

vbi notetur eſſe $e=bb-4ac$. Sicque ſeriei quaeſitae ſinguli termini per binos praecedentes determinantur.

DE

DE MOTV RECTILINEO
TRIVM CORPORVM SE MVTVO ATTRAHENTIVM.

Auctore
L. EVLERO.



1.

Sint A, B, C maſſae trium corporum eorumque diſtantiae a puncto fixo O ad datum tempus t ponantur

$$OA=x,\quad OB=y \quad \text{et} \quad OC=z$$

vbiquidem ſumitur $y>x$ et $z>y$. Hinc motus principia praebent has tres aequationes:

I. $\frac{ddx}{ds^2}=\frac{B}{(y-x)^2}+\frac{C}{(z-x)^2}$;

II. $\frac{ddy}{dt^2}=\frac{-A}{(y-x)^2}+\frac{C}{(z-y)^2}$

III. $\frac{ddz}{dt^2}=\frac{-A}{(z-x)^2}-\frac{B}{(z-y)^2}$

vnde facile deducuntur binae aequationes integrabiles:

prior $Adx+Bdy+Cdz=Edt$ et $Ax+By+Cz=Et+F$

poſterior $\frac{Adx^2+Bdy^2+Cdz^2}{dt^2}=G+\frac{2AB}{y-x}+\frac{2AC}{z-x}+\frac{2BC}{z-y}$.

Hinc autem ob defectum tertiae aequationis integralis parum ad motus cognitionem concludere licet.

2. Sta-

2. Statuamus $x=y-p$ et $z=y+q$, vt p et q ſint quantitates poſitiuae: et prima integralis praebet:

$$(A+B+C)y-Ap+Cq=Et+F \text{ ideoque}$$

$$y=\frac{Ap-Cq+Et+F}{A+B+C}; \quad dy=\frac{Adp-Cdq+Edt}{A+B+C}$$

$$x=\frac{-(B+C)p-Cq+Et+F}{A+B+C}; \quad dx=\frac{-(B+C)dp-Cdq+Edt}{A+B+C}$$

$$z=\frac{Ap+(A+B)q+Et+F}{A+B+C}; \quad dz=\frac{Adp+(A+B)dq+Edt}{A+B+C}.$$

Hinc integralis ſecunda hanc induit formam:

$$\frac{A(B+C)dp^2+C(A+B)dq^2+2ACdpdq+EEdt^2}{(A+B+C)dt^2}=G+\frac{2AB}{p}+\frac{2AC}{p+q}+\frac{2BC}{q}$$

3. Faciamus vero easdem ſubſtitutiones in primis aequationibus differentio-differentialibus, quae iam ad duas reuocabantur:

$$\frac{-(B+C)ddp-Cddq}{(A+B+C)dt^2}=\frac{B}{pp}+\frac{C}{(p+q)^2}$$

$$\frac{Addp+(A+B)ddq}{(A+B+C)dt^2}=\frac{-A}{(p+q)^2}-\frac{B}{qq}$$

vnde colligitur: $\frac{ddp+ddq}{dt^2}=\frac{-A-C}{(p+q)^2}-\frac{B}{pp}-\frac{B}{qq}.$

Deinde vtrumque elementum ddp et ddq ſeorſim ita exprimitur:

1°. $\frac{ddp}{dt^2}=\frac{-A-B}{pp}-\frac{C}{(p+q)^2}+\frac{C}{qq}$

2°. $\frac{ddq}{dt^2}=\frac{A}{pp}-\frac{A}{(p+q)^2}-\frac{B-C}{qq}$

vnde oritur vna aequatio integralis ad hanc formam perducta:

$$\frac{B(Adp^2+Cdq^2)+AC(dp+dq)^2}{(A+B+C)dt^2}=G+\frac{2AB}{p}+\frac{2AC}{p+q}+\frac{2BC}{q}$$

quandoquidem in G poſtremus ille terminus EE comprehenditur.

 4. Cum

4. Cum igitur ſolutio ſit perducta ad duas aequationes differentio-differentiales inter p, q et t; inſigne lucrum obtineri eſt cenſendum, ſi has aequationes ad duas alias primi tantum gradus differentiales reuocare liceret. Hoc autem ſingulari artificio ſequentem in modum praeſtari poſſe comperi. Statuo $q = pu$, et binae aequationes differentio-differentiales ita repraeſententur:

$$d.\frac{dp}{dt} = \frac{dt}{pp}\left(-A - B - \frac{C}{(u+1)^2} + \frac{C}{uu}\right)$$

$$d.\frac{udp + pdu}{dt} = \frac{dt}{pp}\left(A - \frac{A}{(u+1)^2} - \frac{B-C}{uu}\right).$$

Iam artificium in hac ſubſtitutione conſiſtit, vt ponam $\frac{dp}{dt} = \frac{r}{\sqrt{p}}$ et $\frac{dq}{dt} = \frac{udp + pdu}{dt} = \frac{s}{\sqrt{p}}$; mox enim patebit his ſubſtitutionibus binas variabiles p et t ex calculo elidi poſſe ita vt tantum hae tres r, s et u relinquantur, per prima differentialia determinandae. Statim vero aequatio illa integralis ſupra inuenta adeo ad formam finitam redit hanc $\frac{B(Arr + Css) + AC(r+s)^2}{A+B+C}$ $= Gp + 2AB + \frac{2AC}{u+1} + \frac{2BC}{u}$ quae inſignem vſum afferre poterit.

5. Cum ſit $\frac{dp}{dt} = \frac{r}{\sqrt{p}}$ erit $dt = \frac{dp\sqrt{p}}{r}$, vnde noſtrae aequationes differentio-differentiales praebent:

$$\frac{dr}{\sqrt{p}} - \frac{rdp}{2p\sqrt{p}} = \frac{dp}{pr\sqrt{p}}\left(-A - B - \frac{C}{(u+1)^2} + \frac{C}{uu}\right)$$

$$\frac{ds}{\sqrt{p}} - \frac{sdp}{2p\sqrt{p}} = \frac{dp}{pr\sqrt{p}}\left(A - \frac{A}{(u+1)^2} - \frac{B-C}{uu}\right)$$

vnde fit:

$$dr = \frac{rdp}{2p} + \frac{dp}{pr}\left(-A - B - \frac{C}{(u+1)^2} + \frac{C}{uu}\right)$$

$$ds = \frac{sdp}{2p} + \frac{dp}{pr}\left(A - \frac{C}{(u+1)^2} - \frac{B-C}{uu}\right).$$

Praeterea

Praeterea vero habebitur:

$$udp + pdu = \frac{sdt}{\sqrt{p}} = \frac{sdp}{r}$$

ſicque fit $\frac{dp}{p} = \frac{rdu}{s - ru}$, quo valore ibi ſubſtituto fit

$$dr(s - ru) = \tfrac{1}{2}rrdu + du\left(-A - B - \frac{C}{(u+1)^2} + \frac{C}{uu}\right)$$

$$ds(s - ru) = \tfrac{1}{2}rsdu + du\left(A - \frac{A}{(u+1)^2} - \frac{B - C}{uu}\right)$$

ex quarum combinatione naſcitur:

$$\tfrac{1}{2}r(rds - sdr) + ds\left(-A - B - \frac{C}{(u+1)^2} + \frac{C}{uu}\right)$$
$$-dr\left(A - \frac{A}{(u+1)^2} - \frac{B - C}{uu}\right) = 0.$$

6. En ergo duas aequationes ſimpliciter differentiales inter ternas variabiles r, s et u, vnde ſi liceret r et s per u determinare, haberetur ſolutio problematis completa. Inde enim primo innoteſceret quantitas p ex formula $\frac{dp}{p} = \frac{rdu}{s - ru}$ hincque porro $q = pu$. Deinde vero tempus t daretur ex aequatione $dt = \frac{dp\sqrt{p}}{r} = \frac{pdu\sqrt{p}}{s - ru}$; Ex quibus tandem pro dato tempore t colligerentur diſtantiae x, y, z ex formulis §. 2 datis.

7. Cum binae aequationes differentiales inuentae ſint:

$$dr(s - ru) = \tfrac{1}{2}rrdu + du\left(-A - B \frac{C}{(u+1)^2} + \frac{C}{uu}\right)$$

$$ds(s - ru) = \tfrac{1}{2}rsdu + du\left(A - \frac{A}{(u+1)^2} - \frac{B - C}{uu}\right).$$

ſtatim patet ambabus ſatisfieri ſumendo quantitatem u conſtantem et $s - ru = 0$, vnde ſolutio obtinetur

T 2 parti-

Solutio particularis.

particularis. Sit ergo $u=\alpha$ et $s=\alpha r$, et aequatio ex combinatione nata praebet:

$$-(A+B)\alpha-\frac{C\alpha}{(\alpha+1)^2}+\frac{C}{\alpha}=A-\frac{A}{(\alpha+1)^2}-\frac{B-C}{\alpha\alpha} \text{ vel}$$

$$0=A\left(\alpha+1-\frac{1}{(\alpha+1)^2}\right)+B\left(\alpha-\frac{1}{\alpha\alpha}\right)+C\left(\frac{\alpha}{(\alpha+1)^2}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha\alpha}\right)$$

$$\text{ſeu } 0=\frac{A((\alpha+1)^3-1)}{(\alpha+1)^2}+\frac{B(\alpha^3-1)}{\alpha\alpha}+\frac{C(\alpha^3-(\alpha+1)^3)}{\alpha\alpha(\alpha+1)^2}$$

ideoque

$$C(1+3\alpha+3\alpha\alpha)=A\alpha^3(\alpha\alpha+3\alpha+3)+B(\alpha+1)^2(\alpha^3-1).$$

Quare quantitatem α ex hac aequatione quinti gradus definiri oportet:

$$(A+B)\alpha^5+(3A+2B)\alpha^4+(3A+B)\alpha^3-(B+3C)\alpha^2 \\ -(2B+3)\alpha-B-C=0.$$

Deinde vero relatio inter r et p ex hac aequatione eſt definienda:

$$dr=\frac{r\,dp}{2p}+\frac{dp}{pr}\left(-A-B-\frac{C}{(\alpha+1)^2}+\frac{C}{\alpha\alpha}\right)$$

ſeu poſito $A+B+\frac{C}{(\alpha+1)^2}-\frac{C}{\alpha\alpha}=\frac{1}{2}D$ ex hac

$$2\,dr=\frac{dp}{p}\left(r-\frac{D}{r}\right) \text{ ſeu } \frac{dp}{p}=\frac{2r\,dr}{rr-D} \text{ ita vt ſit}$$

$$p=\beta(rr-D), \text{ tum vero } q=\alpha\beta(rr-D) \text{ et } dt=\frac{dp\sqrt{p}}{r}$$

ſeu $dt=2\beta\,dr\sqrt{\beta(rr-D)}$ hinc

$$t=\beta r\sqrt{\beta(rr-D)}-\beta^2 D\int\frac{dr}{\sqrt{\beta(rr-D)}}.$$

8. Caſus hic particularis, quo ſolutio ſuccedit euolutionem diligentiorem meretur. Primum ergo obſeruo ex aequatione illa quinti gradus pro α ſemper valorem realem poſitiuum, eumque vnicum elici, cum vnica ſignorum variatio occurrat, neque igitur

igitur hic vlla ambiguitas locum habet, ſed valor ipſius α tanquam determinatus ſpectari poteſt, pendens a maſſis trium corporum A, B, C. Inuento autem numero α colligitur quantitas $D = 2(A+B) - \frac{2C(2\alpha+1)}{\alpha\alpha(\alpha+1)^2}$, vbi animaduerto quantitatem D nunquam euaneſcere poſſe. Si enim eſſet $D = 0$ foret $B = \frac{C(2\alpha+1)}{\alpha\alpha(\alpha+1)^2} - A$ quo valore ſubſtituto prodiret:

$$C(1+3\alpha+3\alpha\alpha) = A\alpha^3(\alpha\alpha+3\alpha+3) + \frac{C(2\alpha+1)(\alpha^3-1)}{\alpha\alpha} - A(\alpha+1)^2(\alpha^3-1)$$

ſeu $\frac{C}{\alpha\alpha}(\alpha^4+2\alpha^3+\alpha\alpha+2\alpha+1) = A(\alpha^4+2\alpha^3+\alpha\alpha+2\alpha+1)$

ideoque $C = A\alpha\alpha$ et $B = \frac{A(2\alpha+1)}{(\alpha+1)^2} - A = \frac{-A\alpha\alpha}{(\alpha+1)^2}$ foretque adeo maſſa B negatiua, quod eſt abſurdum. Multo minus quantitas D vnquam fieri poteſt negatiua. Poſito enim:

$$B = \frac{C(2\alpha+1)}{\alpha\alpha(\alpha+1)^2} - A - \Delta, \text{ proueniret}$$

$$\frac{C}{\alpha\alpha} = A - \frac{\Delta(\alpha+1)^2(\alpha^3-1)}{\alpha^4+2\alpha^3+\alpha^2+2\alpha+1} \text{ hincque}$$

$$B = \frac{C(2\alpha+1)}{\alpha\alpha(\alpha+1)^2} - \frac{C}{\alpha\alpha} - \frac{\Delta(\alpha^5+3\alpha^4+3\alpha^3)}{\alpha^4+2\alpha^3+\alpha\alpha+2\alpha+1}$$

ſeu B multo magis eſſet quantitas negatiua, cum valor ipſius α neceſſario ſit poſitiuus.

9. Cum ergo D neceſſario ſit quantitas poſitiua, ponatur $D = aa$, ſi etiam numerus α ſpectetur vt datus, maſſae trium corporum ita ſe habebunt, vt ſit:

$$B = \frac{\alpha^3(\alpha\alpha+3\alpha+3)aa}{2(\alpha^4+2\alpha^3+\alpha\alpha+2\alpha+1)} - \frac{C}{[\alpha+1]^2} \text{ et}$$

$$A = \frac{C}{\alpha\alpha} - \frac{(\alpha+1)^2(\alpha^3-1)aa}{2(\alpha^4+2\alpha^3+\alpha\alpha+2\alpha+1)}$$

ex quo neceſſe eſt vt quantitas $\frac{2C(\alpha^4+2\alpha^3+\alpha\alpha+2\alpha+1)}{\alpha\alpha(\alpha+1)^2aa}$ intra hos limites $(\alpha+1)^3-1$ et α^3-1 contineatur. Introducta ergo quantitate aa cum numero α in calculum, duo caſus ſunt perpendendi, prout $\mathfrak{C}$ fuerit quantitas poſitiua vel negatiua, quos ſeorſim euoluamus.

Caſus I. 10. Sit primo $\mathfrak{C}=+nn$, erit $p=nn(rr-aa)$ et $q=\alpha nn(rr-aa)$, vnde cum conſtantes, E et F nihilo aequales ſtatuere liceat, loca trium corporum A, B, C, quorum iam centrum grauitatis in O exiſtit, ita per r definiuntur, vt ſit:

$$x = OA = \frac{-nn(rr-aa)}{A+B+C}(B+C+C\alpha)$$

$$y = OB = \frac{nn(rr-aa)}{A+B+C}(A-C\alpha)$$

$$z = OC = \frac{nn(rr-aa)}{A+B+C}(A+(A+B)\alpha).$$

At relatio inter r et tempus t ita ſe habet:

$$t = n^3r\sqrt{(rr-aa)} - n^3aa\int\frac{dr}{\sqrt{(rr-aa)}} \text{ ſeu}$$

$$t = n^3r\sqrt{(rr-aa)} - n^3aa\,l\frac{r+\sqrt{(rr-aa)}}{\Delta}.$$

ſumta conſtante $\Delta=a$, tempore $t=0$, erat $r=a$, tumque omnia corpora in centro grauitatis erant coniuncta, vnde quaſi celeritatibus infinitis erant exploſa, vt eae fuerint inter ſe vt quantitates $-B-C-C\alpha$, $A-C\alpha$, $A+(A+B)\alpha$ tum vero labente tempore t quantitas r continuo magis increſcit; quouis

quouis autem tempore celeritas cuiusque corporis ex formula $\frac{dt}{dr} = 2n^3 \sqrt{(rr - aa)}$ innoteſcit. Notandum autem diſtantias corporum perpetuo inter ſe eandem proportionem conſeruare.

11. Sit nunc $\mathfrak{C} = -nn$ erit $p = nn(aa - rr)$ et $q = \alpha nn(aa - rr)$ et per r loca corporum vt ante ita determinantur, vt ſit: Caſus II.

$$x = OA = \frac{-nn(aa - rr)}{A + B + C}(B + (1 + \alpha)C)$$
$$y = OB = \frac{nn(aa - rr)}{A + B + C}(A - C\alpha)$$
$$z = OC = \frac{nn(aa - rr)}{A + B + C}(A(\alpha + 1) + B\alpha).$$

Pro tempore autem t obtinetur, $dt = 2n^3 dr \sqrt{(aa - rr)}$ ſeu $t = n^3 r \sqrt{(aa - rr)} + n^3 aa \int \frac{dr}{\sqrt{(aa - rr)}}$ hinc $t = n^3 r \sqrt{(aa - rr)} + n^3 aa \,\text{Ang. ſin.} \frac{r}{a}$.

Quodſi ergo ponatur $\text{Ang. ſin.} \frac{r}{a} = \Phi$, vt ſit $r = a \,\text{ſin.}\, \Phi$ erit $t = n^3 aa(\Phi + \text{ſin.}\,\Phi \,\text{coſ.}\,\Phi)$, et diſtantiae inter ſe proportionales ad quoduis tempus ſunt vt $\text{coſ.}\,\Phi^2$. Vnde ſi initio quo $t = 0$ fuerit $\Phi = 0$, ſicque $r = 0$, et $\frac{dt}{dr} = 2n^3 a$, erant tum diſtantiae:

$$x = \frac{-nnaa}{A + B + C}(B + (1 + \alpha)C)$$
$$y = \frac{nnaa}{A + B + C}(A - C\alpha)$$
$$z = \frac{nnaa}{A + B + C}(A(\alpha + 1) + B\alpha)$$

ibique corpora in quiete. Sumto autem $\Phi = 90^\circ$, ſeu elapſo tempore $t = n^3 aa.\, 90^\circ$, corpora in centro grauitatis conueniunt celeritate infinita.

DE

DE MOTV CORPORIS AD DVO CENTRA VIRIVM FIXA ATTRACTI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quaeſtionem hic tractare aggredior, quae ab omnibus, qui adhuc in determinatione motuum a viribus centripetis genitorum operam ſuam conſumſerunt, fruſtra tentata vires adeo Analyſeos ſuperare videbatur. Quanquam enim ſummo *Neutono* motus corporum ad vnicum virium centrum attractorum felici ſucceſſu eſt definitus, quippe quem in ſectione conica fieri demonſtrauit, ſi vis centripeta rationem duplicatam inuerſam diſtantiarum ſequatur, tamen ſtatim atque haec quaeſtio ad duo virium centra extenditur, nulla via patere eſt viſa ad ſolutionem perueniendi. Ad formulas quidem analyticas quaeſtio facile deducitur, quae cum differentialia ſecundi gradus inuoluant, primo per integrationem ad differentialia primi gradus eſt aſcendendum, quod negotium iam inſignibus difficultatibus implicatur; atque his etiam ſuperatis, tum demum

demum quantitatum variabilium multitudo et complicatio vix vllam ſpem ad earum ſeparationem pertingendi relinquit, vnde lineam curuam a corpore deſcriptam aſſignare liceret.

2. Cum autem ſemper cuiusquam problematis, quod a ſummis ingeniis fruſtra eſt tentatum, ſolutio maximi eſt momenti, tum vero haec quaeſtio ad eam Analyſcos partem pertinet, ex qua ſola nunc quidem omnia Aſtronomiae incrementa ſunt expectanda; quam ob cauſam, ſolutionem iſtius quaeſtionis eo confidentius iactare non dubito, quod ad eam nonniſi grauiſſimis impedimentis remotis tandem mihi quidem penetrare contigerit. Minime etiam eſt dubitandum, quin artificia analytica, quibus in hoc negotio ſum vſus, ad enodationem aliorum problematum huius generis, plurimum lucis ſint allatura.

3. Conſidero igitur duo centra virium, quorum vtrumque attrahat in ratione duplicata diſtantiae reciproca, quandoquidem aliae virium attrahentium hypotheſes omni vſu deſtituuntur: ac ſi corpus quodpiam initio vtcunque fuerit proiectum, eius motum ſecuturum viamque in qua incedet, inueſtigare conſtitui. Hic quidem primum obſeruo ſi motus directio ſemel fuerit cum binis virium centris in eodem plano, vniuerſum motum, in eodem plano abſolutum iri. Atque hunc caſum iam

 aliquot

aliquot ab hinc annis ita expediui, vt non ſolum pro curua a corpore deſcripta conſtructionem ope quadraturae curuae ſatis ſimplicis exhibuerim, verum etiam innumerabiles caſus elicuerim, quibus haec curua adeo algebraica euadat. Nunc igitur vt huic quaeſtioni plene ſatisfaciam, inueſtigationem meam quoque ad eos caſus extendam, quibus corporis motus non in eodem plano cum binis centris virium abſoluitur; vbi quidem nouae eaeque maximae difficultates ſucceſſui aduerſantur, quas ſuperari oportet.

Status Quaeſtionis.

Tab. III. Fig. 1. 4. Sint igitur A et B centra virium, ſeu duo corpora in his punctis fixa, quae attrahant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ſecundum maſſas, quae iisdem litteris A et B denotentur; Statuaturque diſtantia $AB = a$.

Tum vero vtcunque aliud quoddam corpus initio fuerit proiectum, id nunc quidem elapſo tempore $= \tau$ verſetur in Z vnde ad planum quodpiam fixum per puncta A et B ductum demittatur perpendiculum ZY, ductaque ex Y ad rectam AB normali YX, vocentur lineae:

$$ZY = z;\; YX = y;\; AX = x;\; BX = t$$

ita vt ſit $t + x = a$, ideoque $dt + dx = 0$.

Ad motus igitur cognitionem requiritur, vt ad quoduis tempus hae quantitates determinari queant.

5. Vocentur porro diſtantiae $AZ = v$ et $BZ = u$ vt ſit $vv = xx + yy + zz$ et $uu = tt + yy + zz$. Iam quia corpus Z vrgetur ad centra virium A et B viribus $\frac{A}{vv}$ et $\frac{B}{uu}$; hinc motus principia ſequentes ſuppeditant formulas differentio-differentiales ſumto temporis elemento $d\tau$ conſtante:

I. $\frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{Ax}{v^3} + \frac{Bt}{u^3}$ ſeu $\frac{ddt}{d\tau^2} = +\frac{Ax}{v^3} - \frac{Bt}{u^3}$

II. $\frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{Ay}{v^3} - \frac{By}{u^3}$ et

III. $\frac{ddz}{d\tau^2} = -\frac{Az}{v^3} - \frac{Bz}{u^3}$,

ex quibus tribus aequationibus omnia motus phaenomena ſunt deducenda. Nihil autem inde concludere licet niſi ante omnia totidem aequationes differentiales primi gradus inde per integrationem eliciantur.

Inueſtigatio aequationum differentialium primi gradus motum corporis quaeſitum determinantium.

6. Ex aequationibus quidem II et III ſtatim vna aequatio differentialis primi gradus obtinetur; illa enim per z haec vero per y multiplicata, differentia dat:

$\frac{yddz - zddy}{d\tau^2} = 0$, vnde colligitur $d\tau = \alpha(ydz - zdy)$,

 ex

ex qua diſcimus, ſi motus corporis in planum ad rectam AB normale proiiciatur, areas in hoc plano circa punctum quo a recta AB traiicitur deſcriptas eſſe tempori proportionales; quod quidem ex prima indole motuum a viribus centripetis oriundorum per ſe eſt manifeſtum.

7. Alia etiam aequatio integralis haud difficulter eruitur multiplicando aequationem I per $dx = -dt$; II per dy, et III per dz; tum enim his aequationibus in vnam ſummam collectis, ob

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv \quad \text{et} \quad t\,dt + y\,dy + z\,dz = u\,du$$

habebimus hanc aequationem:

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz}{d\tau^2} = \frac{-A\,dv}{vv} - \frac{B\,du}{uu}$$

quae integrata praebet:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,d\tau^2} = \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}$$

ita vt iam duas aequationes differentiales primi gradus ſimus adepti; tertia autem qua adhuc indigemus, maiorem ſagacitatem poſtulat.

8. Ex prima, quatenus duplici forma exhibetur, et ſecunda geminas aequationes elicimus iſtas:

$$\frac{x\,ddy - y\,ddx}{d\tau^2} = \frac{-By(x+t)}{u^3} = \frac{-Bay}{u^3} \quad \text{et}$$

$$\frac{t\,ddy - y\,ddt}{d\tau^2} = \frac{-Ay(x+t)}{u^3} = \frac{-Aay}{v^3}$$

ſimili

ſimili modo prima aequatio cum tertia combinata ſequentes nobis ſuppeditat:

$$\frac{xddz - zddx}{d\tau^2} = \frac{-Bz(x+t)}{u^3} = \frac{-Baz}{u^3}$$

$$\frac{tddz - zddt}{d\tau^2} = \frac{-Az(x+t)}{v^3} = \frac{-Aaz}{v^3}$$

vnde quidem parum lucri redundare videtur. Has autem quatuor aequationes ſequenti modo repraeſentari plurimum intererit:

$$\text{I. } \frac{d.(xdy - ydx)}{d\tau^2} = \frac{-Bay}{u^3}; \quad \text{III. } \frac{d.(xdz - zdx)}{d\tau^2} = \frac{-Baz}{u^3}$$

$$\text{II. } \frac{d.(tdy - ydt)}{d\tau^2} = \frac{-Aay}{v^3}; \quad \text{IV. } \frac{d.(tdz - zdt)}{d\tau^2} = \frac{-Aaz}{v^3}.$$

9. Ex harum prima et ſecunda formemus aequationem iſtam:

$$\frac{(tdy-ydt)d.(xdy-ydx)}{d\tau^2} + \frac{(xdy-ydx)d.(tdy-ydt)}{d\tau^2} = \frac{-Aay(xdy-ydx)}{v^3} - \frac{Bay(tdy-ydt)}{u^3}$$

ſimilique modo ex tertia et quarta hanc:

$$\frac{(tdz-zdt)d.(xdz-zdx)}{d\tau^2} + \frac{(xdz-zdx)d.(tdz-zdt)}{d\tau^2} = \frac{-Aaz(xdz-zdx)}{v^3} - \frac{Baz(tdz-zdt)}{u^3}$$

vbi prius membrum vtriusque aequationis eſt integrabile, ibi ſcilicet integrale eſt $= \frac{(xdy-ydx)(tdy-ydt)}{d\tau^2}$, hic vero $= \frac{(xdz-zdx)(tdy-ydt)}{d\tau^2}$; poſteriora vero membra in neutra integrationem admittunt At vero hic commode vſu venit, vt ambo poſteriora membra in vnam ſummam collecta integrationem admittant.

10. Cum enim ſit:

$$d.\frac{x}{v} = d.\frac{x}{\sqrt{(xx+yy+zz)}} = \frac{y(ydx - xdy) + z(zdx - xdz)}{v^3} \text{ et}$$

$$d.\frac{t}{u} = d.\frac{s}{\sqrt{(tt+yy+zz)}} = \frac{y(ydt - tdy) + z(zdt - tdz)}{u^3}$$

 euidens

euidens eſt, illorum poſteriorum membrorum iunctim ſumtorum integrale fore $= \frac{Aax}{v} + \frac{Bat}{u} +$ Conſt. Quocirca hinc ſequentem aequationem integratam nanciſcimur:

$$\frac{(xdy-ydx)(tdy-ydt)+(xdz-zdx)(tdz-zdt)}{d\tau^2} = \frac{Aax}{v} + \frac{Bat}{u} + Da.$$

11. En ergo tres aequationes differentiales primi gradus, quibus motus corporis quaeſitus continetur, ſcilicet:

$$\text{I.} \quad d\tau = \alpha(ydz - zdy)$$

$$\text{II.} \quad \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2d\tau^2} = \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}$$

$$\text{III.} \quad \frac{(xdy-ydx)(tdy-ydt)+(xdz-zdx)(tdz-zdt)}{d\tau^2} = a\left(\frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D\right)$$

in quas tres nouae conſtantes arbitrariae ſunt ingreſſae. Hinc autem iam facile tempus τ exterminatur, quo facto via a corpore deſcripta binis ſequentibus aequationibus determinatur:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\alpha\alpha(ydz - zdy)^2} = \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}$$

$$\frac{(xdy-ydx)(tdy-ydt)+(xdz-zdx)(tdz-zdt)}{\alpha\alpha(ydz-zdy)^2} = a\left(\frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D\right)$$

ad quarum reſolutionem totum negotium eſt perductum.

12. In his aequationibus ternae adhuc inſunt variabiles x, y et z, dum reliquae t, v et u per eas dantur; quae autem tantopere ſunt inter ſe permixtae, vt nulla methodus eas reſoluendi tentari queat. Omnino autem neceſſe eſt, vt vna variabili eliſa, ex his binis aequationibus vna eliciatur

duas

duas tantum variabiles inuoluens; ad hoc autem vtique idonea transformatio requiritur, cum ſatis ſit perſpicuum nullam harum trium x, y, z eliminari poſſe, praeter quam quod nulla foret ratio, cur vna potius quam reliquae ad hoc eligeretur.

Reductio aequationum inuentarum ad vnicam binas tantum variabiles continentem.

13. Ad hunc ſcopum perueniemus, ſi loco veriabilium y et z in calculum introducamus rectam ZX a puncto Z ad rectam AB normaliter ductam vna cum angulo ZXY, quem haec recta cum plano aſſumto ABY facit. Sit ergo

recta $ZX = w$ et angulus $ZXY = \Phi$

erit $z = w \sin.\Phi$ et $y = w \cos.\Phi$, tum ob $yy + zz = ww$ habebitur $v = \sqrt{(xx + ww)}$ et $u = \sqrt{(tt + ww)}$.

Porro vero ob $dz = dw \sin.\Phi + w d\Phi \cos.\Phi$ et $dy = dw \cos.\Phi - w d\Phi \sin.\Phi$ hinc colligimus $y dz - z dy = ww d\Phi$, ita vt iam prodeat elementum temporis $d\tau = a ww d\Phi$.

14. Deinde vero cum ſit $dy^2 + dz^2 = dw^2 + ww d\Phi^2$, prior aequatio induit hanc formam:

$$\frac{dx^2 + dw^2 + ww d\Phi^2}{2 \alpha \alpha w^4 d\Phi^2} = \frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a}.$$

Pro altera vero aequatione euoluatur primo numerator membri antecedentis, et quia fit:

$(x dy$

$$(xdy-ydx)(tdy-ydt)=txdy^2-xydtdy-tydxdy+yydtdx$$
$$(xdz-zdx)(tdz-zdt)=txdz^2-xzdtdz-tzdxdz+zzdtdx$$

ob $dy^2+dz^2=dw^2+wwd\Phi^2$; $ydy+zdz=wdw$ et $yy+zz=ww$ erit hic numerator

$$tx(dw^2+wwd\Phi^2)-(xdt+tdx)wdw+wwdtdx$$

ex quo altera aequatio transformabitur in hanc:

$$\frac{txdw^2+txwwd\Phi^2-(xdt+tdx)wdw+wwdtdx}{\alpha\alpha w^4 d\Phi^2}=a\left(\frac{Ax}{v}+\frac{Bt}{u}+D\right).$$

15. Iam ex binis hiſce aequationibus facile eliminatur elementum $d\Phi^2$, ſiquidem hac ſubſtitutione id ſumus lucrati vt ipſe angulus Φ exceſſerit. Prior autem aequatio dat:

$$d\Phi^2=(dx^2+dw^2):\left(2\alpha\alpha w^4\left(\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}\right)-ww\right)$$

poſterior vero:

$$d\Phi^2=\frac{(txdw^2-(xdt+tdx)wdw+wwdtdx)}{\alpha\alpha a w^4\left(\frac{Ax}{v}+\frac{Bt}{u}+D\right)-txww}$$

vbi pro analogia obſeruanda notetur ob $dt=-dx$ eſſe $dx^2=-dtdx$. His igitur valoribus inter ſe aequatis reſultabit aequatio binas tantum variabiles x ſeu t et w inuoluens.

16. Ad calculum contrahendum ſtatuamus:

$$\frac{A}{v}+\frac{B}{u}+\frac{C}{a}=\frac{P}{a} \quad \text{et} \quad \frac{Ax}{v}+\frac{Bt}{u}+D=Q$$

atque reperimus:

$$(-dxdt+dw^2)(\alpha\alpha aQww-tx)=$$
$$(txdw^2-(xdt+tdx)wdw+wwdtdx)\left(\frac{2\alpha\alpha}{a}Pww-1\right)$$

vnde

vnde euoluendo concludimus:

$$dt\,dx\left(\tfrac{2\alpha\alpha}{a}Pw^4 + \alpha\alpha a Qww - tx - ww\right)$$
$$-(x\,dt + t\,dx)w\,dw\left(\tfrac{2\alpha\alpha}{a}Pww - 1\right)$$
$$+ ww\,dw^2\left(\tfrac{2\alpha\alpha}{a}Ptx - \alpha\alpha a Q\right) = 0$$

quae aequatio adhuc ingentibus difficultatibus laborat cum ob variabilium confuſam permixtionem, tum vero ob valores irrationales quantitatum v et u.

Transformatio aequationis modo inuentae.

17. Cum introductio angulorum ſaepenumero calculos mirifice contrahere ſoleat, idem hic faciamus, vocemusque angulos:

$BAZ = \eta$ et $ABZ = \theta$, eritque hinc

$AX = x = w\cot.\eta$ et $BX = t = w\cot.\theta$

vnde ob $x + t = a$ deducimus ſtatim:

$$w = \frac{a}{\cot.\eta + \cot.\theta} = \frac{a\,ſin.\eta\,ſin.\theta}{ſin.(\eta+\theta)}$$ et differentiando

$$dw = a\left(\frac{d\eta}{ſin.\eta^2} + \frac{d\theta}{ſin.\theta^2}\right) : (\cot.\eta + \cot.\theta)^2 = \frac{a(d\eta\,ſin.\theta^2 + d\theta\,ſin.\eta^2)}{ſin.(\eta+\theta)^2}$$

Deinde oritur $x = \frac{a\cot.\eta}{\cot.\eta + \cot.\theta} = \frac{a\,coſ.\eta\,ſin.\theta}{ſin.(\eta+\theta)}$ hincque

$$dx = a\left(\frac{d\theta\cot.\eta}{ſin.\theta^2} - \frac{d\eta\cot.\theta}{ſin.\eta^2}\right) : (\cot.\eta + \cot.\theta)^2 = \frac{a(d\theta\,ſin.\eta\,coſ.\eta - d\eta\,ſin.\theta\,coſ.\theta)}{ſin.(\eta+\theta)^2}$$

et $$dx^2 + dw^2 = \frac{aa(d\eta^2\,ſin.\theta^2 + d\theta^2\,ſin.\eta^2 - 2\,d\eta\,d\theta\,ſin.\eta\,ſin.\theta\,coſ.(\eta+\theta))}{ſin.(\eta+\theta)^4}$$

pro priore valore ipſius $d\Phi^2$.

18. Pro altero valore notetur eſſe numeratorem:

$(t\,dw - w\,dt)(x\,dw - w\,dx)$

 cuius

cuius valor facillime elicitur ex formulis:

$$\frac{t}{w} = \cot.\,\theta \quad \text{et} \quad \frac{x}{w} = \cot.\,\eta \quad \text{vnde fit}$$

$$\frac{t\,dw - w\,dt}{ww} = -\frac{d\theta}{\text{ſin.}\,\theta^2} \quad \text{et} \quad \frac{x\,dw - w\,dx}{ww} = -\frac{d\eta}{\text{ſin.}\,\eta^2}$$

ſicque numerator ille fit:

$$\frac{w^4\,d\eta\,d\theta}{\text{ſin.}\,\eta^2\,\text{ſin.}\,\theta^2} = \frac{a^4\,d\eta\,d\theta\,\text{ſin.}\,\eta^2\,\text{ſin.}\,\theta^2}{\text{ſin.}\,(\eta+\theta)^4}.$$

Porro autem eſt $v = \frac{w}{\text{ſin.}\,\eta} = \frac{a\,\text{ſin.}\,\theta}{\text{ſin.}(\eta+\theta)}$ et $u = \frac{a\,\text{ſin.}\,\eta}{\text{ſin.}(\eta+\theta)}$.

Ergo $\frac{A}{v} + \frac{B}{u} + \frac{C}{a} = \frac{A\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta)}{a\,\text{ſin.}\,\theta} + \frac{B\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta)}{a\,\text{ſin.}\,\eta} + \frac{C}{a}$

et $\frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D = A\,\text{coſ.}\,\eta + B\,\text{coſ.}\,\theta + D.$

19. Sit inſuper $\alpha\alpha = \frac{m}{a}$, eritque pro priore valore ipſius $d\Phi^2$ denominator $= 2maa\left(\frac{A\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta)}{\text{ſin.}\,\theta} + \frac{B\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta)}{\text{ſin.}\,\eta} + C\right)\frac{\text{ſin.}\,\eta^4\,\text{ſin.}\,\theta^4}{\text{ſin.}\,(\eta+\theta)^4} - \frac{aa\,\text{ſin.}\,\eta^2\,\text{ſin.}\,\theta^2}{\text{ſin.}\,(\eta+\theta)^2}$

et pro poſteriori $= m(A\,\text{coſ.}\,\eta + B\,\text{coſ.}\,\theta + D)\frac{a^4\,\text{ſin.}\,\eta^4\,\text{ſin.}\,\theta^4}{\text{ſin.}\,(\eta+\theta)^4} - \frac{a^4\,\text{ſin.}\,\eta^3\,\text{ſin.}\,\theta^3\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta}{\text{ſin.}\,(\eta+\theta)^4}.$

Quocirca ambo valores ita ſe habebunt:

$$d\Phi^2 = \frac{d\eta^2\,\text{ſin.}\,\theta^2 + d\theta^2\,\text{ſin.}\,\eta^2 - 2\,d\eta\,d\theta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta\,\text{coſ.}\,(\eta+\theta)}{2m\,\text{ſin.}\,\eta^3\,\text{ſin.}\,\theta^3(A\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta) + B\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta) + C\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta) - \text{ſin.}\,\eta^2\,\text{ſin.}\,\theta^2\,\text{ſin.}\,(\eta+\theta)^2}$$

$$d\Phi^2 = \frac{d\eta\,d\theta}{m\,\text{ſin.}\,\eta^2\,\text{ſin.}\,\theta^2\,(A\,\text{coſ.}\,\eta + B\,\text{coſ.}\,\theta + D) - \text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta}.$$

His binis valoribus coaequatis, aequatio oritur primo quidem ſatis intricata, quae autem notis angulorum proprietatibus in ſubſidium vocatis, ad ſequentem formam reducitur:

$$d\eta^2\,\text{ſin.}\,\theta^2 + d\theta^2\,\text{ſin.}\,\eta^2 = \frac{d\eta\,d\theta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta(2m(A\,\text{coſ.}\,\theta + B\,\text{coſ.}\,\eta + C\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta + D\,\text{coſ.}\,(\eta+\theta)) - \text{coſ.}\,\eta^2 - \text{coſ.}\,\theta^2)}{m\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta(A\,\text{coſ.}\,\eta + B\,\text{coſ.}\,\theta + D) - \text{coſ.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\theta}$$

20. Parum equidem hac ſubſtitutione profeciſſe videor, cum in hac aequatione non ſolum binae varia-

variabiles η et θ maxime ſint inter ſe permixtae, ſed etiam adhuc neceſſe ſit per radicis extractionem ipſam differentialium $d\eta$ et $d\theta$ rationem elicere, quo quidem ad formulam irrationalem maxime intricatam peruenitur. Quo minus ergo reſolutio huius aequationis ſperanda videtur, eo magis mirari oportet ſequentem ſubſtitutionem, cuius beneficio adeo ad aequationem, in qua variabiles admittunt ſeparationem deducimur.

Conſtructio huius aequationis per ſeparationem variabilium.

21. Singulari prorſus ſubſtitutione inopinato hunc ſcopum ſum aſſecutus, poſui enim tang. $\frac{1}{2}\eta = \sqrt{pq}$ et tang. $\frac{1}{2}\theta = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, vnde ſequentes promanant determinationes:

$$\text{ſin.}\,\eta = \frac{2\sqrt{pq}}{1+pq};\quad \text{coſ.}\,\eta = \frac{1-pq}{1+pq};\quad \text{ſin.}\,\theta = \frac{2\sqrt{pq}}{p+q};\quad \text{coſ}\,\theta = \frac{q-p}{p+q}$$

$$\text{ſin.}(\eta+\theta) = \frac{2(1-p)(1+q)\sqrt{pq}}{(p+q)(1+pq)};\quad \text{coſ.}(\eta+\theta) = \frac{(q-p)(1-pq)-4pq}{(p+q)(1+pq)}$$

$$x = \frac{a(1-pq)}{(1-p)(1+q)};\quad t = \frac{a(q-p)}{(1-p)(1+q)};\quad w = \frac{2a\sqrt{pq}}{(1-p)(1+q)};$$

$$v = \frac{a(1+pq)}{(1-p)(1+q)};\quad u = \frac{a(p+q)}{(1-p)(1+q)},$$

hincque differentiando elicimus:

$$d\eta = \frac{p\,dq+q\,dp}{(1+pq)\sqrt{pq}};\quad d\theta = \frac{q\,dp-p\,dq}{(p+q)\sqrt{pq}}$$

$$d\eta\,\text{ſin.}\,\theta = \frac{2(p\,dq+q\,dp)}{(p+q)(1+pq)};\quad d\theta\,\text{ſin}\,\eta = \frac{2(q\,dp-p\,dq)}{(p+q)(1+pq)}$$

$$d\eta^2\,\text{ſin.}\,\theta^2 + d\theta^2\,\text{ſin.}\,\eta^2 = \frac{8(qq\,dp^2+pp\,dq^2)}{(p+q)^2(1+pq)^2};\quad d\eta\,d\theta\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\theta = \frac{4(qq\,dp^2-pp\,dq^2)}{(p-q)^2(1+pq)^2}.$$

22. Si iam has expreſſiones in binis pro $d\Phi^2$ inuentis valoribus ſubſtituamus, reperiemus:

$$\text{I. } d\Phi^2 = \frac{(p+q)(1+pq)}{4ppqq} \cdot \frac{qdp^2(1+q)^2 + pdq^2(1-p)^2}{8mpq\left(\frac{A(1-p)(1+q)}{1+pq} + \frac{B(1-p)(1+q)}{p+q} + C\right) - (1-p)^2(1+q)^2}$$

$$\text{II. } d\Phi^2 = \frac{(p+q)(1+pq)}{4ppqq} \cdot \frac{qqdp^2 - ppdq^2}{4mpq\left(\frac{A(1-pq)}{1+pq} + \frac{B(q-p)}{p+q} + D\right) - (q-p)(1-pq)}$$

quibus inuicem coaequatis per operoſos admodum ac taedioſos calculos tandem adipiſcimur hanc aequationem:

$$dp^2(4m(B-A)q(1-qq)+8mCqq-4mDq(1+q)^2-(1-qq^2)) = dq^2(4m(A+B)p(1-pp)+8mCpp+4mDp(1-p)^2-(1-pp)^2)$$

in qua ambae variabiles p et q manifeſto a ſe inuicem ſeparari poſſunt.

23. Cum autem huc per tantas ambages peruenerim, dubium eſt nullum, quin via planior eodem perueniendo pateat, quam quidem ſine hac preuia euolutione vix ſuſpicari licuiſſet. Nunc autem cum ſubſtitutiones hic in vſum vocatae praebeant $v+u = \frac{a(1+p)}{1-p}$ et $v-u = \frac{a(1-q)}{1+q}$, facile colligitur, ſi $v+u$ et $v-u$ pro binis nouis variabilibus introducantur, inde tandem aequationem, in qua variabiles a ſe inuicem ſint ſeparatae, reſultare debere. Cum igitur pulchrius ſit vnica ſubſtitutione hunc ſcopum attingere, iam totum negotium ſequenti modo ſum expediturus.

Methodus ſuccinctior ad aequationem ſeparabilem perueniendi.

24. Poſito igitur ſtatim $\alpha\alpha = \frac{m}{a}$, et introducendo rectam $ZX = w$ cum angulo $YXZ = \Phi$, vt ſit $y = w\,\text{coſ.}\Phi$ et $z = w\,\text{ſin.}\Phi$, habemus primo elementum temporis $d\tau = wwd\Phi\sqrt{\frac{m}{a}}$; et aequationes reſoluendae erunt:

I. $dx^2 + dw^2 + wwd\Phi^2 = \frac{2m}{aa}w^4 d\Phi^2\left(\frac{Aa}{v} + \frac{Ba}{u} + C\right)$

II. $(xdw - wdx)(tdw - wdt) + txwwd\Phi^2 = mw^4 d\Phi^2\left(\frac{Ax}{v} + \frac{Bt}{u} + D\right)$

Nunc ergo ſequenti ſubſtitutione vtamur:

$$v = \tfrac{1}{2}a(r+s) \quad \text{et} \quad u = \tfrac{1}{2}a(r-s)$$

vt ſit $v + u = ar$ et $v - u = as$

indeque colligimus:

$$x = \frac{aa + vv - uu}{2a} = \tfrac{1}{2}a(1+rs) \text{ et } t = \tfrac{1}{2}a(1-rs)$$

atque $w = \sqrt{(vv - xx)} = \frac{1}{2}a\sqrt{(rr-1)(1-ss)}$.

25. Differentialibus ergo ſumendis reperimus:

$$dx = \tfrac{1}{2}a(rds + sdr);\quad dt = -\tfrac{1}{2}a(rds + sdr)$$

atque $dw = \frac{a(rdr(1-ss) - sds(rr-1))}{2\sqrt{(rr-1)(1-ss)}}$.

vnde fit:

$$dx^2 + dw^2 = \frac{aa(rr-ss)(dr^2(1-ss) + ds^2(rr-1))}{4(rr-1)(1-ss)}$$

ſeu $\frac{dx^2 + dw^2}{ww} = \frac{(rr-ss)(dr^2(1-ss) + ds^2(rr-1))}{(rr-1)^2(1-ss)^2}$.

Tum vero:

$$x\,dw - w\,dx = \frac{aa(r+s)(dr(1-ss) - ds(rr-1))}{4\sqrt{(rr-1)(1-ss)}}$$

$$t\,dw - w\,dt = \frac{aa(r-s)(dr(1-ss) + ds(rr-1))}{4\sqrt{(rr-1)(1-ss)}}$$ hincque

$$\frac{(x\,dw - w\,dx)(t\,dw - w\,dt)}{ww} = \frac{aa(rr-ss)(dr^2(1-ss)^2 - ds^2(rr-1)^2)}{4(rr-1)^2(1-ss)^2}.$$

26. His valoribus ſubſtitutis noſtrae aequationes in ſequentes transformabuntur:

$$\text{I. } \frac{(rr-ss)(dr^2(1-ss) + ds^2(rr-1))}{(rr-1)^2(1-ss)^2} + d\Phi^2 = \frac{2m}{aa}w^2\,d\Phi^2\left(\frac{2A}{r+s} + \frac{2B}{r-s} + C\right)$$

$$\text{II. } \frac{aa(rr-ss)(dr^2(1-ss)^2 - ds^2(rr-1)^2)}{4(rr-1)^2(1-ss)^2} + \tfrac{1}{4}aa(1-rrss)\,d\Phi^2 =$$
$$m w^2\,d\Phi^2\left(\frac{A(1+rs)}{r+s} + \frac{B(1-rs)}{r-s} + D\right)$$

ſeu vtramque adhuc per $ww = \frac{1}{4}aa(rr-1)(1-ss)$ diuidendo:

$$\text{I. } \frac{2(rr-ss)(dr^2(1-ss) + ds^2(rr-1))}{(rr-1)^3(1-ss)^3} = m\,d\Phi^2\left(\frac{2A}{r+s} + \frac{2B}{r-s} + C\right) - \frac{2\,d\Phi^2}{(rr-1)(1-ss)}$$

$$\text{II. } \frac{(rr-ss)(dr^2(1-ss)^2 - ds^2(rr-1)^2)}{(rr-1)^3(1-ss)^3} = m\,d\Phi^2\left(\frac{A(1+rs)}{r+s} + \frac{B(1-rs)}{r-s} + D\right) - \frac{(1-rrss)\,d\Phi^2}{(rr-1)(1-ss)}.$$

27. Hinc iam vtriusque differentialis dr et ds ratio ad $d\Phi$ definiri poteſt; ſcilicet

haec combinatio I. $(rr-1)$ + II. 2 dat

$$\frac{2(rr-ss)^2(1-ss)dr^2}{(rr-1)^3(1-ss)^3} = m\,d\Phi^2(2Ar + 2Br + C(n-1) + 2D) - \frac{2rr\,d\Phi^2}{rr-1}$$

haec vero I. $(1-ss)$ + II. 2 dat

$$\frac{2(rr-ss)^2(rr-1)ds^2}{(rr-1)^3(1-ss)^3} = m\,d\Phi^2(-2As + 2Bs + C(1-ss) - 2D) - \frac{2ss\,d\Phi^2}{1-ss}.$$

Nunc illam per hanc diuidendo efficitur:

$$\frac{(1-ss)dr^2}{(rr-1)ds^2} = \frac{2m(B+A)r + mC(rr-1) + 2mD - \frac{2rr}{rr-1}}{2m(B-A)s + mC(1-ss) - 2mD - \frac{2ss}{1-ss}}$$

Conſe-

Conſequenter aequatio ſeparata ita erit comparata:

$$\frac{dr}{\surd(m(rr-1)(2(B+A)r+C(rr-1)+2D)-2rr)} = \frac{ds}{\surd(m(1-ss)(2(B-A)s+C(1-ss)-2D)-2ss)}$$

vnde per quadraturas relatio inter binas variabiles r et s definiri poteſt.

28. Statuamus breuitatis gratia:

$$\surd(m(rr-1)((B+A)r+\tfrac{1}{2}C(rr-1)+D)-rr)=R$$
$$\surd(m(1-ss)((B-A)s+\tfrac{1}{2}C(1-ss)-D)-ss)=S$$

vt aequatio noſtra ſeparata ſit; $\frac{dr}{R}=\frac{ds}{S}$,

et binae praecedentes aequationes fient:

$$\frac{(rr-ss)^2dr}{(rr-1)^2(1-ss)^2}=RRd\Phi^2 \text{ ſeu } d\Phi=\frac{(rr-ss)dr}{(rr-1)(1-ss)R}$$
$$\frac{(rr-ss)^2ds^2}{(rr-1)^2(1-ss)^2}=SSd\Phi^2 \text{ ſeu } d\Phi=\frac{(rr-ss)ds}{(rr-1)(1-ss)S}$$

hincque elementum temporis ob

$$\alpha ww=\tfrac{1}{4}a\surd am.(rr-1)(1-ss)$$

ita exprimetur:

$$d\tau=\tfrac{1}{4}a\surd ma.\frac{(rr-ss)dr}{R} \text{ vel } d\tau=\tfrac{1}{4}a\surd ma.\frac{(rr-ss)ds}{S}.$$

29. Vt etiam angulus Φ per formulas ſimpliciter integrales exhiberi poſſit, binarum formularum differentialium pro $d\Phi$ inuentarum prior multiplicetur per $\frac{1-ss}{rr-ss}$ poſterior vero per $\frac{rr-1}{rr-ss}$, et productorum ſumma dabit:

$$d\Phi=\frac{dr}{(rr-1)R}+\frac{ds}{(1-ss)S} \text{ ideoque } \Phi=\int\frac{dr}{(rr-1)R}+\int\frac{ds}{(1-ss)S}$$

ſimili modo ob $\frac{dr}{R}=\frac{ds}{S}$ pro tempore fiet:

$$d\tau=\frac{a\surd ma}{4}\left(\frac{rrdr}{R}-\frac{ssds}{S}\right) \text{ ideoque } \tau=\frac{a\surd ma}{4}\left(\int\frac{rrdr}{R}-\int\frac{ssds}{S}\right)$$

quae

quae eſt problematis ſolutio aequae ſimplex ac perfecta, cum hinc ad quoduis tempus τ ex conſtructa aequatione $\int \frac{dr}{R} = \int \frac{ds}{S}$ non ſolum vtraque variabilis r et s, indeque diſtantiae v et u ſed etiam angulus Φ aſſignari poſſint.

30. Eo maiore autem haec ſolutio attentione digna eſt, quod non ſolum motum corporis in eodem plano, quem caſum equidem iam ante aliquot annos euolui, complectatur, ſed etiam ad omnes plane motus, qui quidem in corpus pro motus ipſi initio impreſſi ratione cadere poſſunt extendatur. Quare quo vis huius ſolutionis clarius perſpiciatur, primo quidem eam ad caſum, quo motus corporis in eodem plano abſoluitur, in quo bina virium centra ſunt ſita, accommodabo; vbi ſimul inſignia quaedam huius motus phaenomena annotabo, dum fieri poteſt, vt corpus adeo in ſectione conica, circa bina virium centra tanquam focos deſcripta moveatur, de quo quidem caſu non dubito, quin iam ab aliis ſit obſeruatus. Deinde vero imprimis docebo ſimile phaenomenon etiam in motu non ad idem planum relato, contingere poſſe, vt corpus in ſuperficie ſphaeroidis elliptici vel conoidis hyperbolici circumferatur.

I. Caſus,

I. Caſus, quo corpus in eodem plano motum ſuum peragit.

31. Eiusmodi ſcilicet hic planum intelligitur, in quo ſimul ambo virium centra A et B ſint ſita. Cum igitur angulus Φ ſit conſtans, ideoque nihilo aequalis aſſumi poſſit, vt motus in ipſo tabulae plano fieri concipiatur, ſitque perpendiculum ZY $= z = 0$; ob $d\Phi = 0$ neceſſe eſt vt tam R quam S fiat quantitas infinita. Ne autem ſimul temporis elementum $d\tau$ euaneſcat, manifeſtum eſt quantitatem m infinitam ſtatui debere. Si enim altera conſtantium C et D infinita ſumeretur, celeritas corporis fieret infinite magna, quem caſum vtique hinc excludi conuenit.

32. Hunc ergo caſum adipiſcimur ponendo $m = \infty$ tum vero poſito ad abbreuiandum:

$$\sqrt{(rr-1)((B+A)r+\tfrac{1}{2}C(rr-1)+D)} = P$$
$$\sqrt{(1-ss)((B-A)s+\tfrac{1}{2}C(1-ss)-D)} = Q$$

erit aequatio noſtra principalis $\int\frac{dr}{P} = \int\frac{ds}{Q}$, qua natura curuae a corpore deſcriptae determinatur, et quae non diſcrepat ab ea, quam iam pridem inueneram. Pro ipſo autem motu cognoſcendo prodit haec temporis determinatio; $\tau = \frac{a\sqrt{a}}{4}\left(\int\frac{rrdr}{P} - \int\frac{ssds}{Q}\right)$: quam quidem formulam tum temporis per plures ambages eram conſecutus. Ibi quidem innumerabi-

 les

les caſus, quibus curua adeo fit algebraica, aſſignavi, quibus hic idcirco non immoror, verum hic caſus multo ſimpliciores expendam, quibus corpus adeo vel in ellipſi vel hyperbola promouetur.

De motu corporis in ellipſi.

33. Cum pertigerimus ad hanc aequationem $\frac{dr}{P} = \frac{ds}{Q}$ ſeu $Q\,dr - P\,ds = 0$, euidens eſt huic aequationi ſatisfieri ſi ſit r eiusmodi quantitas conſtans, quae ſimul reddat $P = 0$. Cum autem P binas conſtantes arbitrarias C et D contineat, pro lubitu ipſi r valor conſtans puta $r = n$ tribui poteſt, indeque ſtatui oportet:

$$(nn-1)((B+A)n + \tfrac{1}{2}C(nn-1) + D) = 0$$

vnde conſtans D ita definitur, vt ſit:

$$D = -(B+A)n - \tfrac{1}{2}C(nn-1)$$

altera autem C adhuc indeterminata manere videtur, cum tamen hoc caſu, quo curua per aequationem $r = n$ ſeu $v + u = na$ determinatur, etiam in motu nihil indeterminati relinqui poſſit.

34. Iam dudum autem obſeruaui, huiusmodi aequatione differentiali $Q\,dr - M\,ds(r-n)^{\lambda} = 0$, propoſita, valorem $r = n$ minime pro integrale haberi poſſe, niſi exponens λ ſit vnitati aequalis vel ea maior. Quare vt noſtro caſu valor $r = n$ locum habeat, non ſufficit vt formula

$(rr-1)$

$$(rr-1)((B+A)r+\tfrac{1}{2}C(rr-1)+D)$$

factorem habeat $r-n$ quia inde quantitatis P factor tantum eſſet $(r-n)^{\frac{1}{2}}$, ſed neceſſe eſt, vt etiam $(r-n)^{2}$ eius ſit factor, ſeu quod idem eſt, vt illius formulae differentiale:

$$2rdr((B+A)r+\tfrac{1}{2}C(rr-1)+D)+dr(rr-1)(B+A+Cr)$$

factorem habeat $r-n$. Hinc igitur facto $r=n$ fit

$$C=-\tfrac{1}{n}(B+A),\text{ ideoque } D=-\tfrac{(B+A)(nn+1)}{2n}.$$

35. His iam valoribus ſubſtitutis concluditur:

$$Q=\sqrt{(1-ss)}((B-A)s-\tfrac{(B+A)(1-ss)}{2n}+\tfrac{(B+A)(nn+1)}{2n})\text{ ſeu}$$
$$Q=\sqrt{(1-ss)}((B-A)s+\tfrac{(B+A)(nn+ss)}{2n})$$

vnde pro motu corporis in ellipſi elementum temporis ita exprimitur, vt ſit:

$$d\tau=\frac{\pm a\sqrt{a}}{4}\cdot\frac{(nn-ss)ds\sqrt{2n}}{\sqrt{(1-ss)(2n(B-A)s+(B+A)(nn+ss))}}$$

quod cum elemento curuae comparatum:

$$\sqrt{(dx^2+dw^2)}=\frac{ads\sqrt{(nn-ss)}}{2\sqrt{(1-ss)}}$$

praebet celeritatem corporis in puncto Z:

$$\frac{\sqrt{(dx^2+dw^2)}}{d\tau}=\frac{2\sqrt{(2n(B-A)s+(B+A)(nn+ss))}}{\sqrt{2na}(nn-ss)}\text{ ſeu}$$
$$\frac{\sqrt{(dx^2+dw^2)}}{d\tau}=\frac{2\sqrt{(A(n-s)^2+B(n+s)^2)}}{\sqrt{2na}(nn-ss)}.$$

36. Curua igitur a corpore deſcripta eſt ellipſis, cuius bini foci in ipſis virium centris A et B exiſtunt, et axis transuerſus eſt $v+u=na$, et coniugatus $=a\sqrt{(nn-1)}$. Atque in huiusmodi el-

 lipſi

lipſi corpus ad vtrumque ſocum attractum libere moueri poteſt, dummodo ipſi initio eiusmodi celeritas fuerit impreſſa, vt deinceps pro quouis loco Z eius celeritas prodeat $= \frac{2\surd(A(n-s)^2+B(n+s)^2)}{\surd 2na(nn-ss)}$, ſeu $= \surd\frac{2}{a}\cdot\frac{Auu+Bvv}{vu(v+u)} = \surd\frac{2}{a}\cdot\frac{vu}{v+u}\left(\frac{A}{vv}+\frac{B}{uu}\right)$.

In vertice ergo foco A propiore, vbi $s=1$, eſt celeritas $= \surd\frac{2}{na}\left(\frac{n-1}{n+1}A+\frac{n+1}{n-1}B\right)$, in altero vero vertice foco B propiori vbi $s=-1$, eſt celeritas $= \surd\frac{2}{na}\left(\frac{n+1}{n-1}A+\frac{n-1}{n+1}B\right)$.

Ad axem vero coniugatum celeritas eſt $= \frac{2n\surd(A+B)}{n\surd 2na} = \surd\frac{2(A+B)}{na}$.

De motu corporis in Hyperbola.

37. Hyperbola oritur, ſi s conſtans aſſumatur. Sit ergo $s=n$ ſeu $v-u=na$, atque vt hic valor ſatisfaciat tam haec formula:

$$(1-ss)((B-A)s+\tfrac{1}{2}C(1-ss)-D)$$

quam eius differentialis, ita debet eſſe comparata vt poſito $s=n$, in nihilum abeat. Primo ergo erit $(B-A)-Cn=0$ ſeu $C=\frac{B-A}{n}$, tum vero $D=(B-A)n + \frac{(B-A)(1-nn)}{2n}$ ſeu $D=\frac{(B-A)(1+nn)}{2n}$; vnde conficitur $P=\surd(rr-1)\left((B+A)r+\frac{(B-A)(nn+rr)}{2n}\right)=\surd(rr-1).\frac{B(r+n)^2+A(r-n)^2}{2n}$ hincque $d\tau = \frac{a\surd a}{4}\int\frac{(rr-nn)dr\surd 2n}{\surd(rr-1)(A(r-n)^2+B(r+n)^2)}$ vnde motus ratio facile colligitur, quoniam haec formu-

la

la ex praecedente naſcitur ſi loco n et r ſcribantur $-n$ et $-s$.

Axis quidem transuerſus huius hyperbolae eſt $u-v=na$ exiſtente $n<1$, et puncto A et B ſunt eius foci.

II. Caſus quo corpus non in eodem plano mouetur.

Ac primo quidem de motu in ſphaeroide elliptico.

38. Simili modo circa formulas generales ſupra inuentas eſt operandum; ac primo aequationi $\frac{dr}{R}=\frac{ds}{S}$ ſatisfieri poteſt ponendo $r=n$, vt ſit $v+u=na$, ideoque punctum Z perpetuo verſetur in ſuperficie ſphaeroidis elliptici ex rotatione ellipſis circa axem maiorem, in quo puncta A et B ſunt foci geniti. Tum autem facto $r=n$ non ſolum quantitas R ſed etiam eius differentiale euaneſcere debet, vnde ſequentes duae aequationes naſcuntur.

I. $m(nn-1)((B+A)n+\frac{1}{2}C(nn-1)+D)-nn=0$

II. $2mn((B+A)n+\frac{1}{2}C(nn-1)+D)$
$+m(nn-1)((B+A)+Cn)-2n=0$

quae altera ex prima per eliminationem quantitatis D praebet:

$$\frac{2n^3}{nn-1}-2n+m(nn-1)(A+B+Cn)=0$$

ſeu $\frac{2n}{m(nn-1)^2}+A+B+Cn=0$.

 Ergo

Ergo $C = -\frac{1}{n}(A+B) - \frac{2}{m(nn-1)^2}$; tum vero eſt
$D = -\frac{(A+B)(nn+1)}{2n} + \frac{nn+1}{m(nn-1)}$.

39. Definitis his binis conſtantibus C et D et facta ſubſtitutione tandem nanciſcimur:

$$S = \sqrt{\left(\frac{m(1-ss)}{2n}(A(n-s)^2 + B(n+s)^2) - \frac{(nn-ss)^2}{(nn-1)^2}\right)}$$

ex quo angulus $ZXY = \Phi$ ex hac formula differentiali definiri debet $d\Phi = \frac{(nn-ss)ds}{(nn-1)(1-ss)S}$ ſiue hac
$d\Phi = \frac{ds}{(nn-1)(1-ss)} : \sqrt{\left(\frac{m(1-ss)}{2n}\left(\frac{A}{(n+s)^2} + \frac{B}{(n-s)^2}\right) - \frac{1}{(nn-1)^2}\right)}$ ſeu
$d\Phi = \frac{ds}{1-ss} : \sqrt{\left(\frac{m(nn-1)^2(1-ss)}{2n}\left(\frac{A}{(n+s)^2} + \frac{B}{(n-s)^2}\right) - 1\right)}$.
Pro tempore autem habetur:

$$d\tau = \tfrac{1}{4}a\sqrt{ma}.\frac{(nn-ss)ds}{S} \quad \text{ſeu}$$

$$d\tau = \tfrac{1}{4}a\sqrt{ma}.(nn-1)ds : \sqrt{\left(\frac{m(nn-1)^2(1-ss)}{2n}\left(\frac{A}{(n+s)^2} + \frac{B}{(n-s)^2}\right) - 1\right)}.$$

De motu ſuper conoide hyperbolico.

40. Hic caſus ex formulis generalibus deducitur ponendo $s = n$ vt ſit $v - u = na$, proditque hyperbola circa ambos focos A et B deſcripta cuius axis transuerſus eſt $= na$, exiſtente $n < 1$, tum vero haec hyperbola circa axem reuoluta id conoides generabit, in cuius ſuperficie corpus Z mouebitur: Perſpicuum autem eſt formulas praecedentes ad hunc caſum transferri, ſi ibi loco n et s ſcribatur $-n$ et $-r$. Quare poſito

$$R = \sqrt{\left(\frac{m(rr-1)}{2n}(A(r-n)^2 + B(r+n)^2) - \frac{(rr-nn)^2}{(1-nn)^2}\right)}$$

pro

pro angulo Φ obtinetur :

$$d\Phi = \frac{(rr - nn)dr}{(1 - nn)(rr - nn)R}$$

pro tempore vero τ :

$$d\tau = \frac{a\sqrt{ma}}{4} \cdot \frac{(rr - nn)dr}{R}.$$

41. Etſi autem his duobus caſibus ſuperficies, in qua corpus motum ſuum peragit facillime aſſignatur, eius tamen vera via, quam percurret, vix algebraice definiri poſſe videtur, propterea quod anguli Φ ſinum ex formulis inuentis algebraice exprimere non licet: neque tamen adhuc aſſeuerare auſim, hoc nonniſi transcendenter praeſtari poſſe. Pro motu quidem in elliptoide ſi ponamus $\frac{an}{m(nn-1)} = M$, angulus Φ ita ſimplicius exprimitur vt ſit:

$$d\Phi = \frac{ds(nn - ss)\sqrt{M}}{(1-ss)\sqrt{(A(1-ss)(n-s)^2 + B(1-ss)(n+s)^2 - M(nn-ss)^2)}}$$

vbi quidem obſeruo ſi ſit $B = 0$, quo quidem caſu integrale aliunde patet fore:

$$\frac{A}{M}\operatorname{coſ.}(\zeta - \Phi)^2 + (nn - 1)\operatorname{ſin}(\zeta - \Phi)^2 = \frac{(n+s)^2}{1 - ss} \quad \text{ſeu}$$

$$\operatorname{coſ.} 2(\zeta - \Phi) = \frac{M((nn+1)(1+ss) + 4ns) - A(1 - ss)}{(A - (nn-1)M)(1 - ss)} \quad \text{ſiue}$$

$$\operatorname{coſ.}(\zeta - \Phi) = \frac{(1 + ns)\sqrt{M}}{\sqrt{(A-(nn-1)M)(1-ss)}} \text{ et } \operatorname{ſin.}(\zeta - \Phi) = \frac{\sqrt{(A(1-ss) - M(n+s)^2)}}{\sqrt{(A-(nn-1)M)(1-ss)}}.$$

42. In genere etiam, ſi fuerit vel $A = 0$ vel $B = 0$, quoniam motus corporis ad vnicum centrum virium attracti algebraice aſſignari poteſt, neceſſe eſt vt formulae noſtrae integrationem admittant, etiamſi ratio integrandi minus perſpiciatur. Quam ob rem hic ipſe caſus haud contemnendum vſum

in

in Analyſi praeſtare eſt cenſendus, cum inde formularum, quae primo intuitu integrationi vehementer aduerſari videntur, integralia tamen commode exhiberi queant. Haud ergo abs re fore arbitror ſi hos caſus accuratius examini ſubiecero.

Applicatio formularum inuentarum ad caſum, quo altera virium centripetarum euaneſcit.

43. Statuamus ergo $B = 0$, ita vt ſit:

$$R = \sqrt{(m(rr-1)(Ar+\tfrac{1}{2}C(rr-1)+D)-rr)} \text{ et}$$
$$S = \sqrt{(m(1-ss)(-As+\tfrac{1}{2}C(1-ss)-D)-ss)}$$

atque ad motum corporis definiendum ſequentes aequationes reſolui oportet:

$$\text{I.} \quad \frac{dr}{R} = \frac{ds}{S}$$
$$\text{II.} \quad d\Phi = \frac{(rr-ss)dr}{(rr-1)(1-ss)R} \text{ ſeu } \Phi = \int \frac{dr}{(rr-1)R} + \int \frac{ds}{(1-ss)S}$$
$$\text{III.} \quad d\tau = \frac{a\sqrt{ma}}{4} \cdot \frac{(rr-ss)dr}{R} \text{ ſeu } \tau = \frac{a\sqrt{ma}}{4}\left(\int \frac{rrdr}{R} - \int \frac{ssds}{S}\right)$$

vbi certe nulla methodus eſt obuia has aequationes tractandi, cum tamen aliunde earum integralia innoteſcant, quae igitur conſideraſſe plurimum intererit.

44. Quoniam vis centripeta in B euaneſcit, tam rectae AB poſitio, quam quantitas $AB = a$, precario in calculum inducitur, et corpus mouebitur in

in plano per centrum virium A tranſeunte. Sit ergo recta AP interſectio huius plani cum plano tabulae, et quia punctum Z in illo exiſtit plano, ſi ab Y ad rectam AP ducatur normalis YP, iungaturque recta ZP pariter ad AP normalis angulus ZPY erit inclinatio orbitae deſcriptae ad planum tabulae, ideoque conſtans. Statuamus ergo angulos conſtantes; $BAP = \gamma$ et $ZPY = \delta$. Tum ſit orbitae ſemiparameter $= b$, et excentricitas $= e$, ob $AZ = v$ erit ex natura ſectionum, $v = \frac{b}{1 + e\,coſ.\,w}$ denotante w anomaliam veram. Sit ergo AE linea abſidum et angulus $PAE = \zeta$ erit $w = PAZ - \zeta$, ideoque $coſ.\,w = \frac{AP.\,coſ.\,\zeta + PZ\,ſin.\,\zeta}{v}$ vnde fit $v + e.\,AP\,coſ.\,\zeta + e.\,PZ\,ſin.\,\zeta = b$, hincque Tab. III. Fig. 2.

$$AP = \frac{(b - v)\,coſ.\,\zeta + ſin.\,\zeta.\,\sqrt{(ee\,v^2 - (b - v)^2)}}{e}$$

et $$PZ = \frac{(b - v)\,ſin.\,\zeta - coſ.\,\zeta\,\sqrt{(ee\,v\,v - (b - v)^2)}}{e}.$$

45. His binis valoribus inuentis ex poſteriori cum angulo $ZPY = \delta$ erit

$$PY = PZ\,coſ.\,\delta \text{ et } ZY = PZ\,ſin.\,\delta$$

deinde ex illo cum angulo $BAP = \gamma$ colligitur:

$$AX = AP\,coſ.\,\gamma + PY\,ſin.\,\gamma \text{ et } XY = AP\,ſin.\,\gamma - PY\,coſ.\,\gamma,$$

ideoque ob angulum $ZXY = \phi$ erit:

$$tang.\,\phi = \frac{PZ\,ſin.\,\delta}{AP\,ſin.\,\gamma - PY\,coſ.\,\gamma} = \frac{PZ\,ſin.\,\delta}{AP\,ſin.\,\gamma - PZ\,coſ.\,\gamma\,coſ.\,\delta}.$$

Temporis autem elementum $d\tau$ eſt proportionale formulae:

$$AP.\,d.\,PZ - PZ.\,d.\,AP = \frac{-b\,v\,d\,v}{\sqrt{(ee\,v\,v - (b - v)^2)}}$$

 ita

ita vt ſit $d\tau = \frac{\alpha b v dv}{\sqrt{(eevv - (b-v)^2)}}$

at pro angulo Φ habetur:

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{(b-v)\,\text{ſin.}\,\delta\,\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\delta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\sqrt{(eevv-(b-v)^2)}}{(b-v)(\text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta - \text{coſ.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta) + (\text{ſin.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta + \text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta)\sqrt{(eevv-(b-v)^2)}}$$

vnde etiam valor ipſius $d\Phi$ per dv exprimi poteſt.

46. Porro ob $AX = AP\,\text{coſ.}\,\gamma + PZ\,\text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\delta$ erit:

$$BX = a - AP\,\text{coſ.}\,\gamma - PZ\,\text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\delta$$

hincque $BZ^2 = uu = BX^2 + vv - AX^2 = vv + a(BX - AX)$ ſeu $uu - vv = aa - 2a(AP\,\text{coſ.}\,\gamma + PZ\,\text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\delta)$ hincque

$$\frac{e}{2a}(aa + vv - uu) = (b-v)(\text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta)$$
$$+ (\text{coſ.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta)\sqrt{(eevv - (b-v)^2)}$$

ſit iam $v = \frac{1}{2}a(r+s)$ et $u = \frac{1}{2}a(r-s)$ eritque

$$\tfrac{1}{2}ea(1+rs) = (b - \tfrac{1}{2}a(r+s))(\text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta)$$
$$+ (\text{coſ.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta)\sqrt{(\tfrac{1}{4}eeaa(r+s)^2 - (b - \tfrac{1}{2}a(r+s))^2)}$$

47. Quo hanc aequationem facilius euoluamus, ponamus breuitatis gratia:

$$\text{coſ.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta = \mu \text{ et } \text{coſ.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\delta = \nu$$

et aequatio ad rationalitatem perducta huiusmodi formam induet:

$$E + 2Frs + Grrss + 2H(r+s) + 2Irs(r+s) + K(rr+ss) = 0$$

exiſtente:

$$E = \tfrac{1}{4}eeaa - \mu eab + (\mu\mu + \nu\nu)bb$$
$$F = \tfrac{1}{4}(\mu\mu + \nu\nu)aa - \tfrac{1}{2}\mu eab$$

G = $\frac{1}{4}$

$$G = \tfrac{1}{4}eeaa$$
$$H = \tfrac{1}{4}\mu eaa - \tfrac{1}{2}(\mu\mu + \nu\nu)\,ab$$
$$I = \tfrac{1}{4}\mu eaa$$
$$K = \tfrac{1}{4}(\mu\mu + \nu\nu)aa - \tfrac{1}{4}\nu\nu eeaa$$

et haec aequatio pro integrali completo formulae differentialis $\frac{dr}{R} = \frac{ds}{S}$ haberi debet.

48. Mirum omnino hoc videretur, niſi jam dudum huiusmodi aequationum differentialium integralia inueniendi methodum tradidiſſem. Methodus quidem, qua hoc praeſtiti nondum ita eſt perfecta, vt a priori procedat, ſed propoſita eiusmodi aequatione differentiali $\frac{dr}{R} = \frac{ds}{S}$, vbi quidem formulae irrationales R et S ſimili modo per r et s determinantur, aſſumere cogor aequationem algebraicam generalem eiusdem formae ac ſupra expoſita, in qua litteras conſtantes E, F, G etc. deinceps ita definio, vt inde ipſa aequatio differentialis conficiatur. Iſtam ergo methodum ad hunc caſum inſignem, qui praeter expectationem hic ſe offert, accommodabo; ſiquidem inde eadem integratio, quae iam aliunde conſtat, obtinebitur.

49. Primum igitur ex aequatione algebraica aſſumta definio valorem ipſarum s et r ſeorſim:

$$s = \frac{-Irr - Fr - H + \surd((Irr + Fr + H)^2 - (Grr + 2Ir + K)(Krr + 2Hr + E))}{Grr + 2Ir + K}$$

$$r = \frac{-Iss - Fs - H\surd((Iss + Fs + H)^2 - (Gss + 2Is + K)(Kss + 2Hs + E)}{Gss + 2Is + K}$$

atque

atque formularum radicalium illam ipſi R hanc vero ipſi S ex §. 43. aequalem facio, vnde fit:

$$r^4 \mid II - GK = \tfrac{1}{2}mC$$
$$r^3 \mid 2FI - 2IK - 2GH = mA$$
$$r^2 \mid 2HI + FF - EG - 4HI - KK = -mC + mD - 1$$
$$r^1 \mid 2FH - 2EI - 2HK = -mA$$
$$r^0 \mid HH - EK = \tfrac{1}{2}mC - mD.$$

50. Hinc aequationum ſecundae et quartae ſumma dat:

$$FI + FH - IK - EI - GH - HK = 0$$

vnde fit $\frac{H}{I} = \frac{E+K-F}{F-K-G}$. Statuatur ergo

$$H = n(E+K-F) \text{ et } I = -n(G+K-F)$$

qui valores in alterutra ſubſtituti praebent:

$$\frac{mA}{2n} = (K-F)^2 - EG$$

Porro primae, tertiae et quintae ſumma ſuppeditat:

$$(I-H)^2 + FF - (E+K)(G+K) = -1 \text{ ſeu}$$
$$nn(E+G+2K-2F)^2 = (E+K)(G+K) - FF - 1.$$

Hoc autem modo calculus fit nimis intricatus; ex quo expediet determinationem coefficientium in genere ſuſcipere.

51. Conſiderentur ergo ſequentes formulae:

$$\text{I. } II - GK = a = \tfrac{1}{2}mC$$
$$\text{II. } I(F-K) - GH = b = \tfrac{1}{2}mA$$
$$\text{III. } FF - KK - EG - 2HI = c = -mC + mD - 1$$
$$\text{IV. } H(F-K) - EI = d = -\tfrac{1}{2}mA$$
$$\text{V. } HH - EK = e = \tfrac{1}{2}mC - mD,$$

vnde

vnde ex prima et quinta ſtatim elicimus:

$$G = \frac{II - a}{K} \quad \text{et} \quad E = \frac{HH - e}{K}.$$

Deinde ex II et IV eſt

primo $bH - dI = EII - GHH = \frac{aHH - eII}{K}$

tum $bEI - dGH = (EII - GHH)(F - K) = \frac{(F-K)(aHH - eII)}{K}$

ſeu $HI(bH - dI) + adH - beI = (F - K)(aHH - eII)$

vnde colligitur:

$$K = \frac{aHH - eII}{bH - dI} \quad \text{et} \quad F = K + \frac{HI(bH - dI) + adH - beI}{aHH - eII}.$$

Ergo $G = \frac{(bH - dI)(II - a)}{aHH - eII}$ et $E = \frac{(bH - dI)(HH - e)}{aHH - eII}$.

52. Cum igitur ſit:

$$F = K + \frac{bI(HH - e) - dH(II - a)}{aHH - eII}$$

facta ſubſtitutione in tertia fiet

$$\begin{array}{r|l}
FF & KK + \frac{2bI(HH-e) - 2dH(II-a)}{bH - dI} + \frac{bbII(HH-e)^2 + ddHH(II-a)^2}{(aHH - eII)^2} \\
 & \qquad - \frac{2bdHI(HH-e)(II-a)}{(aHH - eII)} \\
-KK & -KK \\
-2HI & \qquad -2HI \\
-EG & \qquad - \frac{(bbHH + ddII)(II-a)(HH-e)}{(aHH - eII)^2} + \frac{2bdHI(HH-e)(II-a)}{(aHH - eII)^2} \\
\| & \| \\
c & c
\end{array}$$

quae aequatio reducitur ad hanc formam:

$$c = \frac{2adH - 2beI}{bH - dI} + \frac{bb(HH - e) - dd(II - a)}{aHH - eII}$$

ex qua binas litteras H et I definiri oportet, ita vt altera maneat indeterminata, atque aequatio aſſumta vna littera abundet prae differentiali, quod eſt criterium aequationis integralis completae.

53. Quo haec aequatio facilius reſoluatur, ratio inter binas litteras H et I noſtro arbitrio relinquatur, ſitque $I = nH$ vnde obtinemus:

$$c = \frac{2ad - 2ben}{b - dn} + \frac{bb - ddnn}{a - enn} + \frac{add - bbe}{a - enn} \cdot \frac{1}{HH}$$

ſicque littera H definitur per ſimplicem extractionem radicis quadratae; qua inuenta erit $I = nH$; et reliquae litterae:

$$K = \frac{a - enn}{b - dn} \cdot H; \quad F = K + \frac{n(b - dn)}{a - enn} H + \frac{ad - ben}{a - enn} \cdot \frac{1}{H}$$

$$G = \frac{nnHH - a}{K} \quad \text{et} \quad E = \frac{HH - e}{K}.$$

54. Pro caſu ergo oblato, ſi loco litterarum a, b, c, d, e valores debiti ſubſtituantur, quantitatem H ex hac aequatione definiri oportet:

$$-mC + mD - 1 = \frac{-mC - mn(C - 2D)}{1 + n} + \frac{\frac{1}{2}mAA(1 - nn)}{C(1 - nn) + 2Dnn}$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}mmAAD}{C(1 - nn) + 2Dnn} \cdot \frac{1}{HH}$$

ſeu
$$-1 + \frac{mD(1 - n)}{1 + n} - \frac{\frac{1}{2}mAA(1 - nn)}{C(1 - nn) + 2Dnn} = \frac{\frac{1}{2}mmAAD}{C(1 - nn) + 2Dnn} \cdot \frac{1}{HH}$$

vnde colligitur:

$$H = mA : \sqrt{\left(2\left(\frac{C}{D}(1 - nn) + 2nn\right)\left(\frac{mD(1 - n)}{1 + n} - 1\right) - \frac{mAA(1 - nn)}{D}\right)}$$

hincque

hincque porro:

$$I = nH;\ K = \frac{C(1-nn)+2Dnn}{A(1+n)}H;$$

$$F = K + \frac{nHH}{K} - \frac{\frac{1}{2}mA(C(1+n)-2Dn)}{C(1-nn)+2Dnn}\cdot\frac{1}{H}$$

$$G = \frac{nnHH}{K} - \frac{mC}{2K} \text{ et } E = \frac{HH}{K} - \frac{m(C-2D)}{2K}.$$

55. His iam valoribus definitis aequationis noſtrae primae $\frac{dr}{R} = \frac{ds}{S}$ aequatio integralis completa eſt:

$$E + 2Frs + Grrss + 2H(r+s) + 2Irs(r+s) + K(rr+ss) = 0$$

in qua littera n eſt conſtans per integrationem ingreſſa.

Deinde vero eſt:

$$s = \frac{-Irr - Fr - H + R}{Grr + 2Ir + K} \text{ vel } r = \frac{-Iss - Fs - H - S}{Gss + 2Is + K}$$

vnde habemus:

$$R = Grrs + 2Irs + Ks + Irr + Fr + H \text{ et}$$

$$S = -Grss - 2Irs - Kr - Iss - Fs - H$$

tum enim aequatio noſtra differentiata dat:

$$2ds.\ R - 2dr.\ S = 0 \text{ ſeu } \frac{dr}{R} = \frac{ds}{S},$$

quae erat prima aequatio in §. 43. integranda.

56. Cum

56. Cum nunc inuenta ſit aequatio inter r et s vnde ob $x = \frac{1}{2}a(1 + rs)$ et $v = \frac{1}{2}a(r + s)$ relatio algebraica inter x et v facile elicitur; hinc calculo quidem prolixo tam angulus Φ quam tempus τ, artificia alibi expoſita in ſubſidium vocando, definiri poterit; quam euolutionem, cum ad quaeſtionem hic tractatam minus pertineat, praetermitto, contentus viam eo perueniendi indicaſſe.

DE

DE PHAENOMENIS COELI PER SEGMENTA SPHAERICA DIAPHANA SPECTATI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Si coelum ſpectatur per hemisphaerium vitreum oculo ad eius centrum applicato, omnes ſtellae quaeque in ſuo loco conſpicientur, perinde ac ſi nudo oculo cernerentur; propterea quod radii ad oculum pertingentes in ſuperficiem vitri normaliter ingrediuntur, ideoque nullam refractionem patiuntur. Sin autem vitri figura ſit ſegmentum ſphaerae ſiue minus ſiue maius haemiſphaerio, eique oculus in ipſo axe applicetur, ſtellae extra axem ſitae non ſolum de loco ſuo depulſae apparebunt, ſed etiam euenire poteſt, vt quaedam plane non fiant conſpicua, aliae geminatae in diuerſis coeli punctis videantur, atque aliqua coeli regio omnino vacua ſpectetur. Quae phaenomena ſingularia digna videntur vt accuratius euoluantur.

2. Quae autem ad ſegmenta ſphaerae tam maiora quam minora ſpectant, ea vna inueſtigatione

 com-

complecti licet, ſi ſphaeram vitream integram contemplemur, in qua alicubi oculus ſit conſtitutus.
Tab. IV. Fig. 1. Sit igitur propoſita ſphaera reuolutione ſemicirculi APB circa diametrum AB genita, in cuius puncto O conſtitutus ſit oculus, extra centrum C, vnde coelum ſpectetur. Quod ſi iam ſecundum OP plano ad diametrum AB normali ſphaera ſecetur, bina ſegmenta alterum minus APO, alterum maius BPO obtinebimus, per quae ſeparata oculus vtrique in O applicatus coelum intueatur. In calculo autem inſtituendo nihil impedit, quo minus haec ſegmenta coniuncta conſideremus et oculum in O intra ſphaeram quaſi incluſum aſſumamus, vt hoc modo vtrique caſui ſatisfiat, ſimulque ratio continui habeatur.

3. Iam primum obſeruo ſtellas E et F in ipſo ſphaerae axe AB ſitas ſine vlla loci mutatione conſpici, quia radii inde ad oculum O pertingentes normaliter in ſphaeram intrant. At ſi extra axem ſtella nobis in V ſita appareat, quam ſcilicet per radium MO ſpectemus, haec ſtella re vera non in V haerere eſt cenſenda, ſed ad eius locum verum, vbi nudo oculo conſpiceretur, explorandum ex centro C per punctum M agatur recta CMN, vtpote normalis in ſuperficiem ſphaerae, et conſtituatur angulus NMS, cuius ſinus ſit ad ſinum anguli NMV in ratione refractionis ex aëre in vitrum, ac verus ſtellae locus alicubi in recta MS reperietur,

tur, cuius diſtantia cum ſit quaſi infinita, ex O ducatur O*s* ipſi *MS* parallela, et a nudo oculo ſtella in directione O*s* cerneretur, quae nunc per vitrum in directione OV conſpicitur, ita vt ob refractionem angulo *s*OV de ſuo loco vero deturbetur.

4. Hanc viſionis mutationem in vtroque ſegmento in figura expreſſi, vnde colligere licet per ſegmentum minus AOP ſtellam in directione O*s* verſantem propius ad axem vitri OE admoueri, ſicque ſpatium coeli E*s* ob refractionem ſub minore angulo EOV apparere, vnde magnitudo ſtellarum imminuetur. Contra autem per ſegmentum maius BOP ſtella in directione O*s* ſita et angulo FO*s* ab axe remota in directione OV ſub maiore angulo FOV ab axe videbitur vnde etiam ſtellae magnitudo aucta prodibit. Atque haec potiſſimum de ſtellis axi vtrinque proximis ſunt intelligenda, in maioribus enim elongationibus ſingularia phaenomena, quorum initio mentionem feci, locum habere poſſunt.

5. Ad haec diligentius inueſtiganda, ponamus:

radium ſphaerae $CA = CB = CM = a$

diſtantiam oculi O a centro ſphaerae, $CO = d$

Diſtantiam apparentem ſtellae ab axe, ſeu angulum $AOV = \Phi$

A a 2 angu-

angulum refractionis $OMC = \eta = NMV$
angulum incidentiae $NMS = \zeta$
rationem refractionis $\sin.\zeta : \sin.\eta = n : 1$.

Hinc erit angulus $VMS = \zeta - \eta$, cui cum ſit angulus VOs aequalis, erit diſtantia vera ſtellae ab axe OAE, hoc eſt ang. $AOs = \Phi + \zeta - \eta$, ideoque definiri oportet, quomodo ex diſtantia apparente ſeu angulo $AOV = \Phi$, diſtantia vera ſeu angugulus $AOs = \Phi + \zeta - \eta$ ac viciſſim determinetur. Hic quidem nulla difficultas occurrit, verum euolutio ſingulorum phaenomenorum eo maiorem diligentiam ac circumſpectionem requirit.

6. Conſideremus angulum $AOV = \Phi$ tanquam datum, qui cum ſit externus trianguli OMC, in quo dantur duo latera $CM = a$ et $CO = d$, erit $\sin.\Phi : \sin\eta = a : d$, ideoque $\sin.\eta = \frac{d}{a}\sin.\Phi$; vbi obſeruo angulum η ſemper eſſe acutum, etiam ſi angulus Φ euadat obtuſus, ita vt haec determinatio nullam ambiguitatem implicet inde oriundam, quod eidem ſinui gemini anguli conueniant. Cum nunc ſit $\sin.\zeta = n\sin.\eta$, inuento angulo η erit $\sin.\zeta = \frac{nd}{a}\sin\Phi$, qui angulus pariter nunquam obtuſus eſſe poteſt. Ad rectum poteſt increſcere, ſi $nd = a$ vel $nd > a$. Inuentis ergo his binis angulis η et ζ ex formulis $\sin.\eta = \frac{d}{a}\sin.\Phi$ et $\sin.\zeta = \frac{nd}{a}\sin.\Phi$, colligitur elongatio vera ab axe $AOs = \Phi + \zeta - \eta$, ita vt $\zeta - \eta$ ſit effectus refractionis.

7. Quem-

7. Quemadmodum nulla turbatio oritur, ſi oculus in centro C teneatur ſeu $d = 0$, ita ſi interuallum $CO = d$ prae radio ſphaerae a ſit valde exiguum, turbatio parum ſentitur. Quo magis autem locus oculi a centro C remouetur, eo magis phaenomena a veritate diſcrepant, quae tum imprimis prorſus fiunt ſingularia, quando $d > \frac{a}{n}$. Tum enim angulo Φ eo vsque aucto vt ſit $\sin.\Phi > \frac{a}{nd}$, ob $\sin.\zeta > 1$, fit angulus ζ imaginarius, neque ergo ſub his angulis Φ vllum obiectum apparere poteſt. Sit $\frac{a}{nd} = \sin.\alpha$, et quamdiu angulus Φ inter limites α et $180° - \alpha$ continetur, in hoc interuallo viſionis nulla prorſus ſtella videbitur: et quoniam nullus radius in oculum ingreditur, tota regio intra angulos α et $180° - \alpha$ contenta obſcuriſſima et nigra apparebit, omnes autem ſtellae, quas quidem videre licet extra iſtos limites conſpicientur.

8. Interuallum hoc obſcurum euaneſcit, ſi capiatur $d = \frac{a}{n}$ oculusue adhuc propius centro C admoueatur; quo magis autem a centro remoueatur, interuallum illud obſcurum amplificatur, fit maximum ſumto $d = a$, quo caſu ſegmentum ſphaericum in integram ſphaeram abit, cui oculus in A applicatur, interuallo AO euaneſcente. Hi ergo duo caſus $d = a$ et $d = \frac{a}{n}$ ſunt quaſi praecipui, qui ſeorſim euolui merentur, ac poſtquam aſpectum ſiderum pro his caſibus definiuerimus, quoniam ca-

ſus $d=o$ per ſe eſt perſpicuus, inde facile, qua ratione coelum reliquis caſibus ſit appariturum, colligere licebit.

I. De aſpectu coeli per ſphaeram diaphanam integram.

Tab. IV. Fig. 2. 9. Oculo O ſphaerae in A applicato appareat ſtella in directione OM quaſi eſſet in V ſita, quae reuera exiſtit in directione $O\sigma$. Referantur haec loca ad directionem fixam ABF, ſitque hinc elongatio ſtellae apparens, ſeu angulus $BOV=\psi$, poſitisque vt ante angulis $OMC=\eta$ et $SMN=\zeta$ ob $d=a$ erit $\text{ſin.}\,\eta=\frac{d}{a}\,\text{ſin.}\,\psi=\text{ſin}\,\psi$ et $\text{ſin.}\,\zeta=\frac{nd}{a}\,\text{ſin.}\,\psi$ $=n\,\text{ſin.}\,\psi$ vnde fit elongatio vera ſeu angulus $BO\sigma=\psi-\zeta+\eta$. Cum igitur ſit $\text{ſin.}\,\eta=\text{ſin.}\,\psi$, et ψ angulus acutus, erit $\eta=\psi$, ideoque elongatio vera $BO\sigma=2\psi-\zeta$. Hic primo apparet angulum ψ maiorem eſſe non poſſe, quam vt ſit $\text{ſin.}\,\psi=\frac{1}{n}$. Ducatur ergo recta AG vt ſit ſin. $BAG=\frac{1}{n}$ ſeu AB ad cordam BG in ratione refractionis $n:1$, eritque totus arcus AG obſcurus, omnesque ſtellae intra angulum BOG conſpicientur.

10. Sit angulus $BOG=\alpha$ ſeu $\text{ſin.}\,\alpha=\frac{1}{n}$, ita vt angulus ψ hunc limitem α transgredi nequeat, vera autem elongatio $BO\sigma$ apparenti $BOV=\psi$ reſpondens, ponatur $=\omega$, erit vt vidimus $\omega=2\psi-\zeta$, exiſtente $\text{ſin.}\,\zeta=n\,\text{ſin.}\,\psi$. Hinc primo patet ſi ſit angulus

angulus ψ quam minimus, ob $\zeta - \frac{1}{6}\zeta^3 = n\psi - \frac{n}{6}\psi^3$, ſeu $\zeta = n\psi + \frac{n(nn-1)}{6}\psi^3$, fore $\omega = (2-n)\psi - \frac{n(nn-1)}{6}\psi^3$, ſeu proxime $\omega = (2-n)\psi$, quare cum ſit $n > 1$, neque vero vnquam n ad 2 increſcere queat, erit vtique $\omega < \psi$, ſeu ſtellae prope F apparentes, revera puncto F ſunt propiores, refractio ſcilicet ſtellas axi proximas magis inde deducit, quo maior fuerit ſphaerae refractio.

11. Conſideremus nunc ſtellam in directione extrema OG apparentem, vbi $\psi = \alpha$, et ob $\text{ſin.}\,\zeta = n\,\text{ſin.}\,\alpha = 1$ ſeu $\zeta = 90^\circ$, erit huius ſtellae elongatio vera ab axe $= 2\alpha - 90^\circ$, ideoque ſi $\alpha < 45^\circ$ ſeu $n > \sqrt{2}$, ſtella adeo ad alteram axis AF partem erit ſita. Sit nunc $\psi = \alpha - \delta$, exiſtente angulo δ minimo, ob $\text{ſin.}\,\zeta = n\,\text{ſin.}\,\alpha - n\delta\,\text{coſ.}\,\alpha = 1 - n\delta\,\text{coſ.}\,\alpha$ ponatur $\zeta = 90 - \varepsilon$, vt ſit $\text{coſ.}\,\varepsilon = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon = 1 - n\delta\,\text{coſ}\,\alpha$, et colligitur $\varepsilon = \sqrt{2n\delta\,\text{coſ.}\,\alpha}$, ex quo elongatio vera ſtellae ab axe erit $\omega = 2\alpha - 90^\circ - 2\delta + \sqrt{2n\delta\,\text{coſ.}\,\alpha}$ ſeu

$$\omega = 2\alpha - 90^\circ + \sqrt{2n\delta\,\text{coſ.}\,\alpha}$$

quandoquidem particula 2δ prae $\sqrt{2n\delta\,\text{coſ.}\,\alpha}$ euaneſcit; ita vt minimae mutationi in loco apparente reſpondeat maxima mutatio in loca ſtellae vero.

12. Quoniam ſtella in ipſo axe viſa, ibidem quoque ſita eſt, et quae in directione extrema OG conſpicitur, parum ab axe diſtat, videamus quanta ſit maxima diſtantia vera ω, ad quam ſtellae etiam

nunc

nunc ſint conſpicuae. Cum igitur poni oporteat $2d\psi - d\zeta = 0$ ob $d\zeta$ coſ. $\zeta = nd\psi$ coſ. ψ fit 2 coſ. $\zeta = n$ coſ. ψ, ideoque $4 - 4nn$ ſin. $\psi^2 = nn - nn$ ſin ψ^2 vnde colligitur ſin. $\psi = \frac{\surd(4-nn)}{n\surd 3}$, hinc coſ. $\psi = \frac{2\surd(nn-1)}{n\surd 3}$ et coſ. $\zeta = \frac{\surd(nn-1)}{\surd 3}$ ac ſin. $\zeta = \surd\frac{4-nn}{3}$. His ergo valoribus elongatio vera $\omega = 2\psi - \zeta$ fit maxima, eiusque ſinus et coſinus ita determinantur:

ſin. $\omega = \frac{(4-nn)\surd(4-nn)}{3nn\surd 3}$, et coſ. $\omega = \frac{(nn-8)\surd(nn-1)}{3nn\surd 3}$

nullae ergo ſtellae per ſphaeram ſpectanti apparebunt, niſi quae axi fuerint propiores, et quae ſatis modico interuallo continentur.

13. Dum igitur angulus ψ ab axe OB vsque ad limitem α digreditur, vt ſit ſin. $\alpha = \frac{1}{n}$ angulus ω primo quoque ita creſcit, vt quamdiu angulus ψ eſt minimus, ſit $\omega = (2-n)\psi - \frac{n(nn-1)}{6}\psi^3$ tum vero angulus ω maximum valorem attingit, vbi ſit ſin. $\psi = \frac{\surd(4-nn)}{n\surd 3}$, ibique eſt ſin. $\omega = \frac{(4-nn)\surd(4-nn)}{3nn\surd 3}$, vlteriusque aucto angulo ψ ad limitem α vsque, angulus ω iterum decreſcit, donec tandem fiat $\omega = 2\alpha - 90$. Vltimus hic valor ipſius ω fit negatiuus ſi $n > \surd 2$ quemadmodum euenit in vitro, ideoque antequam eo pertingit, denuo euanuerit neceſſe eſt, quod ſcilicet fit vbi $2\psi = \zeta$, ideoque ſin. $\zeta = n$ ſin. $\psi = 2$ ſin. ψ coſ. ψ, ſeu coſ. $\psi = \frac{n}{2}$. In vitro igitur vbi $n > \surd 2$, ſtella in axe OF ſita non ſolum per ſphaeram ibidem cernitur, ſed etiam eadem

dem in elongatione ab axe ad angulum ψ vt ſit coſ. $\psi = \frac{n}{4}$ apparet, quod cum quaqua verſus in omnibus meridianis contingat, eadem ſtella inſtar circuli lucidi polum B ambientis ſpectabitur, in cuius quoque centro ſimul videbitur.

14. Per ſphaeram ergo pellucidam ſtellae tantum circum axem OF ſitae, quarum diſtantia non ſuperat angulum, cuius ſinus eſt $= \frac{(4-nn)\sqrt{(4-nn)}}{3nn\sqrt{3}}$, ſunt conſpicuae, niſi forte diſtantia negatiua $2\alpha - 90°$, caſu $n > \sqrt{2}$ illa ſit maior; tum enim etiam has remotiores cernere liceret. Operae igitur pretium erit inueſtigare, quo caſu angulus $90° - 2\alpha$ illi diſtantiae, cuius ſinus eſt $\frac{(4-nn)\sqrt{(4-nn)}}{3nn\sqrt{3}}$ fiat aequalis. Aequato autem hoc ſinu ipſi ſin. $(90 - 2\alpha)$ ſeu coſ. $2\alpha = 1 - \frac{2}{nn}$, prodit aequatio $(4-nn)\sqrt{(4-nn)} = 3(nn-2)\sqrt{3}$, qua euoluta, et diuiſione per $nn-1$ facta, obtinetur $n^4 + 16nn - 44 = 0$, vnde elicitur $nn = 6\sqrt{3} - 8$, et vero proxime $n = 1,5467$.

15. Cum in vitro refractio ita ſit comparata, vt pro radiis rubris ſit $n = 1,54$, et pro violaceis $n = 1,56$, valor inuentus $n = 1,5467$ vtique in vitro locum habet, quae proprietas haud parum notatu digna videtur. Per huiusmodi ergo ſphaeram vitream ſingulae ſtellae, quae quidem ſunt conſpicuae neque vltra angulum $90° - 2\alpha$ ab axe remotae, triplicatae ſeu in ternis diuerſis coeli punctis conſpicientur; ac praeterea ſtella quidem in ipſo axe ſita per totum quendam circulum diffuſa ſpectabitur.

 Pro

Pro hoc ergo caſu tabulam adiungam, in qua pro ſingulis elongationibus ab axe apparentibus ψ, elongationes verae exhibentur; vnde deinceps cuiuslibet ſtellae conſpicuae terna loca apparentia colligere licebit.

ψ	ω	ψ	ω
0°, 0′, 0″	0°, 0′, 0″	23°, 0′, 0″	8°, 49′, 2″
1, 0, 0	0, 27, 12	24, 0, 0	9, 0, 58
2, 0, 0	0, 54, 21	25, 0, 0	9, 10, 49
3, 0, 0	1, 21, 25	26, 0, 0	9, 18, 36
4, 0, 0	1, 48, 22	27, 0, 0	9, 23, 44
5, 0, 0	2, 15, 10	28, 0, 0	9, 26, 12
6, 0, 0	2, 41, 45	28, 14, 55	9, 26, 19
7, 0, 0	3, 8, 5	29, 0, 0	9, 25, 10
8, 0, 0	3, 34, 9	30, 0, 0	9, 20, 38
9, 0, 0	3, 59, 42	31, 0, 0	9, 11, 29
10, 0, 0	4, 25, 12	32, 0, 0	8, 57, 42
11, 0, 0	4, 50, 7	33, 0, 0	8, 36, 26
12, 0, 0	5, 14, 30	34, 0, 0	8, 7, 40
13, 0, 0	5, 38, 18	35, 0, 0	7, 27, 49
14, 0, 0	6, 1, 31	36, 0, 0	6, 36, 52
15, 0, 0	6, 24, 3	37, 0, 0	5, 23, 9
16, 0, 0	6, 45, 55	38, 0, 0	3, 46, 40
17, 0, 0	7, 6, 51	39, 0, 0	1, 15, 5
18, 0, 0	7, 26, 52	39, 20, 39	0, 0, 0
19, 0, 0	7, 45, 49	40, 0, 0	−3, 49, 41
20, 0, 0	8, 3, 42	40, 16, 0	−8, 4, 5
21, 0, 0	8, 20, 15	40, 16, 51	−9, 26, 18
22, 0, 0	8, 35, 28	limes vltimus.	

16. Re-

16. Relatio inter hos binos angulos ψ et ω quorum ille diſtantiam ſtellae apparentem, hic vero diſtantiam eius veram ab axe ſphaerae OF deſignat, commodiſſime linea curua repraeſentari poteſt; ſumtis enim in directrice FG abſciſſis FV diſtantiae apparenti ψ proportionalibus, ad ſingulas conſtituantur applicatae VS diſtantiam veram referentes, ſicque formabitur linea curua FSQRH, primo quidem a recta vix differens, tum vero ad axem ſe magis inflectens, vt abſciſſae FP $= 28^\circ, 14', 55''$ conueniat applicata maxima PQ $= 9^\circ, 26', 19''$. Inde vero ſatis ſubito ad axem vergit, eum ſecans in R vt ſit FR $= 39^\circ, 20', 39''$, hincque in alteram partem porrigitur fere normaliter ad axem, vbi denique in puncto H terminatur, cuius abſciſſa FG $= 40^\circ, 16', 51''$ et applicata GH $= 9^\circ, 26', 18''$ illi maximae PQ aequali. Tab. IV. Fig. 3.

17. Si axis FG retro vltra F continuetur ei ſimilis curua inuerſa conueniet, applicatis in partem contrariam cadentibus; quandoquidem ſumto angulo ψ negatiuo alterius anguli ω ſignum tantum mutari oportet; vnde cum vtrinque ſit GH $=$ PQ, omnes rectae axi FG parallelae has binas curuas iunctim ſumtas in tribus punctis interſecabunt, niſi earum diſtantia ab axe maior ſit quam PQ. Quare vnicuique ſtellae, non vltra $9^\circ, 26', 18''$ ab axe ſphaerae remotae, terni conueniunt anguli apparentes ψ, totidem in coelo loca denotantes,

tes, vbi eadem ſtella ſimul conſpicietur. Stella autem in ipſo axe ſita, primo quidem in loco vero apparebit, ſimul vero ſub figura annuli lucidi conſpicietur, cuius ab axe diſtantia $= 39^{\circ}, 20', 39''$, vti iam ſupra obſeruaui.

18. Ex tabula data ſequentes concluſiones deduxiſſe iuuabit. Primo omnes ſtellae ab axe F ad elongationem $9^{\circ}, 26', 19''$ in coelo ſitae per ſphaeram hanc vitream ſimili fere ordine per ſpatium $28^{\circ}, 14', 55''$ ideoque fere triplo maius diſperſae conſpicientur; deinde eaedem ſtellae ſed ordine inuerſo a diſtantia $28^{\circ}, 14', 55''$ vsque ad diſtantiam $39^{\circ}, 20', 39''$ ab axe denuo apparebunt. Tertio vero ad alteram axis partem eaedem ſtellae in exiguo ſpatio intra $39^{\circ}, 20', 39''$ et $40^{\circ}, 16', 51''$ comprehenſo iterum inuerſo ordine ſpectabuntur, ita vt ſingulae ſtellae in ternis coeli locis per huiusmodi globum vitreum repraeſententur. Hic autem de repraeſentatione qualicunque loquor; quippe quae minime erit diſtincta, cum ſingulae imagines pone oculum cadant. Sin autem globus fuerit maximus, oculis presbytis haec apparentia ſatis erit diſtincta.

19. Multo aliter autem viſio ſe habebit, ſi coelum per globum aqueum, ſeu quod eodem redit, per ſphaeram vitream cavam aqua repletam intueamur, ſi modo vitrum ſit tenuiſſimum, vt eius refractionem negligere liceat. Hic enim cum ſit $n = \frac{4}{3}$

ideoque

ideoque $n < \sqrt{2}$, non ſolum nulla ſtella triplicata apparebit, ſed etiam quaedam ſemel tantum repraeſentabuntur. Similem ergo tabulam pro tali ſphaera adiiciam, ex his elementis computatam, quod ſi diſtantia ab axe apparens vocetur $= \psi$ indeque angulus colligatur ζ, vt ſit $\text{ſin.}\,\zeta = \frac{4}{3}\,\text{ſin.}\,\psi$ eius ſtellae diſtantia vera ab axe futura ſit $= 2\psi - \zeta = \omega$. Patet autem maximum valorem anguli apparentis ψ eſſe $48°, 35', 25''$, anguli autem veri $= 21°, 0', 53''$, qui reſpondet angulo $\psi = 40°, 12', 11''$ ita vt hic maius ſpatium aperiatur, maiorque coeli portio offeratur.

ψ	ω	ψ	ω
0°, 0′, 0″	0°. 0′, 0″	14, 0, 0	9°, 10′, 47″
1, 0, 0	0, 40, 6	15, 0, 0	9, 48, 45
2, 0, 0	1, 20, 6	16, 0, 0	10, 26, 11
3, 0, 0	2, 0, 1	17, 0, 0	11, 3, 11
4, 0, 0	2, 39, 51	18, 0, 0	11, 39, 41
5, 0, 0	3, 19, 36	19, 0, 0	12, 16, 12
6, 0, 0	3, 59, 14	20, 0, 0	12, 52, 8
7, 0, 0	4, 38, 46	21, 0, 0	13, 27, 24
8, 0, 0	5, 18, 12	22, 0, 0	14, 2, 5
9, 0, 0	5, 57, 32	23, 0, 0	14, 36, 10
10, 0, 0	6, 36, 46	24, 0, 0	15, 9, 31
11, 0, 0	7, 15, 35	25, 0, 0	15, 42, 9
12, 0, 0	7, 54, 11	26, 0, 0	16, 13, 57
13, 0, 0	8, 32, 35	27, 0, 0	16, 44, 53

ψ	ω	ψ	ω
27°,0′,0″	16°,44′,53″	40°,12′,11″	21°, 0′,53″
28, 0, 0	17, 14, 50	41, 0, 0	20, 59, 6
29, 0, 0	17, 43, 42	42, 0, 0	20, 51, 9
30, 0, 0	18, 11, 23	43, 0, 0	20, 35, 13
31, 0, 0	18, 37, 49	44, 0, 0	20, 8, 54
32, 0, 0	19, 2, 40	45, 0, 0	19, 28, 16
33, 0, 0	19, 25, 57	46, 0, 0	18, 26, 22
34, 0, 0	19, 47, 25	47, 0, 0	16, 48, 11
35, 0, 0	20, 6, 49	48, 0, 0	13, 45, 8
36, 0, 0	20, 23, 53	48, 30, 0	10, 1, 27
37, 0, 0	20, 38, 19	48, 35, 0	8, 0, 37
38, 0, 0	20, 49, 36	48, 35, 25	7, 10, 50
39, 0, 0	20, 57, 19	limes	vltimus
40, 0, 0	21, 0, 47		

20. Per ſphaeram ergo vitream ſpatium lucidum ab axe ad angulum 48°,35′,25″ extenſum conſpicitur, in quo autem ſtellae ab axe non vltra 21°,0′,53″ remotae conſpiciuntur; ſtella quidem in ipſo axe ſita ibidem ac ſemel tantum apparet, ſicuti etiam eae, quae minus quam 7°,10′,50″ ab axe diſtant: remotiores vero ſingulae bis cernuntur, et ea, cuius diſtantia eſt 21°,0′,53″ in diſtantia 40°,12′,11″ quaſi duplicata ſpectatur. Quae vero ſtellae vltra 40°,12′,11″ ab axe videntur, eaedem iam in minoribus interuallis erant conſpicuae, nunc autem ordine inuerſo exhibentur.

II. De

II. De Aſpectu coeli per ſegmenta diaphana ſphaerica caſu quo $d = \frac{a}{n}$.

21. Loco igitur oculi O intra ſphaeram aſſumto, vt ſit $d = \frac{a}{n}$, ſeu CB : CO in ratione refractionis $n : 1$, aſpectum coeli per ambo ſegmenta ſimul definire licet. Pro minore ſcilicet ſegmento, poſito angulo apparente EOV $= \phi$, cum ſit ſin. $\zeta = $ ſin. ϕ et ſin. $\eta = \frac{1}{n}$ ſin. ϕ, ideoque $\zeta = \phi$ angulus ab axe verus EOS erit $= 2\phi - \eta$. Pro maiore autem ſegmento poſito angulo apparente FOV $= \psi$ ob ſin. $\zeta = $ ſin. ψ ideoque $\zeta = \psi$ et ſin. $\eta = \frac{1}{n}$ ſin. ψ, erit angulus ab axe verus FO$s = \psi - \zeta + \eta = \eta$, vnde idem calculus, quo anguli η determinantur, vtriusque ſegmenti phaenomena patefaciet, etiamſi ea non continuitatis lege inter ſe cohaereant. Calculum ergo hunc pro vitro quo $n = 1,5467$ inſtituamus Fig. 1.

22. Pro vitro et ſegmento minore

ang. ap. EOV	ang. verus EOs	ang. ap. EOV	ang. verus EOs
0°	0°, 0′, 0″	45°	62°, 47′, 43″
5	6, 46, 11	50	70, 18, 43
10	13, 33, 14	55	78, 1, 14
15	20, 22, 1	60	85, 56, 59
20	27, 13, 29	65	94, 7, 44
25	34, 8, 34	70	102, 35, 15
30	41, 8, 21	75	111, 21, 13
35	48, 13, 57	80	120, 27, 9
40	55, 26, 37	85	129, 54, 12
45	62, 47, 43	90	139, 43, 8

Pro-

Pro vitro et ſegmento maiore.

ang. app. FOV	ang verus FOr	ang. app. FOV	ang. verus FOr
0°	0°, 0′, 0″	45°	27°,12′,17″
5	3, 13, 49	50	29, 41, 17
10	6, 26, 46	55	31, 58, 46
15	9, 37, 59	60	34, 3, 1
20	12, 46, 31	65	35. 52, 16
25	15, 51, 26	70	37, 24, 45
30	18, 51, 39	75	38, 38, 47
35	21, 46, 3	80	39, 32, 51
40	24, 33, 23	85	40, 5, 48
45	27, 12, 17	90	40, 16, 52

23. Hic ergo nulla ſtella bis ſpectatur, neque etiam vlla conſpectui ſubtrahitur, et tota ſphaera radiis ad oculum directis impletur, ita vt nulla portio obſcura relinquatur. Per ſegmentum vero minus multo maior coeli portio detegitur, ad gradus 279 expanſa dum ea quae per ſegmentum maius cernitur, non vltra 80°,33′,44″ patet. Coelum igitur per ſegmentum minus intuentibus interualla ſtellarum contrahuntur, et quidem maxime circa oras vbi ad ſemiſſem rediguntur. Contra autem per ſegmentum maius ſtellarum interualla amplificantur, atque adeo maxime earum, quae ab axe ad 90° remotae apparent. Ac ſi centrum ſolis ab axe diſtet 139°,43′,8″ ſemiſſis per ſegmentum minus conſpicuus tantum 8′, alter vero per ſegmentum

tum maius viſus propemodum 7 gradus in coelo occupare videbitur, ita vt hoc loco aſpectus maximus maxime turbetur, et continuitatis legi aduerſetur.

24. Similia erunt phaenomena in ſphaera aquea, vbi cum refractio n ſit minor, diſtantia oculi a centro maior eſt capienda, vt inter ambo ſegmenta maior inaequalitas intercedat, contra vero portiones coeli per vtrumque ſeorſim ſpectabiles magis ad aequalitatem reducantur, ſicque perturbatio viſionis imminuatur. Quam ob rem ſuperfluum foret huiusmodi tabulam quoque pro aquae refractione computare; cum autem ſphaera vitrea integra ſingulas ſtellas, quae quidem ſunt conſpicuae, in ternis diuerſis locis ſpectandas exhibeant, dum hoc caſu quo $d = \frac{a}{n}$ ſubito vnica repraeſentatio locum habeat, haud abs re erit caſum quendam intermedium euoluere, quo facilius intelligatur, quomodo ſaltus a caſu priori ad poſteriorem progrediatur; ex quo caſum quo $\frac{d}{a} = \sqrt{\frac{1}{n}}$ examini ſubiiciam.

III. De aſpectu coeli per ſegmenta ſphaerica diaphana caſu quo $d = a\sqrt{\frac{1}{n}}$.

25. Sumto ergo interuallo $CO = CA\sqrt{\frac{1}{n}}$, pro ſegmento minore AOP ſi angulus apparens EOV vocetur $= \Phi$, indeque definiantur anguli acuti ζ et η vt ſit $\sin.\zeta = \sqrt{n}\,\sin.\Phi$ et $\sin\eta = \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\Phi$, erit angulus verus $EOs = \Phi + \zeta - \eta$. At pro ſegmen- Tab. IV. Fig. 1.

 to

to maiore BOP, vocato angulo apparente $FOV = \psi$ indeque deductis angulis pariter acutis ζ et η, vt ſit $\text{ſin.}\zeta = \sqrt{n}\,\text{ſin.}\psi$ et $\text{ſin.}\eta = \frac{1}{\sqrt{n}}\text{ſin.}\psi$, erit angulus verus $FOs = \psi - \zeta + \eta$. Quodſi iam ſphaeram ſtatuamus vitream et $n = 1,5467$, erit $\sqrt{n} = 1,24366$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,804078$ vnde ne angulus ζ fiat imaginarius, angulum ϕ vel ψ non vltra $53°,31',16''$ augere licet; ſicque in vtroque ſegmento illuminatio, vlterius non porrigetur, ita vt vtrinque circa rectam OP ſpatium $36°,28',44''$ obſcurum relinquatur, vnde nulli radii ad oculum pertingant.

Pro ſegmento minore		Pro ſegmento maiore	
ang. app. EOV	ang. verus EOs	ang. app. FOV	ang. verus FOs
0°	0°, 0', 0''	0°	0°, 0', 0''
5	7, 12, 13	5	2, 47, 47
10	14, 26, 46	10	5, 33, 14
15	21, 45, 55	15	8, 14, 5
20	29, 12, 39	20	10, 47, 21
25	36, 50, 34	25	13, 9, 26
30	44, 34, 40	30	15, 25, 20
35	53, 2, 33	35	16, 57, 27
40	61, 57, 9	40	18, 2, 51
45	71, 55, 12	45	18, 4, 48
50	84, 17, 8	50	15, 42, 52
52	91, 12, 31	52	12, 47, 29
53	96, 22, 37	53	9, 37, 23
53, 31'	102, 36, 48	53, 31'	4, 25, 12
53, 31, 16''	103, 14, 24	53, 31, 16''	3, 48, 8

26. Hic

26 Hic circa ſegmentum minus nihil admodum notatu dignum occurrit, niſi quod, quo magis oculus O a centro C remouetur, tam ſpatium illuminatum quam campus coeli in eo conſpicuus magis contrahatur, ideoque ſtellarum interualla minuantur, ordine ſeruato. In ſegmento autem maiore haec interualla dilatantur, donec perueniatur ad diſtantiam maximam ab axe, quae colligitur 18°, 14′. 37″ et reſpondet angulo apparenti FOV = 42°, 46′, 40″ neque enim ſtellas magis remotas cernere licebit, apparebunt in maioribus ab axe diſtantiis eaedem ſtellae, quae propius conſpiciebantur, ſed ordine inuerſo, quoad recurrat ſtella ab axe 3°, 48′, 8″ remota, quae in extremitate conſpicietur, ita vt omnes ſtellae magis remotae bis repraeſententur; propiores vero tantum ſemel. Vnde colligere licet, ſi oculus magis a centro remoueatur, mox ipſam ſtellam in F ſitam dupliciter conſpici, tum vero etiam quasdam ſtellas triplicari.

27. Haud facile hic pro ſegmento maiore definitur locus, vbi angulus $FOs = \psi - \zeta + \eta$ ſit maximus. Cum enim ſit $\text{ſin.}\,\zeta = \frac{nd}{a}\,\text{ſin.}\,\psi$ et $\text{ſin.}\,\eta = \frac{d}{a}\,\text{ſin.}\,\psi$, ob $d\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta = \frac{nd}{a}\,d\psi\,\text{coſ.}\,\psi$ et $d\eta\,\text{coſ.}\,\eta = \frac{d}{a}\,d\psi\,\text{coſ.}\,\psi$, pro hoc loco habetur:

$$0 = 1 - \frac{nd\,\text{coſ.}\,\psi}{a\,\text{coſ.}\,\zeta} + \frac{d\,\text{coſ.}\,\psi}{a\,\text{coſ.}\,\eta}.$$

Cum nunc ſit $\frac{nd}{a} = \frac{\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\psi}$ et $\frac{d}{a} = \frac{\text{ſin.}\,\eta}{\text{ſin.}\,\psi}$, aequatio haec

iſtam induet formam:

$$0 = 1 - \frac{tang.\,\zeta}{tang.\,\psi} + \frac{tang.\,\eta}{tang.\,\psi}$$ ſeu $tang.\,\psi = tang.\,\zeta - tang.\,\eta$

ita vt angulus FOs ibi ſit maximus, vbi fit $tang\,\psi = tang\,\zeta - tang.\,\eta$. Verum ſi hinc angulum ψ definire velimus, ad aequationem quarti ordinis delabimur, quam nonniſi operoſa illa methodo *Carteſiana* reſoluere licet.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

SVPPLEMENTVM.

DE FIGVRA DENTIVM ROTARVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Quae in volumine quarto nouorum Commentariorum Academiae Petropolitanae de figura dentium rotarum ſum commentatus, calculos ſatis prolixos ſequenti modo contrahi indeque concluſiones ad praxin accommodatas deduci poſſe obſeruaui. Cum igitur ibi oſtendiſſem fieri omnino non poſſe, vt in dentium apprehenſione omnis affrictus tollatur, in id erit incumbendum, vt dum altera rota vniformiter circumagitur, alteri ſimul motus vniformis imprimatur: quo ſimul hoc obtinetur, vt quae vis ad alteram rotandam impenditur, ea perpetuo aequale momentum ad alteram circumagendam, exerceat. Cuiusmodi igitur figuram dentibus vtriusque rotae tribui oporteat, vt hunc ſcopum obtineamus, ſequenti modo ſum inveſtigaturus, et quoniam hoc infinitis modis praeſtari poterit, inde quouis caſu eum, qui ad praxin maxime accommodatus videbitur, eligere licebit.

2. Sint

Tab. V. Fig. 1. 2. Sint igitur A et B centra binarum rotarum ſe mutuo impellentium, quorum diſtantia ponatur $AB = c$; illius autem rotae circa A mobilis dens ſit EOM, huius vero quae circa B eſt mobilis dens ſit FON, qui nunc quidem ab illo in puncto O contingatur. Ad planum contactus in O producatur recta normalis ſecans radium prioris rotae AE in P, radium alterius rotae BF in Q, ipſam vero rectam AB centra rotarum iungentem in T; puncta ſcilicet E et F in apicibus vtriusque dentis aſſumo. His conſtitutis manifeſtum eſt dum rota prior circa A ita circumuertitur, vt angulus BAE augeatur, alteram rotam circa B ita conuerſum iri, vt angulus ABF increſcat, atque ex incrementis horum angulorum vtriusque rotae motus angularis aeſtimabitur, quorum ergo ratio perpetuo conſtans eſſe debet.

3. Ponamus angulos, vti in figura ſunt notati:

$BAE = \zeta$; $ABF = \eta$; $EPO = \phi$; $FQO = \psi$ et $BTO = \omega$ eritque $\zeta = \omega - \phi$ et $\eta = \psi - \omega$.

Tum vero poſita diſtantia $AB = c$ ſint reliquae lineae in computum ducendae:

$AP = p$; $BQ = q$; $PO = r$; $QO = s$.

Hinc erit per reſolutionem triangulorum APT et BQT

ſin.

$\text{ſin.}\,\omega : p = \text{ſin.}\,\zeta : PT = \text{ſin.}\,\phi : AT$ et

$\text{ſin.}\,\omega : q = \text{ſin.}\,\eta : QT = \text{ſin.}\,\psi : BT$ vnde colligitur

$PT = \frac{p\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\omega}$; $QT = \frac{q\,\text{ſin.}\,\eta}{\text{ſin.}\,\omega}$; $AT = \frac{p\,\text{ſin.}\,\phi}{\text{ſin.}\,\omega}$; $BT = \frac{q\,\text{ſin.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\omega}$.

Cum igitur ſit $QT - PT = r + s$ et $AT + BT = c$ erit

$$\frac{q\,\text{ſin.}\,\eta - p\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\omega} = r + s \text{ et } \frac{p\,\text{ſin.}\,\phi + q\,\text{ſin.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\omega} = c.$$

Vnde elicitur:

$$p = \frac{(c\,\text{ſin.}\,\eta - (r+s)\,\text{ſin.}\,\psi)\,\text{ſin.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\psi + \text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\phi} \text{ et } q = \frac{(c\,\text{ſin.}\,\zeta + (r+s)\,\text{ſin.}\,\phi)\,\text{ſin.}\,\omega}{\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\psi + \text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\phi}$$

at eſt $\text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\psi + \text{ſin.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\phi = \text{ſin.}\,\omega\,\text{ſin.}(\psi - \phi)$; ita

$$p = \frac{c\,\text{ſin.}\,\eta - (r+s)\,\text{ſin.}\,\psi}{\text{ſin.}(\psi - \phi)} \text{ et } q = \frac{c\,\text{ſin.}\,\zeta + (r+s)\,\text{ſin.}\,\phi}{\text{ſin.}(\psi - \phi)}.$$

4. Sit nunc Π preſſio, qua dentes in O ſe mutuo impellunt, cuius directio cum vtrinque in rectam PQ incidat, erit eius momentum in rotam $A = \Pi p\,\text{ſin.}\,\phi$, in rotam vero $B = \Pi q\,\text{ſin.}\,\psi$. Quare ſi M ſit momentum, qua rota A circumagitur in eum ſenſum, quo angulus ζ augetur, ob $\Pi = \frac{M}{p\,\text{ſin.}\,\phi}$, erit momentum, quo inde altera rota ad motum impelletur circa $B = \frac{q\,\text{ſin.}\,\psi}{p\,\text{ſin.}\,\phi} M$, hocque fiet in eum ſenſum, quo angulus η augetur. Quare ſi rota B continuo ab eodem momento virium ſollicitari debeat, dum rota A dato momento M circumagitur, fractio $\frac{q\,\text{ſin.}\,\psi}{p\,\text{ſin.}\,\phi}$ valorem conſtantem habere debet. Tum autem quoque ratio ſegmentorum AT et BT conſtans manere debet, cum ſit $AT : BT = p\,\text{ſin.}\,\phi : q\,\text{ſin.}\,\psi$. Ex quo punctum T erit invariabile ſeu fixum, ita vt ſit AT ad BT vt mo

mentum rotam A circumagens ad momentum rotam B circumagens.

5. Cum ſit vti inuenimus:

$$p\,\text{ſin.}\,\phi + q\,\text{ſin.}\,\psi = c\,\text{ſin.}\,\omega \quad \text{et} \quad q\,\text{ſin.}\,\eta - p\,\text{ſin.}\,\zeta = (r+s)\,\text{ſin.}\,\omega$$

ſi rationem habeamus relationis angulorum:

$$\zeta = \omega - \phi \quad \text{et} \quad \eta = \psi - \omega$$

hosque valores in poſteriori aequatione ſubſtituamus, erit:

$$q\,\text{ſin.}\,\psi\,\text{coſ.}\,\omega - q\,\text{coſ.}\,\psi\,\text{ſin.}\,\omega - p\,\text{coſ.}\,\phi\,\text{ſin.}\,\omega + p\,\text{ſin.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\omega = (r+s)\,\text{ſin.}\,\omega$$

hincque ob $q\,\text{ſin.}\,\psi\,\text{coſ.}\,\omega + p\,\text{ſin.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\omega = c\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega$, diuidendo per $\text{ſin.}\,\omega$ adipiſcimur:

$$c\,\text{coſ.}\,\omega - q\,\text{coſ.}\,\psi - p\,\text{coſ.}\,\phi = r + s \quad \text{ſeu}$$

$$p\,\text{coſ.}\,\phi + q\,\text{coſ.}\,\psi = c\,\text{coſ.}\,\omega - r - s$$

ſimili modo ſi hos valores $\phi = \omega - \zeta$ et $\psi = \omega + \eta$ in priori aequatione ſubſtituamus, prodit

$$p\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\omega - p\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\omega + q\,\text{coſ.}\,\eta\,\text{ſin.}\,\omega + q\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\omega = c\,\text{ſin.}\,\omega$$

quare cum ſit $q\,\text{ſin.}\,\eta\,\text{coſ.}\,\omega - p\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ}\,\omega = (r+s)\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\omega$, habebimus per $\text{ſin.}\,\omega$ diuidendo:

$$p\,\text{coſ.}\,\zeta + q\,\text{coſ}\,\eta + (r+s)\,\text{coſ.}\,\omega = c \quad \text{ſeu}$$

$$p\,\text{coſ.}\,\zeta + q\,\text{coſ.}\,\eta = c - (r+s)\,\text{coſ.}\,\omega.$$

Tab. V. Fig. 2. 6. Praeter has determinationes ſatis obuias notari oportet pro curua EOM dari certam relationem inter ternas variabiles $AP = p$, $PO = r$ et angulum

gulum $EPO = \Phi$, quam hic imprimis inueſtigari oportet. Conſideremus ergo ſtatum proximum in quo $Ap = p + dp$; $po = r + dr$, et $Epo = \Phi + d\Phi$; vnde productis normalibus OP, op ad concurſum V, erit VO radius oſculi curuaturae dentis in O. Centro V inſuper ducatur arculus Pr et cum ſit $Pp = -dp$; $pr = dr$; ang. $Ppr = \Phi + d\Phi$, et $OVo = d\Phi$ colligimus:

$$pr = dr = -dp\,\text{coſ.}\,\Phi,\ Pr = -dp\,\text{ſin.}\,\Phi;\ \text{et}\ PV = \frac{-dp\,\text{ſin.}\,\Phi}{d\Phi}$$

hincque radium oſculi $VO = r - \frac{dp\,\text{ſin.}\,\Phi}{d\Phi} = r + \frac{dr\,\text{ſin.}\,\Phi}{d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{d.r\,\text{ſin.}\,\Phi}{d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}$ tum vero elementum curuae $Oo = r\,d\Phi + \frac{dr\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{d.r\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi}$. Quod cum ſimili modo ſe habeat pro altero dente habebimus has nouas determinationes:

$dr = -dp\,\text{coſ.}\,\Phi$; rad. oſc. curuae EM in $O = \frac{d.\,r\,\text{ſin.}\,\Phi}{d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}$;
elementum $Oo = \frac{d.\,r\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi}$

$ds = -dq\,\text{coſ.}\,\psi$; rad. oſc. curuae FN in $O = \frac{d.\,s\,\text{ſin.}\,\psi}{d\psi\,\text{coſ.}\,\psi}$;
elementum $O\omega = \frac{d.\,s\,\text{ſin.}\,\psi}{\text{coſ.}\,\psi}$.

7. Cum igitur nunc dentes ſe mutuo in puncto O contingant, elapſo autem temporis elemento puncto o et ω inuicem applicentur, euidens eſt interea affrictum fieri per ſpatiolum $oO + \omega O$ ita vt totum ſpatiolum affrictus ſit $= \frac{d.\,r\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi} + \frac{d.\,s\,\text{ſin.}\,\psi}{\text{coſ.}\,\psi}$; quod ſi ad nihilum redigi poſſet, omnis frictio tolleretur. At in ſuperiori diſſertatione oſtendi hoc fieri non poſſe: ſemper ergo aderit frictio, quae in

eo maius ſpatium excretur, quo maiorem valorem obtinuerit formula $\frac{d. r\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi} + \frac{d. s\,\text{ſin.}\,\psi}{\text{coſ.}\,\psi}$. Quod enim ipſam frictionis quantitatem attinet, ea eſt preſſioni mutuae proportionalis, quae preſſio fuerit $= \Pi$, frictio certae cuipiam eius parti $\delta\Pi$ aequabitur, cuius directio cum ſit normalis ad OP, erit eius momentum in rotam A $= \delta\Pi(r + p\,\text{coſ.}\,\Phi)$, in rotam vero B $= \delta\Pi(s + q\,\text{coſ.}\,\psi)$, quorum momentorum ſumma eſt $= \delta\Pi(r + s + p\,\text{coſ}\,\Phi + q\,\text{coſ.}\,\psi)$ $= \delta\Pi c\,\text{coſ.}\,\omega$. Vnde momentum vis rotam A circumagentis, quod ponimus $= M$ debet eſſe $M = \Pi p\,\text{ſin.}\,\Phi + \delta\Pi(r + p\,\text{coſ.}\,\Phi)$.

8. His expoſitis perpendamus ipſum motum rotarum, et dum angulus ζ elemento $d\zeta$ augetur, videamus quantum angulus η interea creſcat. Commodiſſime hoc colligimus ex aequatione $c\,\text{coſ.}\,\omega = r + s + p\,\text{coſ.}\,\Phi + q\,\text{coſ.}\,\psi$, quae differentiata dat

$$-c\,d\omega\,\text{ſin.}\,\omega = dr + ds + dp\,\text{coſ.}\,\Phi - p\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + dq\,\text{coſ.}\,\psi - q\,d\psi\,\text{ſin.}\,\psi$$

at $dr = -dp\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $ds = -dq\,\text{coſ.}\,\psi$ vnde fit

$$c\,d\omega\,\text{ſin.}\,\omega = p\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + q\,d\psi\,\text{ſin.}\,\psi$$

quare cum ſit $c\,\text{ſin.}\,\omega = p\,\text{ſin.}\,\Phi + q\,\text{ſin.}\,\psi$ erit

$$0 = (d\Phi - d\omega)p\,\text{ſin.}\,\Phi + (d\psi - d\omega)q\,\text{ſin.}\,\psi$$

verum eſt $d\omega - d\Phi = d\zeta$ et $d\psi - d\omega = d\eta$, vnde ſequitur:

$$p\,d\zeta\,\text{ſin.}\,\Phi = q\,d\eta\,\text{ſin.}\,\psi \text{ ideoque } \frac{p\,\text{ſin.}\,\Phi}{q\,\text{ſin.}\,\psi} = \frac{d\eta}{d\zeta}.$$

Angu-

Angulorum ergo ζ et η mutationes eandem inter ſe tenent rationem quam momenta ex preſſione Π nata.

9. Nunc igitur effici debet, vt haec ratio perpetuo ſit conſtans, ſeu vt motus angularis rotae A ad motum angularem rotae B conſtanter eandem ſeruet rationem. Cum igitur ratio $p\,\text{ſin.}\,\Phi : q\,\text{ſin.}\,\psi$ conſtans eſſe debeat, erit punctum T fixum. Statuamus ergo $AT = a$ et $BT = b$ vt fit $c = a + b$, eritque $p\,\text{ſin.}\,\Phi = a\,\text{ſin.}\,\omega$ et $q\,\text{ſin.}\,\psi = b\,\text{ſin.}\,\omega$; hinc neglecta frictione, ſi virium momentum rotam A circumagens ſit $= M$ altera rota circumagetur momento $= \frac{b}{a} M$. Tum vero ratio motuum angularium erit $\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{a}{b}$, ſeu $ad\zeta = bd\eta$, hincque $a\zeta = b\eta$: vnde dum rota A integram reuolutionem abſoluit, vt ſit $\zeta = 360°$ altera rota circumagetur angulo $= \frac{a}{b} \cdot 360°$, ſcilicet dum rota A facit b reuolutiones rota B faciet interea a, ſumtis pro a et b numeris, qui his lineis $AT = a$ et $BT = b$ ſint proportionales.

10. Hinc data figura dentis EOM dentis alterius rotae FON figura et poſitio determinari poterit. Pro figura enim dentis EOM ponamus dari aequationem inter diſtantiam $AP = p$ et angulum $EPO = \Phi$, vnde erit $PO = r = h - \int dp\,\text{coſ.}\,\Phi$: hincque ſtatim reperitur angulus ω cum ſit $\text{ſin.}\,\omega = \frac{p\,.\,\text{ſin.}\,\Phi}{a}$: ſcilicet ad rectam OP productam applicetur $AT = a$,

 quod

quod cum duplici modo fieri poſſit, duplex valor pro angulo ω obtinetur, alter acutus alter obtuſus, quo inuento erit angulus $\zeta = \omega - \Phi$. Tum ex poſitione rectae AT innoteſcit, ſumta $AB = a + b = c$, centrum alterius rotae B, hincque porro $q \,\text{ſin.}\, \zeta = b \,\text{ſin.}\, \omega = \frac{bp \,\text{ſin.}\, \Phi}{a}$. Verum etiam eſſe debet $q \,\text{coſ.}\, \psi = c \,\text{coſ.}\, \omega - r - s - p \,\text{coſ}\, \Phi$, exiſtente $ds = -dq \,\text{coſ.}\, \psi$. Vel cum ſit $ad\zeta = bd\eta$ ſeu $cd\omega = ad\Phi + bd\psi$ ob $\zeta = \omega - \Phi$ et $\eta = \psi - \omega$, erit $a\Phi + b\psi = c\varepsilon + c\omega$ denotante ε angulum quendam conſtantem pro lubitu accipiendum: vnde definitur angulus $\vdash QO = \psi = \frac{c\varepsilon + c\omega - a\Phi}{b}$, ſeu $\eta = \frac{c\varepsilon + a\omega - a\Phi}{b} = \frac{c\varepsilon + a\zeta}{b}$; ſicque habetur poſitio rectae BF, in qua capiatur $BQ = q = \frac{bp \,\text{ſin.}\, \Phi}{a \,\text{ſin}\, \psi}$. Ex puncto autem Q, quod etiam recta TPO producta indicat, cognoſcitur dentis FON punctum O.

11. Hinc ergo ex quolibet dentis EOM puncto O definitur punctum reſpondens O dentis alterius FON. Cum autem actio huiusmodi binorum dentium per breue temporis ſpatium durare ſoleat, ſufficiet pro elemento Oo prioris dentis Oo conueniens elementum alterius dentis $O\omega$ determinare. Hunc in finem quaeri oportet radium curuedinis elementi $O\omega$, qui iam ſupra inuentus eſt $= \frac{d.\, s \,\text{ſin.}\, \psi}{d\psi \,\text{coſ.}\, \psi} = s + \frac{d\, s \,\text{ſin.}\, \psi}{d\psi \,\text{coſ.}\, \psi} = s - \frac{dq \,\text{ſin.}\, \psi}{d\psi}$. Cum autem ſit $q \,\text{ſin.}\, \psi = \frac{bp \,\text{ſin.}\, \Phi}{a}$ erit $d\eta \,\text{ſin.}\, \psi = \frac{b}{a} d.\, p \,\text{ſin.}\, \Phi - qd\psi \,\text{coſ.}\, \psi$ ita vt ſit iſte radius curuedinis $= s + q \,\text{coſ.}\, \psi - \frac{bd.\, p \,\text{ſin}\, \Phi}{a\, d\psi}$.

Verum

Verum quia $d\psi = \frac{c\,d\omega - a\,d\Phi}{b}$ et $d\omega\,\text{coſ.}\,\omega = \frac{d.\,p\,\text{ſin.}\,\Phi}{a}$ habebimus; $d\psi = \frac{c\,d.\,p\,\text{ſin.}\,\Phi}{a\,b\,\text{coſ.}\,\omega} - \frac{a\,d\Phi}{b} = \frac{c\,d.\,p\,\text{ſin.}\,\Phi - a\,a\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\omega}{a\,b\,\text{coſ.}\,\omega}$, ideoque radium curuedinis quaeſitum $= s + q\,\text{coſ.}\,\psi - \frac{b\,b\,\text{coſ.}\,\omega\,d.\,p\,\text{ſin.}\,\Phi}{c\,d.\,p\,\text{ſin.}\,\Phi - a\,a\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\omega}$. At curuae datae EOM radius curuedinis in O eſt $= r - \frac{d\,p\,\text{ſin.}\,\Phi}{a\,\Phi} = r + p\,\text{coſ.}\,\Phi - \frac{d.\,p\,\text{ſin.}\,\Phi}{d\Phi}$, vnde ob $r + s + p\,\text{coſ.}\,\Phi + q\,\text{coſ.}\,\psi = c\,\text{coſ.}\,\omega$, ſumma horum duorum radiorum curuedinis eſt $= c\,\text{coſ.}\,\omega - \frac{b\,b\,\text{coſ.}\,\omega.\,d.\,p\,\text{ſin.}\,\Phi}{c\,d.\,p\,\text{ſin.}\,\Phi - a\,a\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\omega} - \frac{d.\,p\,\text{ſin.}\,\Phi}{d\Phi}$.

12. Quia poſitio rectae BF ad dentis figuram non pertinet, ſed data figura pro arbitrio asſumi poteſt, quemadmodum etiam ex conſtante angulo ε arbitrario intelligitur, ſufficiet remota penitus ex calculo recta BF quantitatem radii osculi OQ notaſſe, vnde etiam ob $s + q\,\text{coſ.}\,\psi = c\,\text{coſ.}\,\omega - r - p\,\text{coſ.}\,\Phi$, quantitates q, s cum angulo ψ ex calculo euaneſcunt, ita vt ſit iſte radius osculi:

$$c\,\text{coſ.}\,\omega - r - p\,\text{coſ.}\,\Phi - \frac{b\,b\,\text{coſ.}\,\omega.\,d.\,p\,\text{ſin}\,\Phi}{c\,d.\,p\,\text{ſin.}\,\Phi - a\,a\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\omega}$$

cuius quantitate cognita, quoniam rectae TPO poſitio conſtat in ea vltra O producta capiatur OQ aequalis illi quantitati eritque Q centrum; ex quo exiguus arcus circularis radio QO deſcriptus dabit conuenientem figuram dentis FON. In ſequentibus igitur exemplis conſtructionem horum dentium accuratius perpendamus et deſcribamus.

Exem-

Exemplum I.

13. Pro rota priori circa A mobili fiat contactus in plano per A tranſeunte, ſeu curua EM in ipſum radium AE et punctum contactus O in punctum P incidat. Cum ergo recta TP ad radium AE erit normalis, erit $\Phi = 90°$ et $r = 0$, vnde $\text{ſin.}\,\omega = \frac{p}{a}$; et $\zeta = \omega - 90°$, atque pro altero dente ob $d\Phi = 0$ erit radius curuedinis:

$$OQ = c\,\text{coſ.}\,\omega - \frac{bb\,\text{coſ.}\,\omega}{c} = \frac{cc - bb}{c}\,\text{coſ.}\,\omega.$$

Primum ergo patet diſtantiam $p = AP$ maiorem accipi non poſſe quam $AT = a$, ſin autem capiatur $p = a$, fit $\omega = 90°$, $\zeta = 0$, et $OQ = 0$, ita vt dens FON curuaturam infinite magnam habere debeat, quod cum non conueniat, neceſſe eſt vt diſtantia $AP = p$ minor accipiatur quam a. Vnde ſi pro momento actionis medio ſtatuatur $p = f$, vt ſit $\text{ſin.}\,\omega = \frac{f}{a}$ fiet $OQ = \frac{cc - bb}{c} \cdot \frac{\sqrt{(aa - ff)}}{a} = \frac{c + b}{c}\sqrt{(aa - ff)}$.

Tab. V. Fig. 3. 14. Conſtructio ergo ita ſe habebit; ſumto rotae prioris radio $AE = a$, capiatur in eo punctum P centro A propius, indeque erecto perpendiculo PTQ ex A applicetur $AT = AE = a$, eaque producatur in B vt ſit $BT = b$ erit B centrum alterius rotae. Tum ob $AP = f$, et $AT = a$, erit $PT = \sqrt{(aa - ff)}$; hinc capi oportet $PQ = \frac{c + b}{c} \cdot PT = PT + \frac{BT}{AB} \cdot PT$. Quare ducta ad EA in A perpendi-

pendiculari $AD=PT$, recta BD ipſum punctum Q indicabit, ex quo radio QP arcus circularis FPN deſcriptus dabit figuram dentis ad alteram rotam B pertinentis. Hunc autem arcum valde paruum eſſe oportet, neque maiorem, quam vt dum dentes ſequentes ſe mutuo apprehendunt, hic omnis actio ceſſet; quem in finem ſi F et N ſint termini iſtius dentis, vltra eos arcum continuari non conuenit, ſed potius dentem vltra F et N ita excidi oportet, vt nullus amplius contactus hic fiat, cum ſequentes dentes ſe mutuo prehendere coeperint.

Exemplum 2.

15. Sit pro rota A figura dentis iterum plana, neque vero per centrum rotae A tranſiens. Ex A ducatur radius APe illi plano parallela, eritque Φ angulus rectus, et $PO=r$ quantitas conſtans $=h$, vnde erit $\text{ſin.}\,\omega=\frac{p}{a}$, ita vt p maior quam a capi nequeat. Tum vero ob $\Phi=90°$, et $d\Phi=0$, reperitur radius osculi $OQ=c\,\text{coſ.}\,\omega-h-\frac{bb\,\text{coſ.}\,\omega}{c}$ $=\frac{cc-bb}{c}\text{coſ.}\,\omega-h$. Cum autem ſit $\text{coſ.}\,\omega=\frac{\sqrt{(aa-pp)}}{a}$, erit $OQ=\frac{c+b}{c}\sqrt{(aa-pp)}-h$, vnde haec conſtructio fluit: ſi EOM ſit figura dentis rotae A, et in medio actionis contactus fiat in O, ducatur recta QOP ad EM normalis in eamque ex A demittatur perpendiculum AP; tum applicetur $AT=a$, et producatur in B, vt ſit $TB=b$, erit B centrum al- Tab. VI. Fig. 4.

 terius

terius rotae. Ad AP in A conſtituatur perpendicularis $AD = PT$, iunctaque BD dabit punctum Q ex quo radio $= QO$ deſcribatur arcus circuli FON, hicque praebebit figuram dentis pro rota B. Si PO euaneſcat, habetur caſus exempli praecedentis: ſiue autem PO maior fuerit minorue, ſiue etiam negatiua conſtructio eadem manet.

Exemplum 3.

16. Si pro rota A figura dentis ſit arcus circuli EOM centro P deſcripti, ex A ducatur per P radius APe ſitque $AP = f$, et radius circuli $PO = r = b$. Erit ergo $\text{ſin.}\,\omega = \frac{f\,\text{ſin.}\,\Phi}{a}$, et $d.p\,\text{ſin.}\,\Phi = d.f\,\text{ſin.}\,\Phi = f d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$ pro altera rota inuenitur radius curuedinis $OQ = c\,\text{coſ.}\,\omega - b - f\,\text{coſ.}\,\Phi - \frac{bbf\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\omega}{cf\,\text{coſ.}\,\Phi - aa\,\text{coſ.}\,\omega}$.

Tab. VI. Fig. 5. Sumto ergo radio $AP = f$, angulo $ePO = \Phi$, et $PO = b$, vt ſit arcus EOM centro P deſcriptus figura dentis rotae A, iungatur $AT = a$, ſumaturque $TB = b$, erit B centrum alterius rotae. In PO productam ex A et B demittantur perpendicula AR et BS erit $PR = f\,\text{coſ.}\,\Phi$; $TR = a\,\text{coſ.}\,\omega$, $TS = b\,\text{coſ.}\,\omega$; et $RS = c\,\text{coſ.}\,\omega$; vnde conficitur

$$OQ = RS - PO - PR - \frac{BT.\,PR.\,TS}{AB.\,PR - AT.\,TR} \text{ ſiue}$$

$$OQ = SO - \frac{BT.\,PR.\,TS}{AB.\,PR - AT.\,TR} \text{ hincque}$$

$$SQ = \frac{BT.\,PR.\,TS}{AB.\,PR - AT.\,TR}$$

vnde

vnde per conſtructionem geometricam definitur punctum Q quod eſt centrum arcus FON figuram dentis rotae B repraeſentantis.

17. Ex his perſpicuum eſt amborum dentium EOM et FON deſcriptionem pendere a punctis P et Q in recta RS accipiendis, quae ſi fuerint debite inuenta, punctum O pro lubita aſſumere licet, per quod centris P et Q arcus illi EOM et FON ducantur. Quare poſita recta AB rotarum centra A et B iungente, eaque in T diuiſa, vt ſit $AT = a$, $BT = b$, primo per T pro lubitu ducatur recta RS, in eamque ex A et B demittantur perpendicula AR et BS, ac tum vti vidimus puncta P et Q ita capi neceſſe eſt, vt ſit

$$AB.\,RP.\,SQ = AT.\,RT.\,SQ + BT.\,RP.\,ST.$$

Vel cum ſit $AB : AT : BT = RS : RT : ST$ erit

$$(RT+ST)RP.\,SQ - RT.\,RT.\,SQ - ST^2.\,RP = 0$$

vel $-RT.\,SQ.\,TP - ST.\,RP.\,RQ = 0$

hincque $\frac{RT.\,TP}{RP} + \frac{ST.\,TQ}{SQ} = 0.$

Vnde patet ſi punctum P intra TR cadat, punctum Q extra rectam TS capi debere, ſecus ac figura oſtendit.

18. Pro ſitu ergo binorum huiusmodi punctorum P et Q ſequens conſtructio negotium facillime conficere videtur: Tab. VI. Fig. 6.

Ad rectam RS in T normaliter conſtituatur recta ipſi aequalis rs, vt ſit $Tr = TR$ et $Ts = TS$: tum per T ducatur recta indefinita GTH angulos rectos RTs, STr biſecans, in qua ſumto pro lubitu puncto V, ſi per id ex punctis r et s agantur rectae rV et sV, eae in recta RS producta ſi opus fuerit, dabunt bina puncta P et Q. Analytice autem haec puncta ita definiri poſſunt, cum ſit $TR = a\,\text{coſ.}\,\omega$, et $TS = b\,\text{coſ.}\,\omega$, ponatur $TP = x$ et $TQ = y$, eritque ex ſuperiori aequatione $\frac{ax\,\text{coſ.}\,\omega}{a\,\text{coſ.}\,\omega - x} + \frac{by\,\text{coſ.}\,\omega}{b\,\text{coſ.}\,\omega - y} = 0$, ſeu $\frac{ax}{a\,\text{coſ.}\,\omega - x} = \frac{by}{y - b\,\text{coſ.}\,\omega}$. Statuatur vtrumque membrum $= u$, et ſumta hac linea u pro lubitu, ambae diſtantiae x et y ita definientur, vt ſit:

$$TP = x = \frac{au\,\text{coſ.}\,\omega}{a + u} \text{ et } TQ = y = \frac{bu\,\text{coſ.}\,\omega}{u - b}$$

ſuntque P et Q centra, ex quibus arcus circulares EOM et FON per idem punctum O etiam pro lubitu aſſumendum duci debent.

Conſtructio generalis Figurae binorum dentium ſe mutuo prehendentium.

Tab. VII. Fig. 7. 19. Sint A et B centra binarum rotatum ſe mutuo impellentium, quorum diſtantia AB ita ſecetur in C, vt AC ad BC ſit in ratione reciproca motuum angularium, et vocetur $AC = a$ et $BC = b$. Tum per C ſub angulo quocunque $ACP = BCQ = \omega$ agatur

agatur recta GH, in qua capiantur puncta P et Q, vt ſit:

$$CP = \frac{au\,\text{coſ.}\,\omega}{a+u} = a\,\text{coſ.}\,\omega - \frac{aa\,\text{coſ.}\,\omega}{a+u} \text{ et } CQ = \frac{bu\,\text{coſ.}\,\omega}{u-b} = b\,\text{coſ.}\,\omega + \frac{bb\,\text{coſ.}\,\omega}{u-b}$$

ſumta etiam pro lubitu quantitate u. Denique in eadem recta GH ſumto etiam pro lubitu puncto O, centris P et Q per O deſcribantur arcus circulares EOM et FON, quorum ille dabit figuram dentis rotae A, hic vero figuram dentis rotae B. Hic igitur tres res arbitrio noſtro relinquuntur, primo ſcilicet angulus ACG ſub quo recta GH per punctum C ducitur, ſecundo quantitas u: ac tertio punctum O, in quo fit contactus, medio actionis momento, dum hi duo dentes ſe mutuo impellunt. Vnde patet infinities infinitis modis conditiones praeſcriptas obtineri poſſe, vt ambo motus aeque ac vis impellentis momenta perpetuo eandem inter ſe ſeruent rationem.

20. Circa haec autem, quae arbitrio noſtro relinquuntur primum obſeruo angulum $ACG = \omega$ rectum ſtatui non poſſe quia alio, quin vel ambae diſtantiae CP et CQ euaneſcunt, vel alterutra ſaltem, vnde alter dens vel ambo figuram nimis curuam habere deberent, quam vt amplitudo tota, per quam fit contactus durante actione pro arcu circulari haberi poſſit; ex quo angulum ACG vel modice acutum vel obtuſum capi oportet. Deinde obſeruo ob eandem rationem quantitatem u neque

euaneſcentem neque nimis paruam aſſumi poſſe: modice igitur magnam ſiue poſitiuam ſiue negativam capi conueniet; vbi imprimis notari meretur caſus, quo capitur $u = \infty$, quia fit $CP = a\,\text{coſ.}\,\omega$ et $CQ = b\,\text{coſ}\,\omega$, ita vt puncta P et Q ſint ea ipſa, in quae perpendicula ex A et B in rectum GH demiſſa cadunt; tum enim erit CP ad CQ vt AC ad BC. Denique punctum O non longe a puncto C accipi conuenit; ac ſi caſu modo memorato $u = \infty$ in ipſo puncto C capiatur, dentes ipſis radiis rotarum fient proportionales et inter ſe ſimiles.

De amplitudine dentium eorumque actione mutua tota.

21. Dum rota A momento virium $= M$ in gyrum agitur, inter dentes ſe mutuo impellentes oritur preſſio $\Pi = \frac{M}{p\,\text{ſin.}\,\Phi} = \frac{M}{a\,\text{ſin.}\,\omega}$, vbi $a\,\text{ſin.}\,\omega$ eſt perpendiculum ex A in rectam GH demiſſum. Haec ergo preſſio foret minima, ſi angulum ω rectum accipere liceret, vnde ne preſſio fiat nimis magna, angulum ω tam parum a recto diſcrepare conuenit; quantum praecedentes conditiones permittunt. Deinde cum in medio actionis contactus fiat in puncto O, ex dentium numero iudicari poteſt, quamdiu bini dentes in ſe mutuo agere debeant, vt inde amplitudo vtriusque arcus EOM et FON definiatur. Sit ergo m numerus dentium in rota A et n numerus

merus dentium in rota B, ac primo quidem neceſſe eſt vt ſit $m : n = a : b$. Iidem ergo bini dentes tamdiu in ſe mutuo agunt, quoad rota B motu angulari abſoluerit angulum $= \frac{360^\circ}{m}$, ſeu rota B angulum $= \frac{360^\circ}{n}$ Statuamus ergo $d\zeta = \frac{180^\circ}{m}$, et elementum curuae EOM huic differentiali $d\zeta$ conueniens, dabit dimidium arcum circularem EOM; ſimilique modo ex differentiali $d\eta = \frac{180^\circ}{n}$ dimidius arcus FON innoteſcet.

22. Cum nunc in figura 1. ſi P ſit centrum arcus EOM, et $PO = r$ radius, dum angulus Φ incrementum $d\Phi$ capit, punctum contactus O in o transfertur, vt ſit $Oo = r d\Phi$. Tum vero notetur eſſe $d\zeta = d\omega - d\Phi$, et ob $\text{ſin.}\,\omega = \frac{p\,\text{ſin.}\,\Phi}{a} = \frac{f\,\text{ſin.}\,\Phi}{a}$ poſito $AP = f$, erit $d\omega\,\text{coſ.}\,\omega = \frac{f\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{a}$ et $d\omega = \frac{f\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{a\,\text{coſ.}\,\omega}$, vnde colligitur $d\zeta = \frac{f\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{a\,\text{coſ.}\,\omega} - d\Phi$ et $d\Phi = \frac{a\,\text{coſ.}\,\omega}{f\,\text{coſ.}\,\Phi - a\,\text{coſ.}\,\omega}\,d\zeta$. Quocirca erit elementum arcus $Oo = \frac{a\,r\,\text{coſ.}\,\omega}{f\,\text{coſ.}\,\Phi - a\,\text{coſ.}\,\omega}\,d\zeta$. Scribamus iam $\frac{180^\circ}{m}$ loco $d\zeta$, et pro dente EOM habebimus dimidiam amplitudinem $OE = OM = \frac{a\,\text{coſ.}\,\omega}{f\,\text{coſ.}\,\Phi - a\,\text{coſ.}\,\omega} \cdot \frac{180}{m} \cdot r$: ideoque pro fig. 5. adipiſcimur $OE = OM = \frac{TR}{TP} \cdot PO \cdot \frac{180^\circ}{m}$, ſimulque intelligimus punctum M initio actionis fuiſſe in contactu, punctum E vero in fine. Simili modo pro altero dente erit $OF = ON = \frac{TS}{TQ} \cdot QO \cdot \frac{180^\circ}{n}$; atque initio actionis puncta M et N in fine autem puncta E et F ſibi mutuo applicantur.

Con-

Conſtructio dentium.

Tab. VII. Fig. 8. 23. Definita arcuum circularium, quibus dentes formari conuenit, amplitudine, facile erit ſingulos dentes exſcindere. Cum autem punctum O vbi in media binorum dentium actione fit contactus, arbitrio noſtro relinquatur, commodiſſime id in ipſa recta AB ideoque in eius puncto C capitur, vt actio, in vtrumuis ſenſum rotae agantur, maneat ſimilis. Quare ſi A et B ſint centra rotarum, ac rota A habere debeat m dentes, rota vero B, n dentes, ſecetur recta AB in C, vt ſit $AC : BC = m : n$, et centris A et B per C ducantur circuli, quorum illius periphaeria in m partes aequales in punctis C, a, a', α, α', huius vero in n partes aequales in punctis C, b, b', $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ diuidatur, vt ſint arcus $Ca = C\alpha = \frac{360}{m}$ graduum et $Cb = C\mathfrak{b} = \frac{360}{n}$ graduum. Seu poſitis interuallis $AC = a$, $BC = b$ et ratione diametri ad peripheriam $1 : \pi$, erunt ipſi arcus $Ca = C\alpha = \frac{2\pi a}{m}$ et arcus $Cb = C\mathfrak{b} = \frac{2\pi b}{n}$, qui ob $a : b = m : n$ ſunt inter ſe aequales.

24. Deinde per C vtcunque oblique agatur recta RS in quam ex A et B demittantur perpendicula AR et BS, atque vt vidimus haec ipſa puncta R et S pro centris arcuum dentes formantium accipi poſſunt, quem caſum vtpote ſimpliciſſimum merito potiſſimum conſideramus. Centro igitur

igitur R per C deſcribatur arcus ECM, vt ſit $EC = CM = CR.\frac{180^\circ}{m}$, et totus arcus $ECM = CR.\frac{360^\circ}{m}$ qui ergo ſe habebit ad arcum Ca vt $CR : CA$, ſeu totidem erit graduum. Simili modo centro S per C ducatur arcus FCN vt ſit $CF = CN = CS.\frac{180^\circ}{n}$, et totus arcus $FCN = CS.\frac{360^\circ}{n}$, qui ergo ad arcum Cb eandem habet rationem; vnde cum ſit $Cb = Ca$, etiam arcus ECM et FCN magnitudine erunt aequales. Addatur vtrique arcui vtrinque particula Ee, Mm et Ff, Nn, quae autem intra vtriusque arcus continuationes cadant, vt nunquam ad contactum perueniant, dabuntque ductis eA et fB figurae $eECMmp$ et $fFCNnq$ ſemiſſes vtriusque dentis; quae ad alteram partem rectarum ep et fq ſimiliter deſcriptae dentes integros referent.

25. Verum hic imprimis obſeruandum eſt totam vtriusque dentis craſſitiem non ſuperare debere ſemiſſem interualli Ca vel Cb, quia inter binos dentes vnius rotae tantum ſpatii relinqui debet, cui dens alterius rotae inſeri queat. Quare ſi quantitatem arcuum $Ca = Cb$ ponamus $= e$, craſſities vnius dentis non ſuperare debet $\frac{1}{2}e$. Ponamus ergo angulum $ACR = BCS = \omega$ et cum ſit arcus $ECM = e\,\text{coſ.}\,\omega$, eiusque ſemiſſis $CE = CM = \frac{1}{2}e\,\text{coſ.}\,\omega$, punctorum extremorum E et M neglecta curuatura diſtantiae ab axe AB erunt $= \frac{1}{2}e\,\text{coſ.}\,\omega^2$, quarum ſumma $e\,\text{coſ.}\,\omega^2$ dabit dimidiam craſſitiem vnius den-

 tis,

tis, vnde tota craſſities erit $= 2e \cos\omega^2$, quae autem ob adiectam particulam Ee aliquantillum erit maior: ex quo quantitas $2e \cos.\omega^2$ minor eſſe debet quam $\frac{1}{2}e$, ideoque $\cos\omega^2 < \frac{1}{4}$, et $\cos.\omega < \frac{1}{2}$, quocirca angulum $ACR = \omega$ maiorem 60° capi oportet, neque ergo hic arcus amplius arbitrio noſtro relinquitur.

26. Perinde ſe res habet quando arcus ECM et FCN non ex centris R et S ſed ex aliis punctis P et Q ſupra definitis deſcribuntur. Sumta enim littera u negatiua, ſit

$$CP = a\cos.\omega + \frac{aa\cos.\omega}{u-a} = CR\left(1 + \frac{a}{u-a}\right) \quad \text{et}$$
$$CQ = b\cos.\omega - \frac{bb\cos.\omega}{b+u} = CS\left(1 - \frac{b}{b+u}\right)$$

ac centris P et Q deſcriptis arcubus ECM et FCN pro eorum amplitudine eſſe debet:

$$CE = CM = CR \cdot \frac{180^\circ}{m} = \tfrac{1}{2}e\cos.\omega \quad \text{et}$$
$$CF = CN = CS.\frac{180^\circ}{n} = \tfrac{1}{2}e\cos.\omega$$

ob $Ca = Cb = e = a.\frac{360}{m} = b.\frac{360}{n}$ et $CR = a\cos.\omega$ atque $CS = b\cos.\omega$. Hinc vbicunque puncta P et Q ſuperiori determinationi conformiter accipiantur, arcus ECM et FCN eandem magnitudinem $= e\cos.\omega = \frac{CR}{CA}.Ca$ habere debent ex quo vti caſu praecedente craſſities ſingulorum dentium prodit $= 2e\cos.\omega^2$ neglectis particulis Ee et Ff, vnde vt ibi angulus ω maior eſſe debet quam 60°. Tum vero

vero longitudo dentis cuiusque ep maior eſſe debet quam $e \cos. \omega \sin. \omega = \frac{1}{2} e \sin. 2\omega$.

27. Quantitatem u ita accipere licet, vt ambo centra P et Q a puncto C aequaliter remoueantur, radiique CP et CQ fiant inter ſe aequales, vnde commodiſſima dentium conſtructio peti videtur, propterea quod, dum ambo arcus ECM et FCN a que fiunt curui, neuter nimis erit curuus quod eueniret, ſi radii CP et CQ eſſent inaequales; tum enim alteruter neceſſario foret minor. Statuamus ergo $CP = CQ$ ſeu $\frac{au \cos. \omega}{u - a} = \frac{bu \cos. \omega}{b + u}$, erit $u = \frac{2ab}{b - a}$, et $u - a = \frac{a(a + b)}{b - a}$, vnde $CP = CQ = \frac{2ab \cos. \omega}{a + b}$ ſeu $CP = CQ = \frac{2 CR \cdot CS}{CR + CS}$. Quare ſuper recta RS in I biſecta deſcribatur circulus, et ex C applicetur recta CK ipſius radio aequalis, qua in L producta, capiatur $CP = CQ = CL$, atque centris P et Q per punctum C deſcribantur arcus ECM et FCN, ex quibus vt ante dentes vtriusque rotae formabuntur, qui inter ſe erunt aequales, quantum quidem rotarum inaequalitas permittit. Tab. VIII. Fig. 9.

28. Hinc nanciſcimur iſtam conſtructionem dentium: Recta iungente rotarum centra AB ita in C diuiſa, vt ſit AC ad BC vt dentium numerus rotae A ad dentium numerum rotae B, per C centris A et B deſcribantur circuli, qui in punctis C, a, a', α, α' et C, b, b', β, β' pro numero dentium in partes aequales diuidantur. Tum per C Fig. 10.

 agatur

agatur recta RS cum AB angulum 60° vel aliquanto maiorem conſtituens, in quam ex A et B demiſſis perpendiculis AR et BS, capiatur $CP = CQ = \frac{2 CR . CS}{RS}$, et centris P et Q per C deſcribantur arcus circulares ECM et FCN, in C biſecti, vt ſit vterque totus arcus ECM vel FCN ad arcum C*a* vel C*b* vt CR ad CA ſeu in ratione ſubdupla, ſi quidem angulus ACR ſit 60°. Vtrinque adiiciatur exigua particula, quae nunquam ad contactum perueniat, et circa EA et FB ad alteram partem ſimiles figurae deſcribantur, eritque MCEM dens rotae A et NCFN dens rotae B, tum igitur nil aliud reſtat, niſi vt in ſingulis punctis a, a', α, α' itemque b, b', β, β' ſimiles figurae extruantur, hocque modo vtraque peripheria dentibus compleatur.

Accuratior determinatio figurae dentium.

29. Praecedens figurae dentium determinatio proxime tantum ſatisfacit, quoniam vtrinque figuram circularem aſſumſimus, perſpicuum autem eſt, ſi altera ſit arcus circularis, alteram re vera fore curuam ſatis complicatam, cuius loco arcum circuli oſculantis aſſumſimus. Quo igitur hoc negotium accurate proſequamur, ex praecedentibus repetamus formulas principales, quae ſunt p ſin. $\Phi = a$ ſin. ω et

Tab. V. et VI. Fig. 1. et 5.

et $q\,\text{ſin.}\,\psi = b\,\text{ſin.}\,\omega$, ſeu $AR = a\,\text{ſin}\,\omega$ et $BS = b\,\text{ſin.}\,\omega$ tum vero $r + s + p\,\text{coſ.}\,\Phi + q\,\text{coſ.}\,\psi = (a+b)\,\text{coſ}\,\omega$, ſeu $RS = (a+b)\,\text{coſ.}\,\omega$ quae formulae etiam immediate ex figura conſequantur, cum AR et BS ſint perpendicula ex punctis A et B in rectam RS per T pro libitu ductam demiſſa, OR autem et OS ſint rectae ad curuas ambas normales. Quodſi iam angulus ω ſtatuatur conſtans, erunt quoque perpendicula AR et BS conſtantia, ideoque vtraque curva EOM et FON ex euolutione circuli nata, illa nempe ex circulo, qui centro A radio AR, haec vero ex circulo qui centro B radio BS deſcribitur, quae curuae cum ſint deſcriptae facillime, ſolutionem commodiſſimam praebere videntur.

30. Sumto autem angulo ω conſtante erit differentiando:

$$dp = \frac{-p\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi} \text{ et } dq = \frac{-q\,d\psi\,\text{coſ.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\psi}, \text{ tum vero}$$

$$dr + ds - \frac{p\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^2}{\text{ſin.}\,\Phi} - \frac{q\,d\psi\,\text{coſ.}\,\psi^2}{\text{ſin.}\,\psi} - pd\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi - qd\psi\,\text{ſin.}\,\psi = 0.$$

At eſt $dr = -dp\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $ds = -dq\,\text{coſ}\,\psi$, vnde $pd\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + qd\psi\,\text{ſin.}\,\psi = 0$, ſeu $ad\Phi + bd\psi = 0$, quod quidem per ſe patet. Tum vero eſt $d\zeta = -d\Phi$. Iam dum rota A angulo $d\zeta$ gyratur, in dente eius punctum contactus ex O in o tranſit, vt ſit $Oo = rd\Phi + \frac{dr\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi} = rd\Phi - dp\,\text{ſin.}\,\Phi = rd\Phi + pd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = d\Phi.\,RO = -RO.\,d\zeta$. In dente autem alterius rotae punctum contactus ex O in ω transfertur, vt

 ſit

ſit $O\omega = -SO.\,d\eta$, eſtque $ad\zeta = bd\eta$. Vnde ſi $ad\zeta$ denotet diſtantiam dentium in vtraque rota, magnitudo arcus dentem rotae A conſtituentis erit $= RO.\,d\zeta$ et magnitudo arcus dentem rotae B conſtituentis $= SO.\,d\eta$, vnde magnitudo dentium definitur, vbi notari oportet, angulum ω tantum accipi debere, vt craſſities vnico dentis dimidium interuallum duorum dentium non ſuperet.

Tab. VIII. Fig. 11. 31. Hoc modo adhuc iſtud lucramur, vt vtriusque rotae dentes ſeorſim delineare poſſimus. Diuiſa enim centrorum diſtantia AB in ratione reciproca motuum angularium in C, radio AC deſcribatur circulus ſecundum dentium numerum in partes aequales diuidendus, cuiusmodi pars vna ſit CC′, tum ſub dato angulo ω, quo etiam in altera rota eſt vtendum, ducatur recta CR, in eamque ex A demittatur perpendiculum AR, quo tanquam radio nouus circulus illi concentricus deſcribatur, pariter ab R vtrinque ſecundum dentium numerum diuidendus, cuiusmodi pars ſit RR′, quae autem ſingulae denuo biſecentur in r, r'. Deinde recta RC cum ad circulum interiorem inuoluatur vsque ad r, tum vero euoluatur vsque ad r', quo pacto altera facies dentis ECM deſcribitur, ſimilique modo per C′ dentis ſequentis E′ C′ M′. Denique ſumto arcu Cc minore ſemiſſe arcus CC′ per c modo inverſo ducatur curua $e\,c\,m$, itemque $e'\,c'\,m'$, ſicque niſi

niſi binae curuae ſe decuſſent clauſis ſpatiolis E e, E′ e' habebitur integri dentis figura M E em: ab m ad M′ autem rotam profundius incidi conuenit. Ceterum ne punctum e in E incidat, vel adeo praetereat, cauetur angulum ACR ſatis magnum accipiendo; quo maior enim aſſumitur, eo minorem profunditatem dentes obtinebunt.

DE

DE MOTV FLVIDORVM A DIVERSO CALORIS GRADV ORIVNDO.

Auctore

L. EVLERO.

I.

A calore in fluidis certum quendam motum inteſtinum generari, a naturae ſcrutatoribus ſatis probabili ratione oſtendi ſolet; cum autem hic motus in minimis tantum elementis ſubſiſtat, neque in vniuerſa fluidi maſſa cernatur, eius ratio in Theoria motus fluidorum neutiquam habetur, ſed fluida omni motu in ſenſus incurrente deſtituta in aequilibrio verſari cenſentur, etiamſi minimae particulae, quibus ſunt compoſita, motu quocunque inter ſe agitentur. Neque ergo hic de motu illo inteſtino, qui fluidorum elementis a calore inducitur, hic ſum acturus, ſed Mechanicae principiis inhaerens in eos fluidorum motus ſum inquiſiturus, qui in eorum tota mole a diuerſo caloris gradu, quo eius partes ſunt affectae, produci debet. Quae motus cauſa cum vix adhuc ſit cognita, tametſi plurima phaenomena inde originem ſuam trahunt, eius accuratior

curatior euolutio non ſolum mathematicam fluidorum cognitionem, ſed etiam phyſicam maxime amplificabit.

2. Cum olim Theoriam aequilibrii fluidorum accuratius perſcrutarer, luculenter oſtendi neque atmoſphaeram neque vllum aliud fluidum in aequilibrio conſiſtere poſſe, niſi in paribus altitudinibus vbique idem caloris gradus deprehendatur. Quodſi enim de fluido graui quaeſtio inſtituitur, ad ſtatum aequilibrii abſolute requiritur, vt in aequalibus altitudinibus non ſolum preſſio ſed etiam denſitas fluidi vbique ſit eadem. Quoniam igitur fluidorum denſitas a calore variatur, ſiquidem a frigore in minus ſpatium conſtringuntur, a calore vero in maius expanduntur: ſimul eſt euictum, niſi in paribus altitudinibus vbique idem caloris gradus vigeat, aequilibrium omnino locum habere non poſſe. Atque in hoc principio non dubitaui praecipuam ventorum cauſam conſtituere, cum ſtatim atque atmoſphaera in quapiam regione maiorem calorem concipit quam in finitimis, ob ſublatum aequilibrium neceſſario ventus debeat oriri.

3. Cuiusmodi autem motus in fluido, cuius partes aeque eleuatae diuerſo caloris gradu perfunduntur, ab hac ipſa cauſa produci debeat, tum temporis definire non ſum auſus; quandoquidem haec inueſtigatio vberiorem motus cognitionem po-

 ſtulare

ſtulare videbatur. Poſtquam autem hoc argumentum denuo examini ſubieciſſem, inſignem hanc proprietatem ſemper locum habere debere deprehendi, vt quoties maſſa fluida ad pares altitudines in vno loco fuerit calidior, quam in alio, tum perpetuo in regione inferiori fluidum a loco frigidiore in calidiorem, contra vero in regione ſuperiori a calidiore in frigidiorem ferri debere. Quae concluſio cum per experientiam mirifice confirmetur, quoniam talem motum in caminis et hypocauſtis calefactis clariſſime obſeruamus, omnino digna videtur, vt eam accuratius euoluam, atque adeo ipſam huius motus generationem, quatenus quidem licet, diſtincte exponam.

Tab. IX. Fig. 1. 4. Conſideremus ergo vas ſatis amplum ABCD fluido quocunque repletum, in cuius parte ABEF ope ignis ſubiecti multo maior caloris gradus ſuſtineatur, quam in parte reliqua EFCD, ita vt fluidum in illa parte ob maiorem calorem minore praeditum ſit denſitate quam in hac, vbi frigidum aſſumitur. Concipiamus primo has duas partes pariete verticali EF a ſe inuicem ſeparari, huncque parietem inferius in f exiguo foramine eſſe pertuſum; atque vt iam fluidum in aequilibrio exiſtat, ideoque preſſio in foramine f vtrinque aequalis habeatur, euidens eſt fluido in parte ABFE maiorem altitudinem BK=FL tribui debere, quam in

in altera parte EFCD vbi altitudo fluidi ſit FM $=$CN; vt ſcilicet quantum fluidi denſitas in illa parte minor eſt, defectus preſſionis inde in foramine f natae exceſſu altitudinis LM compenſetur.

5. Cum igitur hoc modo fluidum ad aequilibrium fuerit perductum, eiusque particula in foraminulo f vtrinque parem vim ſuſtineat, ponamus parietem in loco altiori quoque foraminulo e perforari. Atque iam manifeſtum eſt particulam fluidi in e haerentem a fluido in parte calidiori contento ob maiorem altitudinem Le multo magis vrgeri, quam a fluido partis frigidioris; etſi enim illud minorem habet denſitatem, altitudo tamen fluidi calidioris Le prae altitudine frigidioris Me multo maior eſt quam hic ad aequilibrium requireretur. Quo hoc clarius perſpiciatur, ſit denſitas fluidi frigidi $=d$, calidi vero $=d-\delta$, atque pro aequilibrio in foraminulo f neceſſe eſt ſit $(d-\delta)\mathrm{L}f=d.\,\mathrm{M}f$ ſeu $d.\,\mathrm{LM}=\delta.\,\mathrm{L}f$. Pro foraminulo autem e preſſio fluidi calidi eſt $=(d-\delta)\mathrm{L}e$ frigidi vero $=d.\,\mathrm{M}e$, illa igitur hanc ſuperat parte $d.\,\mathrm{LM}-\delta\,\mathrm{L}e$. Quia vero eſt $d.\,\mathrm{LM}=\delta.\,\mathrm{L}f$, hic exceſſus fit $=\delta.\,\mathrm{L}f-\delta.\,\mathrm{L}e$ $=\delta.\,ef$, vnde patet, quo magis foramen e ſupra f fuerit eleuatum, eo magis ibi preſſionem a fluido calido ortam ſuperaturam eſſe preſſionem alteram a frigido ortam.

6. Ab exceſſu ergo hoc particula fluidi in foramine e verſans ad motum concitabitur, fluidumque

que ex vaſis parte calidiori ABEF per foramen *e* in partem frigidam propelletur: ſicque manifeſtum eſt hoc caſu per foramen ſuperius *e* fluido neceſſario motum e loco calido in frigidum impreſſum iri. Statim autem ac propter hunc fluxum altitudo fluidi frigidi creſcit, calidi vero decreſcit, aequilibrium ad foramen inferius *f* tollitur, et ob auctam preſſionem in vaſis parte frigida fluidum ibi hinc in partem calidam tranſibit. Si prius fluido eiusmodi ſtatum tribuiſſemus, vt aequilibrium circa foramen ſuperius *e* fuiſſet, tum quoque fluxus per foramen inferius *f* e loco frigidiori in calidiorem eueniſſet; ex quo concludere licet, etiam ſublato pariete EF fluxum perennem in fluido generari, quo interne fluidum ex parte frigida in calidam, ſuperne vero ex calida in frigidam promoveatur, quamdiu ſcilicet diſcrimen caloris durat.

7. Idem hoc etiam ita oſtendi poteſt, vt neque diaphragmate opus ſit, neque ſuperna fluidi ſuperficie; hocque ratiocinium idcirco quoque ad Tab. IX. Fig. 2. atmoſphaeram traduci poſſit. Sumamus ergo in regione ABF inſignem caloris, in regione vero DCG inſignem frigoris gradum adeſſe: tum vero huic fluido alioquin continuo duos tubos horizontales immerſos concipiamus, alterum *ad* in regione ſuperiori, alterum vero *bc* in regione inferiori, quorum vterque e regione calida in frigidam porrigatur. Fingamus nunc fluidum in eiusmodi ſtatu, vt pro tubo inferiori *bc* preſſio fluidi vtrinque ſit eadem,

eadem, ac perſpicuum eſt in tubi ſuperioris *ad* termino *a* preſſionem maiorem eſſe futuram quam in termino *d*. Quam ob rem fluidum per ſuperiorem *ad* ex regione calida in frigidam moueri incipiet; Sin autem initio pro tubo ſuperiori *ad* preſſio vtrinque par eſſet, tum fluidum per inferiorem *cb* ex regione frigida in calidam tranſibit. Ex quibus colligitur, quomodocunque fluidum fuerit diſpoſitum, ſemper in regione ſuperiori fluxum ex parte calida in frigidum, in regione inferiori autem fluxum contrarium ex calida parte in frigidam oriri debere.

8. Egregie haec cum experientia conueniunt; ſi enim vas huiusmodi ſatis amplum aqua repletum altero tantum latere AB igni admoueatur, vt aquae pars huic lateri vicina calorem adipiſcatur, in oppoſita autem parte CD frigida maneat, tum mox obſeruare licet in ſuperficie ſuprema aquam continuo a parte calida in frigidam proferri; quod fieri non poſſet niſi ſimul circa fundum fluxus contrarius oriretur. Si hoc modo piſa vel lentes in aqua coquantur, dum vas ex vna tantum parte vim ignis experitur, iſte motus multo facilius agnoſcitur. Tum etiam idem phaenomenum in aëre maxime cernitur; dum enim conclauis calefacti ianua in conclaue frigidum aperitur, mox aëris motus per aperturae partem ſummam, ex conclaui calido in frigidum, per infimam autem ex frigido

in calidum ſentitur. Quin etiam aſcenſus aeris per caminum, vi ignis vulgo tributus, eidem cauſae debetur, dum in regione inferiori aër continuo ad ignem affluit; ac prope fornacem calefactum in hypocauſto aër continuo aſcendere obſeruatur, in locis frigidioribus iterum deſcenſurus.

9. Nullum etiam eſt dubium, quin ex hoc principio venti conſtanter ab oriente ſpirantes ſub zona torrida explicari queant, verum ne coniecturis atque adeo determinationibus quodammodo vagis nimis tribuere videar, ipſam horum motuum generationem et celeritatem ex primis mechanicae principiis definire conabor. Quod cum in genere pro fluido quaqua verſus expanſo praeſtare non liceat, inueſtigationes meas ad motum fluidorum in tubis cuiuscunque figurae adſtringam, quae quidem limitatio veritati concluſionum inde deducendarum nullam vim afferet; cum quomodocunque etiam motus fuerit comparatus, via qua quaelibet particula promouetur, mente ſaltem vt tubus conſiderari poſſit. Hos igitur tubos ita anguſtos aſſumo vt in qualibet ſectione ad eorum directionem normaliter facta nulla motus inaequalitas locum habere poſſit, ſed tota maſſa huiusmodi ſectionem implens communi motu proferatur. Quantumuis autem haec hypotheſis limitata videatur, tamen probe notandum eſt fere omnia quae adhuc circa motum flui-

dorum

dorum ſunt inueſtigata, ex hac hypotheſi eſſe deriuata; quae cum egregie cum experientia conſentiant, eo minus verendum eſt, ne ei innixi in errorem praecipitemur.

10. Sit igitur AB huiusmodi tubus, figurae cuiuscunque, et cuius amplitudo vtcunque ſit variabilis; in quo fluidum indolis cuiuscunque moueatur. Ad hunc motum definiendum ad duas quantitates variabiles principales ſpectari oportet, quarum altera loci in tubo, altera vero temporis determinationem contineat. Pro priori ſumto in tubo loco fixo A, ſtatuamus puncti cuiuscunque S ab eo diſtantiam ſeu arcum $AS = s$, curuaminis ſcilicet tubi ſimul ratione habita; tum vero pro poſteriori epocha quaedam fixa ſtabiliatur, a qua tempora deinceps computentur; et nunc quidem ponamus tempus inde elapſum eſſe $= t$, quod in minutis ſecundis exprimamus, ad quod propterea calculum ſequentem accommodari conueniet. Quaecunque iam ad motum pertinent, ea per has duas variabiles exprimi oportebit, vt intelligatur, quomodo fluidi ſtatus tam in quouis tubi loco, quam ad quoduis tempus futurus ſit comparatus. Tab. IX. Fig. 3.

11. Nunc igitur, hoc eſt elapſo ab illa epocha tempore $= t$ ſec. ponamus fluidi particulae in S haerentis denſitatem eſſe $= q$, preſſionem $= p$ et celeritatem qua verſus B progreditur $= v$; tum

vero

vero ſit amplitudo tubi ad S $= rr$, eiusque altitudo ſuper quodam plano horizontali $= z$ quae duae poſteriores quantitates cum a ſolo tubi loco S pendeant, vt functiones ſolius variabilis s ſunt ſpectandae. Praecedentes vero tres quantitates q, p, v, quoniam in eodem loco ſucceſſu temporis variationes recipere poſſunt, vt functiones ambarum variabilium s et t conſiderari, et in calculo conformiter tractari debent. Celeritatis autem v ſignificatum ita definio, vt hac littera ſpatium, quod iſta celeritate vniformiter vno minuto ſecundo percurreretur. Tum vero certa quadam denſitate per vnitatem expreſſa, littera q numerum quendam denotabit; at littera p altitudinem quandam exhibet, columnae ſcilicet ex materia illa, cuius denſitas vnitate deſignatur, conſtantis, et pondere ſuo preſſionem in S referentis.

12. His poſitis euidens eſt, cum quantitates rr et z vt functiones cognitae variabilis s ſpectari queant, totum negotium huc reuocari, vt cuiusmodi tres illae quantitates q, p et v ſint functiones binarum noſtrarum variabilium s et t definiatur, in quem ſcopum omnes vires calculi ſunt intendendae; ex quo intelligitur tribus opus eſſe aequationibus ad illas quantitates determinandas; pro noſtro autem inſtituto duae ſufficiunt, quandoquidem in quouis tubi loco gradum caloris, a quo denſitas pendet, vt cognitum aſſumimus. Si enim fluidum ſit aqua, ex calore immediate denſitas innoteſcit; ſin

An autem ſit aër, preſſio inſuper in computum duci debet, quae hoc caſu elaſticitatem repraeſentat, ideoque recte denſitati et calori coniunctim proportionalis aeſtimatur. Quemadmodum igitur praeterea duas aequationes obtinere liceat, accuratius inueſtigabo.

13. Primum igitur obſeruo per aſſumta elementa moleculae fluidi cuiusque Ss promotionem tempuſculo infinite paruo dt factum aſſignari poſſe; quam ergo ſi in $S's'$ perueniſſe ſumamus, quia etiam hic denſitas definitur, neceſſe eſt vt maſſa $S's'$ praeciſe aequalis ſit maſſae Ss, vnde vnam aequationem eliciemus. Poſito igitur elemento $Ss = ds$, erit moleculae Ss volumen $= rrds$, quod in denſitatem q ductum dabit eius maſſam $= qrrds$. Cum iam puncti S celeritas ſit $= v$ ea hoc punctum tempuſculo dt proferetur per ſpatiolum $SS' = vdt$; puncti vero s nunc celeritas eſt $= v + ds(\frac{dv}{ds})$, qua eodem tempuſculo dt proferetur per ſpatiolum $ss' = vdt + dsdt(\frac{dv}{ds})$: vnde fit $S's' = Ss + ss' - SS' = ds + dsdt(\frac{dv}{ds})$. Quaeratur amplitudo tubi in S', quae ob $SS' = vdt$ erit $= rr + vdt. \frac{d.rr}{ds}$, ex quo volumen particulae $S's'$ erit $= rrds + rrdsdt(\frac{dv}{ds}) + vdtds. \frac{d.rr}{ds}$ vbi notandum eſt $\frac{d.rr}{ds}$ eſſe functionem datam ipſius s. At denſitas quae in S erat $= q$, nunc poſt tempuſculum dt et per ſpatiolum $SS' = vdt$ progrediendo colligitur $= q + dt(\frac{dq}{dt})$

 $+vdt$

$+vdt(\frac{dq}{ds})$, hincque maſſa particulae in $S's'$ tranſlatae:

$$=qrrds+qrrdsdt\,(\frac{dv}{ds})+qvdtds.\frac{d.rr}{ds}+rrdsdt(\frac{dq}{dt})+rrvdsdt(\frac{dq}{ds})$$

neglectis ſcilicet terminis, in quibus differentialia ſecundum gradum eſſent ſuperaturae.

14. Quoniam itaque haec maſſa praecedenti $qrrds$ debet eſſe aequalis facta diuiſione per $ds\,dt$ hanc conſequimur aequationem, qua iam vna motus conditio determinatur:

$$qrr(\frac{dv}{ds})+qv\frac{d.rr}{ds}+rrv(\frac{dq}{ds})+rr(\frac{dq}{dt})=0$$

cuius tria membra priora manifeſto in hoc vnum coëunt $(\frac{d.\,qrrv}{ds})$, ita vt noſtra aequatio in hanc formam contrahatur:

$$(\frac{d.qrrv}{ds})+rr(\frac{dq}{dt})=0$$

cuius prius membrum ex ſola variabilitate ipſius s, poſterius vero ipſius t tantum eſt repetendum, quemadmodum motus ſignandi iam ſatis receptus declarat, quam ob rem eius vlteriori explicationi ſuperſedeo. Quia amplitudo tubi eſt data, hac aequatione certa relatio inter denſitatem et celeritatem exprimitur.

15. Altera aequatio qua adhuc indigemus, ex acceleratione concludi poteſt. Scilicet cum celeritas nunc in S ſit v, haecque particula tempuſculo dt per ſpatiolum $SS'=vdt$ promoueatur, hic eius cele-

celeritas erit $v + v dt (\frac{dv}{ds}) + dt (\frac{dv}{dt})$, ideoque acceleratio $= v (\frac{dv}{ds}) + (\frac{dv}{dt})$, quae vi acceleranti eſt proportionalis ſtatuenda. Conſideremus ergo particulam Ss, cuius maſſa $= qrrds$, quae primo ob grauitatem ſecundum Ss' vrgetur vi acceleratrice $= -\frac{dz}{ds}$, tum vero ob preſſionem in S vi motrice $= prr$, ab altera vero parte s contra vi $= rr(p + ds (\frac{dp}{ds}))$ hinc ergo naſcitur vis motrix $= -rrds (\frac{dp}{ds})$ et vis acceleratrix $= -\frac{1}{q} (\frac{dp}{ds})$ in eandem directionem. Quodſi iam g denotet altitudinem, ex qua grauia tempore vnius minuti ſecundi delabuntur, nouimus poni debere:

$$v (\frac{dv}{ds}) + (\frac{dv}{dt}) = -\frac{2g\,dz}{ds} - \frac{2g}{q} (\frac{dp}{ds}) \text{ ſeu}$$

$$\frac{2g}{q} (\frac{dp}{ds}) + \frac{2g\,dz}{ds} + v (\frac{dv}{ds}) + (\frac{dv}{dt}) = 0$$

quae ergo eſt altera aequatio deſiderata et priori adiuncta omnes fluidorum motus in tubis complectitur.

16. Vt nunc has formulas ad caſum propoſitum accommodemus, ſumamus tubum in ſingulis punctis tam efficaci caloris gradu eſſe praeditum, vt ſimulac fluidum eo peruenit cum eo idem caloris gradus communicetur, quod quidem ſi tubus ingentem habeat extenſionem ſimulque fuerit valde anguſtus, etiam in praxi facile obtinetur, quandoquidem tum per inſignem tractum caloris gradus parum immutatur, fluidoque transfluenti eadem

mutatio mox inducitur, niſi forte eius motus vehementer fuerit rapidus Quia autem hic ad primam motus generationem potiſſimum ſpectamus, hic caſus noſtram inueſtigationem haud perturbabit. Tubi ergo loco cuique S eiusmodi tribuo calorem, eumque perennem, vt fluidi eo verſantis denſitas ſit $=q$, quae cum in eodem tubi loco ſemper ſit eadem, neque ſucceſſu temporis varietur, erit haec quantitas q functio ſolius variabilis s ab altera t neutiquam pendens, ideoque $(\frac{dq}{dt})=0$.

17. Cum igitur ſit $(\frac{dq}{dt})=0$, prima aequatio pro motu definiendo inuenta hanc habebit formam $(\frac{d.qrrv}{ds})=0$ ita vt quantitatis $qrrv$ differentiale ex ſolius s variabilitate ortum ſit nullum; ex quo ſequitur iſtam quantitatem plane non ab s pendere, ſed vel eſſe conſtantem vel functionem ſolius temporis t, ex quo deducimus hanc aequationem integratam $qrrv=\Gamma:t$, hincque $v=\frac{\Gamma:t}{qrr}$ ita vt eodem tempore per totum tubum celeritas ſit reciproce vt tubi amplitudo in denſitatem ducta. Cum iam quantitates q et rr non a tempore t pendeant erit $(\frac{dv}{dt})=\frac{\Gamma':t}{qrr}$ ex quo altera aequatio fit $\frac{2g}{q}(\frac{dp}{ds})+\frac{2g\,dz}{ds}+v(\frac{dv}{ds})+\frac{1}{qrr}\Gamma':t=0$

multiplicetur ea per qds, et tempus t pro conſtante habetur, vt haec prodeat aequatio:

$$2g\,dp+2gq\,dz+qv\,dv+\frac{ds}{rr}\Gamma':t=0$$

quae

quae ergo integrata praebet:

$$2gp + 2g\int q\,dz + \int qv\,dv + \Gamma' : t\int\frac{ds}{rr} = \Delta : t.$$

18. In hac aequatione quia q, rr et z ſunt functiones ipſius s tantum, integralia $\int q\,dz$ et $\int\frac{ds}{rr}$ nullam habent difficultatem; at cum ſit $\int qv\,dv = \frac{1}{2}qvv - \frac{1}{2}\int vv\,dq$ ob $v = \frac{\Gamma:t}{qrr}$ erit

$$\int qv\,dv = \frac{(\Gamma:t)^2}{2qr^4} - \frac{1}{2}(\Gamma:t)^2\int\frac{dq}{qqr^4}$$

ſed eſt $\int\frac{dq}{qqr^4} = -\frac{1}{qr^4} - 4\int\frac{dr}{qr^5}$ vnde fit

$$\int qv\,dv = (\Gamma:t)^2\left(\frac{1}{qr^4} + 2\int\frac{dr}{qr^5}\right)$$

vnde etiam haec integratio quouis caſu facile expeditur. Ponamus breuitatis gratia $\Gamma : t = T$ vt ſit $v = \frac{T}{qrr}$ denotante littera T functionem ipſius t tantum, et quia eſt $\Gamma' : t = \frac{dT}{dt}$ altera aequatio motum determinans erit:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{TT}{qr^4} - 2TT\int\frac{dr}{qr^5} - \frac{dT}{dt}\int\frac{ds}{rr},$$

vbi notetur litteram T exhibere celeritatem fluidi in eo tubi loco vbi eſt $qrr = 1$.

19. Quia hic aſſumſimus denſitatem fluidi vnice a calore pendere, perſpicuum eſt hanc hypotheſin ad eiusmodi fluida eſſe reſtrictam, quae a viribus comprimentibus nullam mutationem patiuntur, cuiusmodi eſt aqua; neque ergo has aequationes ad aërem transferre licet, quippe cuius denſitas inſuper a preſſione ſeu elaſticitate determinatur. In-

terim autem facile intelligitur, ſi motum aquae in tubis diuerſo calore affectis definire nouerimus, aëris motum haud multo fore abſimilem, easdemque fere leges eſſe ſecuturum. Quam ob rem quaeſtionem reſoluendam ita conſtituam:

Tab. IX. Fig. 4. *Si habetur tubus in ſe rediens figurae cuiuscunque* ACBD *et amplitudinis vtcunque variabilis, in cuius ſingulis locis certus caloris gradus vigeat cum fluido ibi transfluente mox communicandus; hicque tubus aqua repleatur, quae primo ope diaphragmatis* Aa *tubo alicubi inſerti in quiete ſeruetur; tum vero, diaphragmate remoto quaeritur motus, qui aquae ob diverſam caloris temperiem inducetur.*

20. Sumto pro lubitu in tubo puncto fixo A, ab eo vocetur puncti cuiusuis S diſtantia ſeu arcus $AS = s$, amplitudo tubi ibidem $= rr$, et gradus caloris tantus, vt aqua ibi verſans denſitatem obtineat $= q$; tum vero puncti huius S altitudo ſuper certo quodam plano horizontali ſit $= z$, ita vt hae tres quantitates rr, q et z tanquam functiones datae ipſius s ſpectari queant. Deinde elapſo tempore $= t$ min. ſec. ſit aquae celeritas in loco $S = v$ in plagam SCB tendens, ibique ſtatuatur preſſio $= p$. His poſitis pro motu cognoſcendo habebimus primo $v = \frac{T}{qrr}$, exiſtente T certa functione temporis T deinceps definienda, tum vero inſuper hanc aequationem:

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{TT}{qr^4} - 2TT\int\frac{dr}{qr^5} - \frac{dT}{dt}\int\frac{ds}{rr}$$

vbi

vbi g denotat altitudinem, ex qua grauia vno minuto ſecundo delabuntur, quam nouimus eſſe 15, 625 ped. Rhen.

21. Tota quaeſtio ergo huc reducitur; quomodo hinc temporis functionem T definiri oporteat, quandoquidem ea cognita motus aquae in toto tubo ad quoduis tempus innoteſcit, dum altera temporis functio $\Delta : t$ tantum in preſſionis p determinationem ingreditur, atque adeo a lubitu noſtro pendet, quia quouis tempore tubum conſtringendo preſſionem vel intendere vel remittere licet. Ex rei autem natura functio illa temporis T ſequenti ratiocinio elici debet: ponatur primo arcus $AS = s = 0$, tempore vt conſtante ſpectato, vt p praebeat preſſionem in loco A; tum ipſi s detur valor toti tubi longitudini ACBDA aequalis, vt in eundem locum A reuertamur, atque valor pro p hinc reſultans neceſſario praecedenti aequalis eſſe debet: atque ex hac aequatione functionem illam T determinare licebit; quae quoniam per integrationem elicitur, ita debet eſſe comparata, vt poſito tempore $t = 0$ ea euaneſcat, quia initio omnis aqua in quiete fuiſſe aſſumitur. Quare ſi tempore ſuccedente quantitas T non amplius fuerit nulla, hinc concludendum erit, aquam deinceps non amplius in quiete permanere poſſe.

22. Quo autem clarius perſpiciatur a quanam cauſa aqua primum ad motum concitetur, ponamus

ſeptum

ſeptum Aa, quo omnis motus coerceretur, adhuc adeſſe et quia in hoc ſtatu quantitas T neceſſario eſt nulla, pro preſſione in ſingulis punctis S altera noſtra aequatio praebet $2gp = \Delta : t - 2g\int q dz$ ſeu $p = f : t - \int q dz$, vnde ſi integrale $\int q dz$ ita capiatur vt euaneſcat ſumto arcu $AS = s = 0$, functio $f : t$ dat preſſionem aquae ſupra ſeptum Aa. Quodſi iam integrale $\int q dz$ per totum tubum ACBDA extendatur, eiusque valor tum fiat $= k$, infra ſeptum preſſio erit $= f : t - k$; vnde patet ſublato ſepto Aa guttulam aquae ibi deorſum vrgeri preſſione $f : t$, ſurſum vero preſſione $f : t - k$, ideoque deorſum preſſione k, cui cum iam nihil obſiſtat, manifeſtum eſt totam aquam in tubo ad motum concitatum iri. Quare niſi ille integralis $\int q dz$ per totum tubum extenſi valor k euaneſcat, ſublato ſepto fieri nequit, vt aqua in quiete perſeueret; ſimul vero etiam hinc cauſa perſpicitur motum producens, quae vbicunque ſeptum Aa concipiatur, eadem prodire debet ita vt omnia aquae elementa in toto tubo ſimul ad motum pari vi impellantur.

23. Hinc autem primo perſpicuum eſt, ſi denſitas q vbique eſſet eadem, ſeu $q = b$, ob $\int q dz = bz$, ſiquidem planum horizontale, a quo altitudinem z metimur, per ipſum locum A ducamus, reuerſione per totum facta, altitudinem z iterum euaneſcere, ideoque fore $k = 0$; quo ergo caſu etiam remoto ſepto Aa aequilibrium conſeruabitur. Idem

quoque

quoque innumerabilibus aliis caſibus, quibus denſitas q eſt variabilis euenire poteſt, veluti ſi fuerit $q = A + Bz^{\alpha} + Cz^{\beta} + Dz^{\gamma}$ etc. quoniam integrale $\int q\,dz = Az + \frac{B}{\alpha+1} z^{\alpha+1} + \frac{C}{\beta+1} z^{\beta+1} + \frac{D}{\gamma+1} z^{\gamma+1}$ etc. ita ſumtum vt euaneſcat poſito $z = 0$, facta integra reuolutione, vbi fit iterum $z = 0$ denuo euaneſcit. Atque in genere hoc euenire debere perſpicuum eſt, quoties denſitas q a ſola altitudine z pendet, ita vt vbique in paribus altitudinibus denſitas ſit eadem; quam conditionem ad aequilibrium abſolute neceſſariam eſſe iam olim demonſtraui.

24. Eatenus autem quantitas k non euaneſcit, quatenus in aequalibus altitudinibus non eadem denſitas deprehenditur, id quod ſequenti modo luculentiſſime oſtenditur. Ponamus in A denſitatem eſſe minimam, indeque per C vsque ad B progrediendo continuo augeri, vt in B ſit maxima, hinc vero per D a A reuertendo iterum diminui; iam ducta recta verticali CABD, cuius puncta A, C, B, D altitudines eorundem tubi locorum referant, ad quae conſtituantur applicatae Aa, Cc, Bb, Dd denſitates aquae in his locis repraeſentantes; eorumque puncta a, c, b, d, in curua quadam in ſe redeunte $acbda$; ac ſi punctum S altitudini loci in tubo S reſpondeat, vt ſit $AS = z$, erit hic applicata $Ss = q$, ideoque integrale $\int q\,dz$ exprimit aream $AaSs$; vnde ſi punctum S vsque ad ſummum C promoueamus, area habebitur $AaCc$: hinc autem vlterius vsque Tab. X. Fig. 5.

 ad

ad B progrediendo, quia areae per altitudines imminutas negatiue capi debent, pro hoc loco B integrale $\int qdz$ erit $AaCc-CcbB$ pro puncto autem imo D erit $= AaCc-CcbdD$. Atque iterum a D ad A aſcendendo fit id $AaCc-CcbdD+DdaA$, quod cum det valorem ipſius k erit $k =$ areae $acbda$, vnde patet littera k deſignari aream a linea $acbda$ in ſe redeunte incluſam.

Tab. X. Fig. 6. 25. Hic obſeruo fieri poſſe, vt aqua in tubo quiescat, etiamſi in paribus altitudinibus eius denſitas non ſit eadem. Euenit hoc ſi curua illa in ſe rediens eiusmodi lemnisci $Oasc\sigma\alpha O\beta dbO$ habeat figuram, vt areae a nodo O ſeparatae inter ſe ſint aequales; quia enim hoc caſu altera area negatiue accipi debet, area tota k in nihilum abire eſt cenſenda. Hic ergo caſus locum habet, ſi a puncto imo D ſiniſtrorſum per A ad ſummum C ascendendo ſcala denſitatum q ſit curuae ramus $dbOasc$, tum vero a puncto ſummo C ad infimum D dextrorſum per B deſcendendo ſcala denſitatum ſit ramus $c\sigma\alpha O\beta d$. Etſi ergo in aequalibus altitudinibus AS denſitates ſunt inaequales in altero loco ſcilicet ſiniſtro Ss dextro vero $S\sigma$, tamen haec inaequalitas non obſtat quo minus aqua in tubo contenta ſtatum aequilibrii ſeruare poſſit; dummodo ambo illi rami eiusmodi lineam in ſe redeuntem conſtituant cuius tota area ad nihilum reducatur.

26. Ne-

26. Nequaquam autem hi caſus Theoriae iam olim ſtabilitae, qua ad aequilibrium in altitudinibus paribus aequales denſitates requiruntur, aduerſatur; namque Theoria illa in genere ad fluida quaqua verſus patentia et ſecum communicantia eſt accommodata, in quibus vtique nullum aequilibrium ſine iſta conditione dari poteſt. Quando autem fluida tubis ſunt incluſa, ita vt diuerſae fluidi partes non aliter niſi per tubum inter ſe communicare queant, tum illa conditio vehementer reſtringitur, vt non amplius abſolute ſit neceſſaria. Atque adeo iam inſignem exceptionem hic notatuimus, dum tubi continuitate ſepto intercluſa fluidum ſemper neceſſario in aequilibrio coercetur quantumuis etiam denſitates in paribus altitudinibus fuerint diuerſae. Deinde vero etiam remoto ſepto, dummodo tubus non prorſus aqua ſit plenus, ſed portio quaedam eius vacua relinquatur, iam dudum conſtat ſemper aequilibrium exiſtere poſſe, etiamſi in paribus altitudinibus non aequalis fluidi denſitas reperiatur. Quare eo magis mirum videri debet, hoc non ſemper euenire poſſe, quando tubus in ſe rediens omnino fluido eſt repletus, adhuc magis autem hoc paradoxum augebitur, quando oſtendero ad id vt aequilibrium certo obtineri queat, requiri vt ad minimum certum aliquod ſpatium vacuum relinquatur, cuius adeo quantitatem quouis caſu aſſignare licet.

 27. His

Tab. X. Fig. 7. 27. His praemiſſis, vt tandem quaeſtionis principalis §. 19. propoſitae ſolutionem determinatam exhibeam, ne vniuerſalitas calculum impediat, tubo primum figuram circularem tribuam eumque in plano verticali conſtitutum conſiderabo; tum vero etiam quo facilius calculi difficultates ſuperem, amplitudinem eius vbique eandem ſtatuam, vt quantitas rr ſit conſtans. Deinde ducto diametro horizontali AB, in eius termino A calorem maximum in B vero minimum eſſe aſſumam, vt aquae denſitas in A ſit minima in B vero maxima, in loco autem ſummo C et imo D valorem quendam medium teneat. Parum autem referet, quomodo variatio denſitatis conſtituatur, igne autem ad A ſuſcitato quia calor in ratione duplicata diſtantiarum decreſcere aeſtimatur, pro quouis autem tubi puncto S diſtantiae ſeu cordae AS quadratum ſinui verſo AZ eſt proportionale, poſito angulo AOS $=\Phi$ ſtatuamus aquae in S denſitatem $q=1-\alpha \operatorname{coſ}.\Phi$, vt denſitas minima in A ſit $=1-\alpha$ maxima in B $=1+\alpha$, et media in C vel D $=1$. Tum vero poſito circuli radio OA $=a$, erit arcus AS $=s=a\Phi$, et puncti S altitudo $sZ=z=a\operatorname{ſin}.\Phi$.

28. Sit porro amplitudo tubi conſtans $rr=ff$, et elapſo tempore $=t$ celeritas aquae in C vel D $=u$, vt ſit $T=ffu$, celeritas vero in S $=\frac{ffu}{qrr}=\frac{u}{1-\alpha \operatorname{coſ}.\Phi}=v$, quam in plagam ACBD dirigi aſſumo. Iam ſingula

gula membra aequationis §. 20. exhibitae ſeorſim euoluamus, et primo ob $dz = ad\Phi \operatorname{coſ}.\Phi$ habebimus $\int q dz = a\int d\Phi \operatorname{coſ}.\Phi (1 - \alpha \operatorname{coſ}.\Phi) =$
$a\int d\Phi (\operatorname{coſ}.\Phi - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha \operatorname{coſ}. 2\Phi)$ vnde fit:

$$\int q dz = a \operatorname{ſin}.\Phi - \tfrac{1}{2}\alpha a \Phi - \tfrac{1}{4}\alpha a \operatorname{ſin}. 2\Phi.$$

Deinde eſt $\frac{TT}{qr^4} = \frac{uu}{1 - \alpha \operatorname{coſ}.\Phi}$, et $\int \frac{dr}{qr^4} = 0$ ob rr conſtans, ac denique $\frac{dT}{dt}\int \frac{ds}{rr} = \frac{sdu}{dt} = \frac{a\Phi du}{dt}$

vnde aequatio pro motu determinando colligitur:

$$2gp = \Delta : t - 2ga(\operatorname{ſin}.\Phi - \tfrac{1}{2}\alpha\Phi \;\; \tfrac{1}{4}\alpha \operatorname{ſin}. 2\Phi) - \frac{uu}{1-\alpha \operatorname{coſ}.\Phi} - \frac{a\Phi du}{dt}$$

nunc poſito angulo $\Phi = 0$ pro preſſione in puncto A nanciſcimur: $2gp = \Delta : t - \frac{uu}{1-\alpha}$, at poſito $\Phi = 2\pi$ ſeu 4 angulis rectis pro eodem loco conſequimur:

$$2gp = \Delta : t + 2\pi\alpha g a - \frac{uu}{1-\alpha} - \frac{2\pi a du}{dt}$$

qui duo valores aequales poſiti praebent:

$$\alpha g - \frac{du}{dt} = 0 \text{ et integrando } u = \alpha g t.$$

29. Hinc intelligimus, cum primo inſtanti quo ſeptum remouetur, vniuerſa aqua fuiſſet in quiete, dehinc eam mox motum eſſe concepturam eumque vniformiter acceleratum, ita vt celeritas in ipſa temporis ratione increſcat. Videmus quoque motum fore eiusmodi, vti initio dixi, ſcilicet in parte inferiori e loco frigido B per D ad locum calidum A accedentem, ſupra vero hinc per C ad frigidum B recedentem. Deinde etiam perſpicimus

hunc motum eo fore vehementiorem, quo maior fuerit littera α, ſeu quo magis denſitas aquae in B ſuperet denſitatem in A. Cum igitur quo maior fuerit tubi diameter AB refrigeratio in B quaſi in ratione fiat duplicata, manifeſtum eſt, quo maior fuerit tubus eo celeriorem motum generatum iri. Perpetuo autem ex diſcrimine quo calor in A excitatus ſuperat caloris vel frigoris gradum in B, motus acceleratio eſt iudicanda.

30. Primo quidem initio ſatis tuto colligere poſſumus, celeritatem motus in ratione temporis increſcere, ſtatim autem ac motus tam velox euaſerit, vt aquae calor ſe ad tubi temperaturam componere nequeat, ideoque iam in B aqua multo calidior, in A vero frigidior reperiatur quam in calculo aſſumſimus, mirum non eſt ſi acceleratio mox multo minorem rationem ſequatur, ac tandem ad certum vniformitatis gradum ſit peruentura, quod autem fieri nequit niſi aqua vel ad eundem caloris gradum vbique fuerit perducta vel ſaltem in locis aeque altis eundem gradum conceperit. Ad quietem autem nunquam redigi poterit, quoniam ſimul ac paulisper quieuerit, ignisque effectum in A ſenſerit, contra vero ad B fuerit refrigerata, motus de nouo inſtauraretur. Ex quo quamdiu tubus in A calidior fuerit quam in B, motus aquae continuo debet durare. Ceterum facile intelligitur ad motum producendum hunc caſum, quo gradus maxi-

maximi minimique caloris in diametro horizontali ſibi oppoſitos aſſumimus maxime eſſe efficacem, lentioremque motum eſſe futurum, ſi haec oppoſitio in diametro obliquo fieret quod oſtendiſſe operae erit praetium.

31. Ponamus ergo maximum calorem in A minimum in B, vt diameter AB ad horizontalem HK inclinatus ſit angulo $HOA = \zeta$, ſit vt ante angulus $AOS = \Phi$, radius $AO = a$, hinc arcus $AS = s = a\Phi$ et denſitas in S nempe $q = 1 - \alpha \operatorname{coſ.} \Phi$; atque omnia ſe habebunt vt ante niſi quod altitudo SZ ſit hic $z = a \operatorname{ſin.}(\Phi - \zeta)$, vnde ob $dz = a d\Phi \operatorname{coſ.}(\Phi - \zeta)$ erit

$$\int q dz = a \int d\Phi (\operatorname{coſ.}(\Phi-\zeta) - \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{coſ.}\zeta - \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{coſ.}(2\Phi-\zeta))$$

ſeu $\int q dz = a \operatorname{ſin.}(\Phi-\zeta) - \tfrac{1}{2}\alpha a \Phi \operatorname{coſ.}\zeta - \tfrac{1}{4}\alpha a \operatorname{ſin.}(2\Phi - \zeta)$

ita vt iam habeamus:

$$2gp = \Delta : t - 2ga(\operatorname{ſin.}(\Phi-\zeta) - \tfrac{1}{2}\alpha\Phi \operatorname{coſ.}\zeta - \tfrac{1}{4}\alpha \operatorname{ſin.}(2\Phi-\zeta)) - \frac{uu}{1 - \alpha \operatorname{coſ.}\Phi} - \frac{a\Phi du}{dt}$$

quae cum eadem eſſe debeat ſiue ponatur $\Phi = 0$ ſiue $\Phi = 2\pi$ oportet eſſe: $2\pi \alpha g a \operatorname{coſ.}\zeta - \frac{2\pi a du}{dt} = 0$ ideoque $u = \alpha g t \operatorname{coſ.}\zeta$, vnde diſcimus motum etiam fore vniformiter acceleratum, ſed minus quam ante in ratione coſinus anguli AOH, ita vt ſi hic angulus fuerit rectus, motus plane nullus ſit oriturus. Euenit ergo hoc ſi maximus calor in tubi loco ſiue ſummo ſiue imo excitetur, minimusque e regione

gione reperiatur; tum enim vtique in paribus altitudinibus denſitas erit eadem.

Tab. X. Fig. 7. 32. Maneat autem vt ſupra maximus calor in A minimusque in B vt diameter AB ſit horizontalis; tum vero etiam ſit aquae in S verſantis denſitas $q = 1 - \alpha \operatorname{coſ.} \Phi$ exiſtente angulo $AOS = \Phi$, ideoque arcu $AS = s = a\Phi$ ob radium $OA = a$; et altitudo $sZ = z = a \operatorname{ſin.} \Phi$. At amplitudo tubi iam non amplius vbique ſit eadem, ſed eam ita variari aſſumamus, vt ſit $rr = \frac{ff}{1 + \beta \operatorname{coſ.} \Phi + \gamma \operatorname{ſin.} \Phi}$, ponamusque iterum $T = ffu$, vt ſit $v = \frac{ffu}{qrr} = \frac{u}{q}(1 + \beta \operatorname{coſ.} \Phi + \gamma \operatorname{ſin.} \Phi)$. His poſitis habebimus vt ante:

$$\int q\,dz = a \operatorname{ſin.} \Phi - \tfrac{1}{2}\alpha a \Phi - \tfrac{1}{4}\alpha a \operatorname{ſin.} 2\Phi.$$

Verum pro hoc caſu adipiſcimur:

$$\frac{TT}{qr^4} = \frac{uu(1 + \beta \operatorname{coſ.} \Phi + \gamma \operatorname{ſin.} \Phi)^2}{1 - \alpha \operatorname{coſ.} \Phi}$$

et ob $d.\frac{1}{r^4} = \frac{1}{f^4} d.(1 + \beta \operatorname{coſ.} \Phi + \gamma \operatorname{ſin} \Phi)^2 = \frac{-4dr}{r^5}$ erit $\frac{-\beta d\Phi \operatorname{ſin.} \Phi + \gamma d\Phi \operatorname{ſin.} \Phi}{f^4}(1 + \beta \operatorname{coſ.} \Phi + \gamma \operatorname{ſin} \Phi) = \frac{-2dr}{r^5}$ hincque

$$2TT \int \frac{dr}{qr^5} = uu \int \frac{d\Phi(\beta \operatorname{ſin.} \Phi - \gamma \operatorname{coſ.} \Phi)(1 + \beta \operatorname{coſ.} \Phi + \gamma \operatorname{ſin.} \Phi)}{1 - \alpha \operatorname{coſ.} \Phi}.$$

Quia vero fractio α vt valde parua ſpectari poteſt, loco $\frac{1}{1 - \alpha \operatorname{coſ.} \Phi}$ ſcribendo $1 + \alpha \operatorname{coſ.} \Phi$ prodibit integrando:

$$2TT \int \frac{dr}{qr^5} = uu \begin{cases} -\beta \operatorname{coſ.} \Phi - \gamma \operatorname{ſin.} \Phi - \frac{1}{4}(\beta\beta - \gamma\gamma) \operatorname{coſ.} 2\Phi - \frac{1}{2}\beta\gamma \operatorname{ſin.} 2\Phi - \frac{1}{4}\alpha\beta \operatorname{coſ.} 2\Phi \\ -\frac{1}{2}\alpha\gamma\Phi - \frac{1}{4}\alpha\gamma \operatorname{ſin.} 2\Phi - \frac{1}{4}\alpha(\beta\beta - \gamma\gamma) \operatorname{coſ.} \Phi - \frac{1}{2}\alpha\beta\gamma \operatorname{ſin.} \Phi \\ \qquad - \frac{1}{12}\alpha(\beta\beta - \gamma\gamma) \operatorname{coſ.} 3\Phi - \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma \operatorname{ſin.} 3\Phi) \end{cases}$$

ac

ac denique $\frac{dT}{dt}\int\frac{ds}{rr} = \frac{adu}{dt}\int d\Phi(1+\beta\,\text{coſ.}\,\Phi+\gamma\,\text{ſin.}\,\Phi)$ $= \frac{adu}{dt}(\Phi+\beta\,\text{ſin.}\,\Phi-\gamma\,\text{coſ.}\,\Phi)$. Quare cum valor ipſius p idem prodire debeat ſiue ponatur $\Phi = 0$ ſiue $\Phi = 2\pi$, peruenimus ad hanc aequationem:

$$2\pi\alpha g a + \pi\alpha\gamma uu - \frac{2\pi a du}{dt} = 0$$

ſeu $dt = \frac{2adu}{\alpha(2ga+\gamma uu)}$ ſeu $\alpha g dt = \frac{du}{1+\frac{\gamma uu}{2ga}}$.

33. Hic ergo primum obſeruo, ſi fuerit $\gamma = 0$, ſeu amplitudo $rr = \frac{ff}{1+\beta\,\text{coſ.}\,\Phi}$, fore vt ante pro tubo aequaliter vbique amplo $u = \alpha g t$; hoc igitur euenit ſi in aequalibus a puncto A diſtantiis tam ſupra diametrum AB quam infra amplitudo fuerit eadem, ſiue in A amplitudo ſit maxima ſiue in B. Cum igitur ob quantitatem β nulla mutatio in motu oriatur, niſi quatenus celeritas $v = \frac{u}{1-\alpha\,\text{coſ.}\,\Phi}(1+\beta\,\text{coſ.}\,\Phi+\gamma\,\text{ſin}\,\Phi)$ ab ea pendet, dum celeritas media u eadem manet; ponamus $\beta = 0$, vt ſit $rr = \frac{ff}{1+\gamma\,\text{ſin.}\,\Phi}$; ac ſi γ habeat valorem poſitiuum, amplitudo tubi in loco ſummo C ſit minima $= \frac{ff}{1+\gamma}$ in imo vero D maxima $\frac{ff}{1-\gamma}$; at contra ſi γ valorem habeat negatiuum puta $\gamma = -\delta$ tubi amplitudo in C ſit maxima $\frac{ff}{1-\delta}$ in D vero minima $= \frac{ff}{1+\delta}$. Perſpicuum eſt autem hos duos caſus probe a ſe inuicem diſtingui oportere, cum aequationis inuentae integratio priori caſu per loga-

 rithmos,

rithmos, poſteriori vero per arcus circulares abſolui debeat; quam ob rem vtrumque caſum ſeorſim euolui operae erit pretium, quo deinceps in genere facilius iudicare queamus, quantum motus aquae in tubo immutetur, ſi tubus in parte ſuperiori fuerit vel amplior vel tenuior quam in parte inferiori.

34. Sit γ quantitas poſitiua ſeu tubus in C anguſtior quam in D, ponaturque $\gamma = \frac{2ga}{cc}$ vt ſit $rr = \frac{ccff}{cc + 2ga\,\sin.\Phi}$ eritque $\alpha g\,dt = \frac{cc\,du}{cc + uu}$ et $\alpha g t = c\,\text{Ang tang}\,\frac{u}{c}$ ſeu $u = c\,\text{tang}\,\frac{\alpha g t}{c}$ vnde patet celeritatem u iam fieri infinitam elapſo tempore finito $t = \frac{\pi c}{2\alpha g}$; hoc ergo caſu motus aquae multo magis acceleratur, quam caſu, quo tubus vtique eſt aeque amplus, quia vt vidimus tum elapſo demum tempore infinito celeritas fit infinita. Contrarium euenit quando $\gamma = -\frac{2ga}{cc}$ ſeu $rr = \frac{ccff}{cc - 2ga\,\sin.\Phi}$, ideoque tubus in ſuperiori parte C amplior eſt quam in parte inferiori D, cum enim tum ſit $\alpha g\,dt = \frac{cc\,du}{cc - uu}$ erit $\alpha g t = \frac{1}{2} c\, l\, \frac{c + u}{c - u}$, vnde patet elapſo tempore infinito celeritatem u non vltra terminum c creſcere poſſe. Hoc ergo caſu motus aquae multo minus acceleratur, quam ſi tubus eſſet vbique aeque amplus. Quam ob rem in genere affirmare licet, quoties tubi pars ſuperior ad C angu-
tubo ſtior fuerit quam inferior ad D tum motum aquae in tubo magis accelerari, minus vero, ſi ſuperior pars fuerit amplior inferiori.

35. Quae-

35. Quae hactenus de tubo circulari ſunt inventa ad tubos figurae cuiuscunque haud difficulter extenduntur. Quomodocunque enim figura et amplitudo tubi fuerit comparata, formulam generalem § 20. traditam facile ſimili modo tractare licet. Ponatur enim $T = ffu$, vt u denotet aquae celeritatem in eo tubi loco, vbi amplitudo eſt $= ff$. et denſitas aquae $= 1$, tum vero ſit $rr = \frac{ff}{\omega}$ vt in loco quouis S ſit celeritas $v = \frac{\omega u}{q}$; quia nunc eſt $\frac{1}{r^4} = \frac{\omega\omega}{f^4}$ erit $-\frac{2dr}{r^5} = \frac{\omega d\omega}{f^4}$, vnde haec habebitur aequatio: Tab. IX. Fig. 4.

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz - \frac{\omega^2 uu}{q} + uu\int\frac{\omega d\omega}{q} - \frac{du}{dt}\int\omega ds$$

ſumantur iam haec integralia ita vt euaneſcant poſito $s = 0$, tum vero loco s ſcribatur tota tubi longitudo ASCBDA, fiatque

$$\int q\,dz = A;\quad \int\frac{\omega d\omega}{q} = B \text{ et } \int\omega ds = C.$$

Atque tum neceſſe eſt vt ſit:

$$-2gA + Buu - \frac{C\,du}{dt} = 0 \text{ ſeu } dt = \frac{C\,du}{Buu - 2gA}$$

vnde ad quoduis tempus celeritas u facile definitur.

36. Iam ſupra obſeruaui eatenus tantum in tubo, qui ex vna parte A calidior eſt quam e regione B, fluidum neceſſario ad motum concitari, quatenus tubus vel prorſus vel propemodum plenus ſtatuatur; ſi enim ex parte tantum plenus aſſumatur, ſemper eiusmodi fluidi ſitus aſſignari poterit,

 in

in quo aequieſcat. Quocirca hunc ſtatum aequilibrii quoties locum habere poteſt, ex formulis noſtris ita definiam, vt inde pateat, quousque aquae infuſae quantitatem augere liceat, antequam ſtatus aequilibrii penitus excludatur. Conſideremus in hunc finem iterum tubum circularem aequaliter amplum in plano verticali conſtitutum in quo diuerſus caloris gradus ita ſit diſtributus, vt in A ſit maximus in B vero minimus exiſtente AB diametro horizontali; iterumque hypotheſi vtamur, vt ſumto angulo $AOS = \Phi$ denſitas aquae ibi verſantis ſit $q = 1 - \alpha \operatorname{coſ} \Phi$. Radius quoque ſit vt ante $OA = a$, et arcus $AS = s = a\Phi$, hincque altitudo $sZ = z = a \operatorname{ſin.} \Phi$. Amplitudo porro tubi ſit $rr = ff$; atque cum aequilibrium adeſſe ponamus, ob celeritatem $u = 0$, noſtra aequatio hanc induet formam:

Tab. X. Fig. 9.

$$2gp = \Delta : t - 2g\int q\,dz = \Delta : t - 2ga(\operatorname{ſin.}\Phi - \tfrac{1}{2}\alpha\Phi - \tfrac{1}{4}\alpha \operatorname{ſin.} 2\Phi)$$

37. Ponamus nunc in ſtatu aequilibrii aquam ex vna parte ad Mm pertingere ex altera vero ad Nn, ſintque arcus $AM = m$, $BN = n$, et anguli $AOM = \mu$ et $BON = \nu$ vt ſit $m = a\mu$ et $n = a\nu$, atque tubi ſpatium vacuum $MN = a(\pi - \mu - \nu)$ quod ſiue ſit prorſus vacuum ſiue aërem contineat, neceſſe eſt vt preſſio ad M praeciſe ſit aequalis preſſioni ad N. At pro preſſione ad M ponendo $\Phi = \mu$ habebimus:

$$2gp = \Delta : t - 2ga(\operatorname{ſin.}\mu - \tfrac{1}{2}\alpha\mu - \tfrac{1}{4}\alpha \operatorname{ſin.} 2\mu)$$

preſſio-

preſſionem vero ad N obtinebimus ſi ab A retrocedendo pro Φ ponamus $-\pi-\nu$, vt ſit $\text{ſin.}\,\Phi = \text{ſin.}\,\nu$, et $\text{ſin.}\,2\Phi = -\text{ſin.}\,2\nu$, vnde fiet:

$$2gp = \Delta : t - 2ga(\text{ſin.}\,\nu + \tfrac{1}{2}\alpha(\pi+\nu) + \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{ſin.}\,2\nu).$$

Pro aequilibrio ergo requiritur vt ſit:

$$\text{ſin.}\,\mu - \tfrac{1}{2}\alpha\mu - \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{ſin.}\,2\mu = \text{ſin.}\,\nu + \tfrac{1}{2}\alpha(\pi+\nu) + \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{ſin.}\,2\nu$$

vnde patet ſi eſſet $\alpha = 0$, ſeu idem caloris gradus per totum tubum regnaret, tum vtique fore $\nu = \mu$; terminosque *M* et N ad libellam diſpoſitos, quemadmodum notiſſima aequilibrii natura poſtulat.

38. Niſi autem ſpatium vacuum $MN = a(\pi-\mu-\nu)$ ſit minimum ob α fractionem ſemper valde exiguam, perſpicuum eſt ex noſtra aequatione ſemper ſitum ita definiri poſſe, vt aequilibrium reſultet. Ponamus enim eſſe $\pi-\mu-\nu = \omega$ ſeu $\nu = \nu-\mu-\omega$, hincque $\text{ſin.}\,\nu = \text{ſin.}(\mu+\omega) = \text{ſin.}\,\mu\,\text{coſ.}\,\omega + \text{coſ.}\,\mu\,\text{ſin.}\,\omega$ et $\text{ſin.}\,2\nu = -\text{ſin.}\,2\mu\,\text{coſ.}\,2\omega - \text{coſ.}\,2\mu\,\text{ſin}\,2\omega$, eritque noſtra aequatio $\text{ſin.}\,\mu - \tfrac{1}{2}\alpha\mu - \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{ſin.}\,2\mu = \text{ſin.}\,\mu\,\text{coſ.}\,\omega + \text{coſ}\,\mu\,\text{ſin.}\,\omega + \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi-\mu-\omega)$
$-\tfrac{1}{4}\alpha\,\text{ſin.}\,2\mu\,\text{coſ.}\,2\omega - \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{coſ.}\,2\mu\,\text{ſin.}\,2\omega$

ſeu

$$\text{ſin.}\,\mu(1-\text{coſ.}\,\omega) - \text{coſ.}\,\mu\,\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{ſin.}\,2\mu(1-\text{coſ.}\,2\omega) + \tfrac{1}{4}\alpha\,\text{coſ.}\,2\mu\,\text{ſin.}\,2\omega = \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi-\omega)$$

cui aequationi non amplius ſatisfieri poteſt, ſi capiatur $\omega = 0$, quia tum prius aequationis membrum euaneſcit, poſteriori manente $\alpha\pi$. Statuamus

 ergo

ergo ω valde paruum et ob ſin. $\omega = \omega$, $1 - \cos.\omega = \frac{1}{2}\omega\omega$ fiet:

$$\tfrac{1}{2}\omega\omega \sin.\mu - \omega \cos.\mu - \tfrac{1}{2}\alpha\omega\omega \sin.2\mu + \tfrac{1}{2}\alpha\omega \cos.2\mu = \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi - \omega)$$

vnde proxime colligitur coſ $\mu = \frac{-\alpha\pi}{\omega}$, ſicque patet ſtatim atque ω minus ſit quam $\alpha\pi$, tum hanc aequationem ac proinde etiam aequilibrium nullum amplius locum habere poſſe Extremo autem caſu quo aequilibrium adhuc eſt poſſibile, fit $\mu = \pi$ hincque;

$$\omega + \tfrac{1}{2}\alpha\omega = \tfrac{1}{2}\alpha(2\pi - \omega) \text{ ſeu } \omega = \frac{\alpha\pi}{1+\alpha}.$$

39. Quamdiu ergo ſpatium vacuum $MN = a\omega$ maius eſt quam $\frac{\alpha}{1+\alpha}\pi a$, tamdiu aqua eiusmodi ſitum recipere poteſt, in quo acquieſcat, ac ſi fuerit $MN = \frac{\alpha}{1+\alpha}\pi a$ ſeu $MN = \alpha\pi a$, (quoniam α eſt fractio valde parua), hic caſus erit aequilibrii poſtremus in quo ſpatium vacuum MN circa locum maxime frigidum B verſabitur. Sin autem hoc ſpatium adhuc ſit minus, tum nullum aequilibrium amplius locum habere poterit, ſed vtcunque aqua in tubo fuerit diſpoſita, neceſſario ad motum concitabitur. Quodſi tubus loco aquae contineat aërem, ob analyſeos defectum motus ſimili modo determinari nequit; neceſſario autem motum oriri debere ſequenti ratione demonſtrabitur.

Tab. X. Fig. 7. 40. Aërem igitur tantum tubus noſter contineat, cui figuram circularem et amplitudinem vni-

vniformem tribuamus, ſitum autem teneat verticalem, et ita calore diuerſo ſit affectus, vt in A ſit calor maximus $= 1 + \alpha$, in B vero minimus $= 1 - \alpha$, in loco autem quouis medio S poſito angulo $AOS = \Phi$ ſit caloris gradus $= 1 + \alpha \operatorname{coſ.} \Phi$, exiſtente diametro AB horizontali. Vnde ſi in S denſitas aëris ſit $= q$, et preſſio ſeu elaſticitas $= p$, experientia nouimus preſſionem p eſſe in ratione compoſita denſitatis q et caloris $1 + \alpha \operatorname{coſ.} \Phi$, vnde ponamus $p = hq(1 + \alpha \operatorname{coſ.} \Phi)$. Iam cum motum ipſum determinare non liceat, ſtatuamus in A ſeptum, quo omnis motus compeſcatur, et ob $v = 0$ aequatio ſtatum aëris exprimens erit:

$$\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{ds}\right) + \frac{2g\,dz}{ds} = 0 \quad \text{ſeu} \quad \frac{dp}{q} + dz = 0$$

vbi z denotat altitudinem $sZ = a \operatorname{ſin.} \Phi$ poſito radio circuli $= a$.

41. Cum nunc ſit $q = \frac{p}{h(1 + \alpha \operatorname{coſ.} \Phi)}$, aequatio noſtra hanc induet formam:

$$\frac{h\,dp}{p} + \frac{dz}{1 + \alpha \operatorname{coſ.} \Phi} = 0 \quad \text{ſeu} \quad \frac{h\,dp}{p} + \frac{a\,d\Phi \operatorname{coſ.} \Phi}{1 + \alpha \operatorname{coſ.} \Phi} = 0$$

$$\text{vel} \quad \frac{\alpha h\,dp}{ap} + d\Phi - \frac{d\Phi}{1 + \alpha \operatorname{coſ.} \Phi} = 0$$

cuius integrale reperitur:

$$\frac{\alpha h}{a} lp + \Phi - \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha\alpha)}} \text{Ang. ſin.} \frac{\operatorname{ſin.} \Phi \sqrt{(1 - \alpha\alpha)}}{1 + \alpha \operatorname{coſ.} \Phi} = C$$

vnde pro preſſione ſupra ſeptum Aa ponendo $\Phi = 0$ prodit pro preſſione $\frac{\alpha h}{a} lp = C$ ſeu $p = e^{\frac{Ca}{\alpha h}}$.

Facia-

continuo inferne ad ignem reducatur, ibique quaſi deſtruatur, ac ſimul ignis ab hac continua aeris circulatione ſuſtineatur. Huiusmodi fornacem fig. 10 repraeſentat vbi A eſt fornax proprie ſic dicta et craticula inſtructa, ſuper qua ignis ſuſcitatur. Haec fornax iuxta parietem conclauis conſtruatur, et tam ſuperne ad E quam inferne ad G in tubum deſinat in ſe redeuntem ECFBHDG, et parieti affixum, in quo aer libere circulari, et per tubi partem inferiorem D continuo ad ignem reuerti queat. Sic enim eadem aeris copia in tubo contenta motu ſuo ignem conſeruabit, ac ſi forte nouo ſubinde aëre fuerit opus, is facile per oſtiolum fornacis intromittetur.

Tab. X. Fig. 10.

45. Quo haec conſtructio facilius ſuccedat, conueniat vt tubus EFHG ita totum parietem occupet, vt tam altitudo CD, quam diſtantia AB tanta fiat, quantum circumſtantiae admittunt. Quo enim maior fuerit altitudo CD, eo maiori vi aër ad motum impelletur, tum vero maior diſtantia AB plurimum conferet ad motum accelerandum; quoniam quo magis tubus FH a fornace eſt remotus, eo magis aër eo delatus refrigerabitur, motusque cauſa intendetur. Deinde vero etiam ſupra vidimus, ſi tubus ſupremus C anguſtior fuerit infimo D, hinc quoque motum rapidiorem generari. Quodſi talis fornax ſucceſſu non careat nullum eſt dubium, quin hoc modo conclauia minimo ligni diſpendio calefieri queant,

queant, quoniam nulla caloris pars per caminum vti in vulgaribus fornacibus abigitur, ſed potius tota vis calefaciendi in conclaui conſeruatur. Aër quoque per tubum circulans et calorem ab igne conceptum ſecum ferens non parum ad calefaciendum conferet. Quin etiam iuxta hunc tubum alium pariter in ſe redeuntem et aqua repletum conſtrui erit conſultum; tum enim etiam aqua ſimilem motum concipiet, et continuo prope fornacem praeteriens mox tantopere calefiet vt ab hac cauſa calor conclauis haud parum augeatur. Alia ſubſidia ad hanc conſtructionem perficiendam ipſa experientia ſuppeditabit.

continuo inferne ad ignem reducatur, ibique quaſi deſtruatur, ac ſimul ignis ab hac continua aeris circulatione ſuſtineatur. Huiusmodi fornacem fig. 10 repraeſentat vbi A eſt fornax proprie ſic dicta et craticula inſtructa, ſuper qua ignis ſuſcitatur. Haec fornax iuxta parietem conclauis conſtruatur, et tam ſuperne ad E quam inferne ad G in tubum deſinat in ſe redeuntem ECFBHDG, et parieti affixum, in quo aer libere circulari, et per tubi partem inferiorem D continuo ad ignem reuerti queat. Sic enim eadem aeris copia in tubo contenta motu ſuo ignem conſeruabit, ac ſi forte nouo ſubinde aëre fuerit opus, is facile per oſtiolum fornacis intromittetur.

Tab. X. Fig. 10.

45. Quo haec conſtructio facilius ſuccedat, conueniat vt tubus EFHG ita totum parietem occupet, vt tam altitudo CD, quam diſtantia AB tanta fiat, quantum circumſtantiae admittunt. Quo enim maior fuerit altitudo CD, eo maiori vi aër ad motum impelletur, tum vero maior diſtantia AB plurimum conferet ad motum accelerandum; quoniam quo magis tubus FH a fornace eſt remotus, eo magis aër eo delatus refrigerabitur, motusque cauſa intendetur. Deinde vero etiam ſupra vidimus, ſi tubus ſupremus C anguſtior fuerit infimo D, hinc quoque motum rapidiorem generari. Quodſi talis fornax ſucceſſu non careat nullum eſt dubium, quin hoc modo conclauia minimo ligni diſpendio calefieri queant,

queant, quoniam nulla caloris pars per caminum vti in vulgaribus fornacibus abigitur, ſed potius tota vis calefaciendi in conclaui conſeruatur. Aër quoque per tubum circulans et calorem ab igne conceptum ſecum ferens non parum ad calefaciendum conferet. Quin etiam iuxta hunc tubum alium pariter in ſe redeuntem et aqua repletum conſtrui erit conſultum; tum enim etiam aqua ſimilem motum concipiet, et continuo prope fornacem praeteriens mox tantopere calefiet vt ab hac cauſa calor conclauis haud parum augeatur. Alia ſubſidia ad hanc conſtructionem perficiendam ipſa experientia ſuppeditabit.

DE ADMIRANDO FRIGORE
ARTIFICIALI QVO MERCVRIVS SEV HYDRARGYRVS EST CONGELATVS DISSERTATIO (*).

Auctore

I. A. BRAVNIO.

Cuique tempori ſua inuenta, et quaſi ſuis perſonis reſeruata videntur. Hiſtoria Scientiarum omnium ſaeculorum, praecipue vero ſuperioris et huius, ſatis ſuperque hoc poteſt probare, inuentionibus Antliae pneumaticae, Barometrorum, Thermometrorum, Tuborum opticorum, Electricitatis, praecipue naturalis, Magnetis artificialis, Phoſphori, aberrationis Stellarum fixarum, et multarum aliarum rerum teſtantibus. Neſcio an non admiranda Mercurii congelatio, quam nuper detégere mihi contigit, huc quoque pertineat. Quis enim Mercu-

(*) Eſt quidem haec diſſertatio iam praelecta Septemb. VI. MDCCLX. in Conuentu Academiae ſolemni, et tunc quoque ſimul typis exſcripta; quoniam tamen Commentarii Academiae ſedes ſunt nouorum inuentorum, in illis omnino locus huic diſſertationi adſignari debuit vti quoque eo fine fuit confecta, vt commentariis inſereretur.

Mercurium non habuit pro fluido perpetuo, in omni frigore perſeuerante et perſeueraturo? Nec iudicium et ratiocinium hoc fundamento ſuo deſtituitur, ſi de frigore naturali intelligatur in hoc Terrarum orbe. Quod ſi enim contingere poſſet, vt frigus naturale tantum in tellure noſtra oriretur et regnaret; vaſtitas illius continuo futura eſſet et inanitas, dum homines, animalia, plantae, neceſſario peritura eſſent, et alium plane ſtatum orbis Terrarum accepturus eſſet aliamque faciem. Equidem iam in diſſertatione de gradibus caloris, quos certi liquores et certa fluida ferre poſſunt ad ebullitionem vsque, atque de gradibus frigoris, quos pat poſſunt et ſolent, donec in glaciem abeant, indicaui, ſuſpicionem fuiſſe, Mercurium in Barometris et Thermometris quibusdam in Sibiria congelatum fuiſſe; ſed quum in maioribus frigoris gradibus Mercurius fluidus permanſerit in aliis Barometris et Thermometris: hanc immobilitatem et duritiem obſeruatam, Mercurio plumbo, vel Bismutho adulterato veriſimiliter tribuimus, adeo vt pro vera congelatione Mercurii haberi non poſſet; ſed hoc nunc extra omne dubium poſitum eſt, poſtquam purum Mercurium ſub tam paruis frigoris gradibus, etſi naturaliter magnis, congelari nequire certo conſtat. Experimenta, quae cepimus ad conglaciationem Mercurii producendam, hoc quam euidentiſſime monſtrabunt, quae nunc fideliter propo-

 nemus,

nemus, non omnia quidem, ſed ea, quae momentum aliquod trahunt, et noua Phaenomena monſtrant.

Erat Decembris 14. 1759 quo frigus inſigne incidit, cui aequale, certe eo maius, nunquam antea hic Petroburgi, in Academia obſeruatum. Nam inter horam nouam et decimam a. m. frigus ad 205. ſcalae Delilianae auctum eſt, quum hora 7. antea fuerit 201, qui gradus frigoris ſummus ad hoc vsque tempus ſecundum obſeruationes *Kraftii* et meas fuerat. (*) H. 1. p. m. autem 197 rurſus Thermometrum monſtrabat. Occupatus iam a Decembris ſeptimo eram in explorandis frigoris gradibus, quos certa fluida ferre poſſunt, donec in glaciem abeant, partim ad ea confirmanda, quae in citata diſſertatione Academiae tradita, propoſui, partim vt fluida noua, in quibus experimenta nondum a me capta erant, explorarem, quum a die dicto iam inſigniores frigoris gradus ſint obſeruati, vt d. 7. 189. d. 8. 188. et 189. d. 12. 193. et 195. d. 13. 181. et 191.

Hunc inſignem frigoris gradum 205. in aëre regnantem aptiſſimum iudicabam ad explorandum vna, quo vsque arte hoc frigus naturale augeri poſſet,

(*) Quamuis Delilius iam 1733. Menſe Ianuario in vno Thermometro gradum frigoris 204. obſeruauerit, tamen eodem tempore alterum Thermometrum tantum 202. monſtrauit. Vid. illius Memoires pag. 274.

poſſet, non dubitaris, eo maius frigus artificiale futurum, quo maius frigus naturale eſſet, quod et quaedam experimenta antea capta iam docuerant, teſtante diſſertatione citata. Aqua fortis ſub gradu 204. quem teſtante Thermometro immerſo adſumſerat, erat maiorem partem gelata, glacies ſub ſpecie cryſtallorum nitri adparebat, quae vero in calore, continuo rurſus reſoluebantur. Hanc aquam fortem, cuius media pars adhuc, vt in congelatione ſolet, fluida erat, cepi, captam infudi in glaciem contuſam, portionem ſcilicet circiter tantam, quantam *Fahrenheitius*, auctor frigoris artificialis ſpiritus nitri, requirebat; antea vero exploraui vtrum Thermometrum, glacies contuſa et aqua fortis eandem temperiem haberent, quam perfecte eandem, ſcilicet 204. deprehendi, qui gradus frigoris nunc in aëre obſeruabatur. In prima infuſione Mercurius ad 20 gradus circiter deſcendit, effudi ſpiritum ſecundum Methodum vulgarem, id quod aliquoties repetii, ſed vltra triginta gradus frigus naturale augere non potui, ita vt Mercurius vltra 234. gradus ſcalae noſtrae deſcendere non viſus eſſet. Dum igitur *Fahrenheit* frigus artificiale vltra 40. infra ciphram, nullitatis notam ſcalae ſuae, qui gradus cum 210 Thermometri noſtri conuenit, producere non potuit, neque alii, qui haec experimenta repetiere, inter quos, viros celeberrimos *Reaumurium* et *Muſchenbroekium* honoris cauſſa nominare

nare liceat, vlterius frigus artificiale augere potuere: parum aberat, quin contentus fuiſſem his experimentis, (*) et ſatis habuiſſem, viginti gradibus magis auxiſſe frigus artificiale, quam alii ante me producere potuerunt.

At enim vero quoniam fructum hunc experimentorum meorum nimis exiguum reputaui; mecum conſtitui experimenta haec, ſed alio modo continuare, et tentare an non frigus artē ad ſuperiorem gradum perducere, eoque ampliorem laboris mei et tolerati frigoris fructum conſequi poſſem. Sumſi niuem loco glaciei contuſae, quae vti dixi, iam conſumta erat, quam in vitrum aliud mundum indidi, illudque fere ad ſummum impleui, ita tamen vt niuem ſimul leuiter comprimerem; antea autem niuis frigus Thermometro exploraui, quod perfecte idem erat, ac aëris ambientis, nunc 203. graduum. Quum igitur nix, aqua fortis et Thermometrum eandem temperiem haberent; immerſi Thermometrum in niuem vitro contentam, et primum aliquot guttas tantum, vbi Thermometrum

(*) Imprimis quum glacies contuſa deficeret. De experimentis huc pertinentibus a Reaumurio factis vid. Hiſtoriam Academiae Scientiarum Pariſinae Anni MDCCXXXIV, et quae Muſchenbroeckius ceperat ad hunc finem experimenta vid. in Tentaminibus Academiae del. Cimento pag. 174. P. I.

trum immerſum erat, inſtillaui, quo facto obſervaui Mercurium ad 260 in Thermometro noſtro deſcendiſſe. Gauiſus hoc ſucceſſu egregio, ſpem concepi maiorem, fore, vt, ſi porro experimentum vrgerem, frigus artificiale vlterius promoueri poſſit, nec euentus ſpem feſellit. Nam repetito experimento eadem Methodo ſimplici, tantum paullo maiorem aquae fortis quantitatem infudi, et ſtatim Mercurium ad 380 deſcendiſſe vidi, quo facto Thermometrum in aliud vitrum niue repletum, antequam hos frigoris gradus plane amitteret, immerſi, et tandem hoc tertio experimento Mercurius ad 470. gradus ſcalae noſtrae deſcendit. Quum tam ſtupendum frigoris gradum obſeruarem, oculis vix fidem habere potui, quin credidi bulbum Thermometri eſſe fractum. Sed laetus vidi Thermometrum extractum illaeſum quidem, at Mercurium plane immobilem, quamuis vltra 12. minuta iam in aëre libero eſſet. Portaui hoc Thermometrum in conclaue 125 graduum calidum, et poſt aliquot minuta Mercurius rurſus mobilis factus, adſcendere coepit. Vt certus fierem an non Thermometrum detrimenti quid cepiſſet, et an cum Thermometro meo ordinario, quo obſeruationes inſtituo, adhuc perfecte concordaret; ſuſpendi hoc Thermometrum in eodem loco, vbi Thermometrum meum ordinarium ſuſpenſum erat, et poſt 20. circiter minuta Mercurius temperiem aëris ambientis rurſus adſum-

 ſerat,

ſerat, ita vt perfecte ambo Thermometra concordare conſpicerentur.

Thermometrum, quo vſus fui, bulbum habebat ſphaericum, et ſcala diuiſa erat in 1200. partes, quarum 600 ſupra ciphram, calorem aquae bullientis notantem, et 600 infra eam numerabantur. Vſus eram iam hoc Thermometro in explorando calore Mercurii ebullientis et oleorum. Erat alterum Thermometrum ad manus, cuius ſcala infra o tantum capiebat 360 partes. Repetii et cum hoc idem experimentum, et ſtatim Mercurius ita deſcendit, vt totus intra bulbum eſſet, quem tamen perfecte non implebat. Mercurius et in hoc bulbo ſphaerico immobilis conſpiciebatur, et licet Thermometrum concuterem, nullus tamen motus obſeruari potuit, donec poſt 15. circiter minuta in aëre libero rurſus adſcendere coepit. Adſcendere perrexit in hoc Thermometro Mercurius ad multo maiorem altitudinem, quam aëris ambientis temperies requirebat. Miratus hoc Phaenomenon paradoxum, Thermometrum adcuratius conſideraui, et inueni bullulas quasdam aëreas Mercurio fuiſſe interſperſas, quod in priori Thermometro non contigerat. Ex his et quibusdam aliis experimentis, (omnia enim enarrare nihil attinet) ſatis certus factus fui, Mercurium in Thermometris ſolidum et fixum frigore factum fuiſſe eoque congelatum. Enim vero, quoniam Mercurium ſolidum et fixum

extra

extra Thermometrum non videram et examinare potueram, quoniam bulbos Thermometrorum frangere nolebam, quum alia ad manus non eſſent: congelationem Mercurii tantum tanquam veritatem probabilem ex Phaenomenis concluſam propoſui in proximo ordinario conuentu Academico, die 17. Decembris habito, quo inuentum meum vna cum Methodo mea ſimpliciſſima, qua vſus ſum, fideliter communicaui, vti quoque in Nouell s Petroburgenſibus No. 102. congelatio Mercurii, tanquam veritas quam veriſimillime ex Phaenomenis collecta, tantum eſt propoſita. Vt igitur conglaciationem Mercurii per claram et indubiam experientiam quam certiſſimam redderem; mecum conſtitui, Thermometra in proximis experimentis capiendis frangere, quo indoles Mercurii congelati propius examinari poſſet, et explorari. Exſequi hoc conſilium non prius poteram, quam Decembris 25. quoniam Thermometra plura citius parata non erant. Frigus naturale, quod in aëre regnabat, erat inter horam 9. et 10 a. m. quo tempore experimenta noua inſtitui, ſecundum Thermometrum meum ſcalae Delilianae 199. Vſus ſum eadem Methodo ſimplici, cum variatione tamen quadam: ſcilicet modo Thermometrum prius immerſi in vitrum niue leviter compreſſa impletum, quam aquam fortem inſtillabam, et ſuperinfundebam, modo in niuem prius infudi aquam fortem, quam Thermometrum indidi,

Mm 2 modo

modo ſpiritum infudi primum, nam rem ſemper eodem redire, quis non perſpicit? quoniam omnia ad ſolutionem niuis ab aqua forti redeunt, quam contingere eodem modo debere, ſiue ſpiritus nitri primum infundatur, et deinde nix ſuperaddatur, per ſe quilibet facile intelligit, quamquam interdum alterum altero eſt commodius, et ad ſcopum ſpecialem adcommodatius. Quum itaque Mercurius deſcendiſſet, ita vt immobilis ſtaret, fregi bulbum Thermometri, qui aliquot rimas iam ceperat, adhuc tamen cohaerebat, quo facto obſeruaui Mercurium ſolidum, non tamen ex toto, nam in media globi parte portio quaedam fluida deprehendebatur. Superficies conuexa externa perfecte continua adparebat, interna vero concaua, quam portio fluida egreſſa reliquerat, admodum aſpera conſpiciebatur ita, vt ex paruis globulis compoſita videretur. Tutudi tudite mortarii, quod ad manus erat, Mercurium; ſolidus et extenſus erat, durities vero illius, vti fere plumbi, aut paullo minor mihi videbatur, cuius etiam clangorem percuſſus edebat. Lamellas Mercurii ſolidi dicto inſtrumento extenſas ſcalpello ſecui facile, et nunc molior iam Mercurius ſenſim fieri coepit, poſt 12. autem et quod excurrit, minuta prima in aëre libero priſtinam fluiditatem recuperauit; temperies autem aëris nunc 197. erat. Color Mercurii congelati a fluido vix differebat, adparebat vt argentum politiſſimum

tam

tam in ſuperficie conuexa, quam vbi ſectus erat Mercurius.

Sequenti die 26. frigus ad 212. creuit inter h. 9. et 10. a. m. antea h. 8. erat 208. Hic frigoris gradus igitur tantus eſt, vt ſuperet ſummum antea obſeruatum 7. partibus. Quum ita frigus faueret, iteranda et continuanda experimenta et hoc die duxi, ad confirmanda partim antecedentia, partim ad noua Phaenomena detegenda. In duobus Thermometris ratione Mercurii congelati, idem obſeruaui, quod die antecedenti, et hic Mercurius in bulbis, quos fregi, totus ſolidus non erat, licet portio admodum exigua tantum, multo minor, quam die antecedenti, ſupereſſet, quae fluida manſit; ceterum eodem Modo Mercurium tractaui, ac die antecedenti, malleo tutudi, ſecui, et omnia hoc reſpectu eadem quidem obſeruaui; at differentia haud exigua ſe conſpiciendam praebuit reſpectu deſcenſus Mercurii, qui nunquam a me perfecte idem eſt deprehenſus, neque in his experimentis, neque in antecedentibus et ſequentibus. Ex ſuperioribus iam patet, Mercurium in primo experimento tantum deſcendiſſe ad 470, donec immobilis ſteterit, bulbo tamen illaeſo; in experimento die 25 capto ad 530, et in duobus Thermometris die 26 ad 650 deſcendit. Aſt tam in thermometro, quo vſus ſum d. 25, quam in duobus, quae adhibui d. 26 bulbi rimas quaſdam habebant; cohaerebant tamen adhuc, nec

minima pars vitri bulbi ſeparata erat, et Mercurius congelatus arcte omnibus bulbi partibus adhaerere videbatur. In ſequentibus experimentis multis praecipue ad hunc ſcopum captis obſeruaui, Mercurium ſemper profundius deſcendiſſe, ſi plane et totus congelatus erat, quam ſi portio quaedam fluida maneret. Deſcendebat autem vt plurimum ad 680 et 700, tamen bulbi nunquam ſine rimis erant, quin deſcendit ad 800 et vltra ad 1500, ſed in hoc poſteriori experimento bulbus plane fractus erat, ita vt globus Mercurii plane congelatus excideret, quo lapſu 3 circiter pedes alto, globus Mercurii perfecte congelatus paullum compreſſus factus eſt; in priori vero partes quaedam bulbi tantum exciderant. Ceterum ſemper quo frigus naturale erat maius, eo facilius, ceteris paribus, et celerius experimenta mihi ſucceſſere.

Ceterae conditiones omnino pares ſint, eſt neceſſe, inprimis, vt idem ſpiritus nitri adhibeatur. Quo fortior enim hic ſpiritus, eo melior quoque effectus erat, hinc ſpiritus nitri purus ſimplex minorem ſemper effectum praeſtitit, quam aqua fortis, fortior ſpiritu nitri ſimplici, maiorem autem ſpiritus nitri fumans, quippe fortior aqua forti, quamquam, ſi verum fatendum eſt, haec poſterior differentia effectuum, reſpectu aquae fortis, ſi bonae erat notae, et ſpiritus nitri fumantis ſaepius non admodum notabilis mihi videbatur. Interim ſpiri-

ſpiritus nitri ſimplex ſuum quoque effectum mihi praeſtitit, et congelationem Mercurii produxit, artificio quodam a me adhibito. Quum ſpiritus hic nitri ſimplex niui mixtus deſcenſum Mercurii tantum ad 300. deprimeret, et paullo vlterius diuerſis tentaminibus; impleui ſex vitra niue more conſueto, et poſtquam Thermometrum in primum immerſeram, ſtatim in ſecundum, tertium et quartum ſucceſſiue immerſi, antequam gradum frigoris acceptum notabiliter amitteret; in quarta immerſione, Mercurius erat congelatus, quum in qualibet noua immerſione deſcenſum Mercurii profundiorem obſeruaſſem. Aqua fortis, quae in capiendis experimentis ſaepius gelata fuit, regelata eundem effectum praeſtitit, quam portio fluida in medio non gelata, relicta.

Alia Phaenomenorum differentia ſe manifeſtabat in diuerſis experimentis reſpectu modi deſcenſus Mercurii. Conſtans ac perpetuum ſemper mihi obſeruatum, quod Mercurius primo lentius, deinde cum ſummo impetu in Thermometro deſcenderit, non videtur autem certum eſſe illud punctum, vbi impetus incipiat, quoniam obſeruauimus initium huius celeritatis circa diuerſos Thermometri gradus, circa 300. 350. et vltra, quin in citato experimento, quo Mercurius ad 800. deſcenderat, vsque ad 600. fore regulariter ſatis deſcendit, quo gradu cum maximo impetu deſcendere demum coepit, quo

bulbus

bulbus Thermometri fractus eſt, Mercurius autem perfecte totus congelatus erat. Alia differentia notanda quoque eſt, ſaepius mihi obſeruata, quod, dum ſpiritus nitri infuſus eſt, primum adſcendere coeperit Mercurius, quamuis ſpiritus nitri, nix et Mercurius in Thermometro ad eandem temperiem antea eſſent redacta. Quia hoc Phaenomenum nonnunquam tantum contigit, attendi adcuratius ad omnes circumſtantias; et contigiſſe hoc viſum eſt, quoties infudi aquam fortem in bulbum Thermometri non perfecte niue ſepultum adeoque in bulbum Thermometri a niue vacuum directe. Differentia porro notatu digna eſt, quam bis videre mihi contigit, quod Thermometrum ex mixtura niuis et aquae fortis iam extractum, tamen in aëre libero vlterius deſcenderit, quin ad punctum conglaciationis Mercurii vsque.

Reſpectu diuerſorum Thermometrorum, nullum phaenomenorum differentiam obſeruare potui, ſiue enim longiora, ſiue breuiora Thermometra adhibuerim, ſiue tubi Thermometri ex vitro bohemico, ſiue huius loci, viliori et meliori conſtiterint, ſub iisdem circumſtantiis eadem phaenomena et eundem effectum praeſtitere ſemper Thermometra, quamuis pro diuerſitate vitri, diuerſa eius contractio, quam ſummam in tanto frigore pati debet, quoque fiat neceſſe eſt. Quod ſi vero haec impleui diuerſo Mercurio, diuerſitas quaedam omnino adparebat. Nam

Nam vſurpauimus partim Mercurium ordinarium tam purum tamen, quam haberi potuit, quem ipſi quoque more conſueto, preſſione per corium, et filtratione per tubos capillares purificauimus ita, vt puriſſimus videretur, partim vero vſi ſumus Mercurio reuiuificato ex ſublimato. Hic poſterior procul dubio priori purior, quum puriſſimus haberi ſoleat, inertiam tamen quandam monſtrare mihi viſus eſt, certe tardius, lentius deſcendere videbatur in Thermometris Mercurio reuiuificato repletis, quam in aliis, quin in Thermometro quodam eiusmodi Mercurio repleto, non ſolum deſcenſus fuit lentiſſimus, ſed frigus vltra 300 augere non potui, quamuis in aliis Mercurius ad conglaciationem ſub iisdem circumſtantiis deſcendiſſet, in minoribus tamen Thermometris haec differentia tam notabilis mihi non eſt obſeruata Obſeruata haec mea tamen vix mihi ſufficere videntur ad ſtabiliendum, quod haec differentia conſtans atque perpetua ſit, pluribus opus eſſe videtur experimentis in poſterum inſtituendis. In omnibus tamen Thermometris Mercurio reuiuificato a me impletis ad vitrum Thermometri adhaeſionem obſeruaui quandam, ita vt quaſi vnguinoſus videretur. Vix tamen a vero aberrare exiſtimandus erit, qui contendat, generatim et vniuerſe congelationem Mercurii eo fieri faciliorem, quo Mercurius impurior, adeoque e contrario difficiliorem, quo purior fuerit. Hae ſunt

 potio-

potiores differentiae phaenomenorum, quas mihi in captis cum Thermometris experimentis obſeruare licuit. Sed inſtituimus quoque alia, vbi vt Thermometra adhiberem, ſcopus non permittebat. In congelationibus liquorum aquoſorum ſuperficiem fieri conuexam vulgari experientia cui non conſtat? quod tamen ſecus eſt in liquoribus oleoſis, qui, ſi ex ſtatu fluiditatis in ſtatum ſoliditatis frigore abeunt; ſuperficiem non conuexam ſed paullo concauam habent, vt et ſebum, cera et alia monſtrant, et quod experientia vulgaris et artificialis ſatis docuit, ſulphure excepto. A priori per rationes ſatis certum iam eſſe poterat, Mercurium ſuperficiem concauam eſſe in congelatione induturum propter condenſationem tam inſignem, quam patitur, vti metalla reliqua fuſa, ſi ferrum, bismuthum et antimonium exceperis, quando rurſus ex ſtatu fluiditatis in ſtatum firmitatis certo frigoris gradu tranſeunt, ſuperficiem concauam induere ſolent, et propter maiorem contractionem et condenſationem debent. Cepi tubum communicantem primum, cuius diameter duarum linearum erat, in quem Mercurium infudi, vt altitudo duarum linearum eſſet, quem quum immerſiſſem in mixturam niuis et ſpiritus nitri; obſeruaui in vna Mercurii extremitate Mercurium plane fuiſſe congelatum, et ſuperficiem fuiſſe concauam, quum in altera extremitate Mercurius tantum ita gelatus eſſet, vt media pars adhuc fluida eſſet.

Eſſe-

Effeci, vt efflueret pars liquida inclinatione tubi, quo facto Mercurius congelatus in hac parte tubulum repraeſentabat intus cauum, et aſperum, effluxu autem Mercurii altera extremitas nihil patiebatur, quoniam plane ſolida erat. Eadem euenta obſeruauimus ſaepe aliis inſtrumentis, tubis ſimplicibus et globis vitreis Mercurio ſemiplenis.

Phaenomena hactenus recenſita nunc adhuc adcuratius conſideranda erunt, et quantum fieri poteſt explicanda, atque quae inde ſequantur, expendendum Primum ſatis manifeſtum eſt, ſolum calorem eſſe cauſſam fluiditatis Mercurii, vti aquae aliorumque fluidorum. Quod ſi igitur corpus mundi exiſtat, vbi tantus frigoris gradus regnat, qui Mercurium ſolidum facit, dubium eſſe non poteſt, quin Mercurius aeque firmum corpus, ac metalla reliqua in tellure noſtra, adparere debeat. Deinde patet Mercurium vere et proprie congelaſcere, et in glaciem propriam abire, quamuis glacies mercurialis a glacie aquae, liquorumque aqueorum quodammodo differat. Idea congelationis certe nihil aliud inuoluit, et inuoluere poteſt, quam tranſitum fluidorum ex ſtatu fluiditatis in ſtatum firmitatis ſiue ſoliditatis ſolo frigore effectum, quod ex omnibus caſibus ſpecialibus et exemplis manifeſtum eſt, vnde idea glaciei eſt abſtracta. Aquae et liquores aquei an aliam ob rationem congelata et

glacies dicuntur, quam quod frigore ſolida, firma et dura corpora facta ſunt? Recte igitur omnibus fluidis, cuiuscunque ſint generis, ob eandem rationem conglaciatio vera et propria tribuenda erit, ſi frigore fiant firma atque dura, cui enim competit definitio, eidem definitum quoque erit tribuendum. Sed prouti fluida ipſa ſunt diuerſa, diuerſa quoque eorum glacies fieri ſolet et debet, hinc oleoſa corpora frigore indurata, diuerſam glaciem a glacie aquarum repraeſentant, quae quoque diuerſa phaenomena exhibere ſolet; vti glacies diuerſae diuerſorum ſpirituum, diuerſarum ſolutionum ſalinarum et aliarum teſtari quoque poſſunt. Sed videtur eſſe attributum proprium glaciei, natare in fluido, ex quo nata eſt, item fragilem eſſe, non ductilem. Si de aquarum glacie intelligatur prius, concedi in tantum poteſt, in quantum nulla glacies ex aqua nata vel naturaliter, vel arte producta, ad hoc vsque tempus reperta, quae non aquis ſuis ſupernatauerit, ſed ad eſſentiam glaciei non ſpectat; poteſt natare et non natare, eſt et manet glacies, neque deſperandum puto fore, vt ipſa glacies aquae non ſupernatans reperiatur arte maiore, quam adhuc, adhibita. Neque igitur glaciei aquarum attributum, ſed modus eſt, et accidens natare in aquis ſuis. Idem valere quoque debet de fragilitate, quae quidem proprietas glaciei aquarum, ſed modus et extraeſſentiale reſpectu glaciei generatim tantum

tantum eſſe poteſt. Eſſe igitur glacies poteſt, ſiue ductilis ſit, vt in Mercurio, ſiue non, vt in aliis fluidis. Omnia metalla qua ſolida glaciem conſtituunt, item cera, ſebum, vitrum et alia, generatim omnia corpora ſolida et dura, quae calore fluida fieri poſſunt, nihil ſunt, niſi ſpecies glaciei.

Quemadmodum igitur aqua recte glacies fuſa dicitur, quum reuera nil aliud ſit; ſic Mercurium viuum et fluidum eſſe glaciem Mercurii fuſam, recte dubitari non poteſt. Status igitur illius naturalis, firmitas, non fluiditas ſit oportet, quum actione ignis et calore haec efficiatur, vti in reliquis fluidis quorum haud dubie nullum eſt, quod ſua natura ſit fluidum. Funditur igitur Mercurius aeque, ac alia metalla, calore, vt fluat viuusque fiat, ſed hoc tantum cum diſcrimine, vt gradus admodum paruus caloris ad illius fuſionem requiratur. Conſtat metalla ſub certo et determinato caloris gradu fundi fluereque incipere, diuerſo tamen in diuerſis metallis, vt ſub gradu 420. ſtannum purum; 550. plumbum purum: 470. bismuthum purum ſcalae *Fahrenheitianae*, vel ſecundum noſtra obſeruata plumbum liquefit ſub gradu 320. ſupra o noſtrae ſcalae, qui conuenit cum gradu 596. ſcalae *Fahrenheitii*; ſtannum 170 = 416 *Fahrenh.* bismuthum 235 = 494 Zincum vero maiorem caloris gradum requirere, quam habet Mercurius

 bulli-

bulliens, experti ſumus. Quod ſi igitur exacte conſtaret, ſub quo gradu Mercurius gelaſceret, adeoque ſolidus fieri inciperet; ſciri quoque poſſet, ſub quo gradu rurſus fluidus, et quaſi ex morte rediuiuus fieret. Nam vti aqua ſub gradu 150. in glaciem abit, ſic rurſus regelaſcit ſub eodem fere gradu caloris, et metalla rurſus ſolida fieri incipiunt, ſub gradu caloris fere eodem, quo fundi incipiunt. At enim vero ex ſuperioribus patet latitudinem hic eſſe maiorem, quam vt grádus talis determinari poſſit, non maiorem tamen calorem, quam 465. graduum ſecundum ſcalam noſtram, requiri, dubio carere videtur, quum nunquam ſub hoc gradu veſtigium congelationis Mercurii mihi quidem detegi potuerit. Inde porro fluit condenſationem, ſiue contractionem, adeoque diminutionem voluminis Mercurii, eſſe quidem ingentem, id quod ex profundo Mercurii deſcenſu in Thermometro in congelatione illius ſatis ſuperque intelligitur, quanta tamen ſit haec voluminis Mercurii diminutio, exacte determinari nequit, ob latitudinem dictam, et hinc quoque grauitas, ſeu pondus eius ſpecificum, adcurate determinari non poteſt.

Quum quo maior voluminis Mercurii diminutio fit, eo maius pondus eius ſpecificum fiat oporteat: patet, propius Mercurii pondus ſpecificum in eius congelatione adpropinquare debere ad aurum, quum iam in ſtatu fluiditatis omnium metello-

tellorum proxime ad illud accedat, ſi a Platina, ſemimetallo, abhinc paucis annis in America invento diſceſſeris, cuius pondus ſpecificum ad aquam eſſe dicitur vt 182 : 10 = $18\frac{1}{5}$: 1. Quodſi numerus medius pro puncto congelationis Mercurii ſumatur 650, erit voluminis diminutio facta $\frac{1}{15} + \frac{5}{13}$. ſui parte, adeoque pondus eius ſpecificum auctum quoque $\frac{1}{15} + \frac{5}{13}$ ſui parte erit, ſcilicet ab ea extenſione ſeu volumine, quod habet in calore aquae bullientis; ſed a volumine temperici aquae in glaciem abeuntis $\frac{1}{20}$. Concipitur et ſupponitur nimirum in Thermometro tota maſſa Mercurii diuiſa in 10000, hinc gradus Thermometri ſunt partes decies milleſimae contractionis et condenſationis Mercurii, ita vt e. g. gradus 200. indicet condenſationem eſſe factam $\frac{1}{50}$. Nam $\frac{200}{10000} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ (*).

Merito hic quaeritur, vnde tanta ſit latitudo, quae illius ratio? forſitan non vna eſt, ſed plures concurrunt. Nam primum ex ſuperioribus manifeſtum eſt, Mercurium non ſemper integrum fuiſſe congelatum, ſed partem maiorem, minoremue fluidam perſtitiſſe. Maior igitur condenſatio et voluminis Mercurii diminutio facta ſit neceſſe eſt in congelatione plena, quam in partiali, Mercurius igitur in partiali congelatione tam profunde deſcendere non potuit quam in totali. Deinde in totali quo-

(*) Vid. Memoires de M. De L'Isle pag. 267. et ſeqq.

quoque congelatione differentia cogitari et concipi poteſt, et debet. Metalla pleraque, vti calore eo magis extenduntur, quo calor maior eſt, donec in ſtatu fluiditatis ſummam nanciſcantur extenſionem, ita quoque, quo maius eſt frigus, cui metalla ſunt expoſita, eo magis quoque contrahuntur et condenſantur. Iam vero in mixtura niuis et ſpiritus nitri modo maius, modo minus frigus eſſe poteſt, et reuera eſſe ſolet. Fac igitur frigus eſſe multo maius, quam ad congelationem etiam totalem requiritur, eiusmodi frigus Mercurium non ſolum gelabit, ſed exceſſu ſuo quoque gelatum Mercurium magis condenſabit, adeoque volumen minuet. Haec tamen differentia adeo notabilis in Thermometro eſſe non poteſt.

Multo autem notabilior differentia fieri debet, ſi contingat, vt pars ſuperior primum incipiat congelari, ita vt ſimul tubum capillarem Thermometri obſtruat. Contigit mihi bis, quum Thermometrum prius niue ſepeliuerim, et deinde in niuem ſuper bulbum Thermometri ſpiritum acidum infuderim, contigit mihi inquam, vt pars ſuperior plane eſſet gelata, inferiore maiorem partem fluida exiſtente. In hoc caſu, igitur Mercurius profundius, et minus profunde deſcendat neceſſe eſt, prouti congelatio in tubo capillari citius, tardius contingit. Ergo pro diuerſa ratione congelaſcendi, et diuerſo frigore non poteſt non ſemper differentia

quae-

quaedam in deſcenſu Mercurii naſci, quae exactiſſimam puncti congelationis determinationem impedit. Diximus dubio procul interdum oriri in mixtura frigorifica maius frigus, quam ad congelationem Mercurii neceſſarium ſit. Hoc quidem a poſteriori per experientiam oſtendi nondum poteſt, quoniam Thermometra ſolida, quae hic adhiberi poſſint, adhuc in deſideratis numerantur; probabiliſſime tamen ex phaenomenis concludi poſſe, vel ex celeritate deſcenſus maiore et minore videtur.

Mercurius ſolidus congelatus, vti per ſe patet, non poteſt non deſinere eſſe menſura caloris in Thermometris, quia deſinit ſe debite contrahere et dilatare, quum gradus caloris et frigoris nihil aliud ſint, niſi gradus dilatationis et contractionis Mercurii et aliorum fluidorum, inter quae praecipue ſpiritus vini eminet. Requiritur, vt haec contractio, et dilatatio Mercurii, aliorumque fluidorum fiat proportionaliter, quod ſemper in conficiendis ſcalis Thermometrorum ſupponitur, alias in partes aequales diuidi non poſſent; vtrum vero in tam inſigni frigore contractio et dilatatio fiat adhuc regulariter, proportionaliter, non ſine ratione dubitari poſſe exiſtimo, certe ſpiritus vini contractionem et dilatationem, cum contractionibus et dilatationibus Mercurii in gradibus maioribus plane non conuenire expertus ſum. Tria Thermometra, ſpiritu vini rectificatiſſimo repleta, cum Mercurialibus

 Ther-

Thermometris alias ſatis exacte concordantibus ſumſi, et in materiam noſtram frigorificam immerſi ſimul cum Thermometro Mercurio ſemipleno; quo facto obſeruaui, Mercurium fuiſſe congelatum, quum contra ſpiritus vini rectificatiſſimus vix ad 300. deſcendiſſet.

Videtur igitur deſcenſus Mercurii, inprimis quando cum impetu fieri coepit, nullam amplius proportionem in contractione ſua ſeruare; hoc ſaltem certum eſt ex obſeruatis, harmoniam et concordantiam Thermometrorum Mercurialium in profundioribus frigoris gradibus plane deſinere cum Thermometris ſpiritu vini repletis. Ex obſeruatis his allatis porro perſpicitur, frigus ad gelandum Mercurium ſufficiens, non continuo eſſe ſufficiens ad congelandum ſpiritum vini rectificatiſſimum, quum tamen Mercurius omnium fluidorum maximum frigus ad congelationem requirere videri poſſit. Inde concludi amplius poteſt, Thermometra ſpiritu vini rectificatiſſimo repleta, inſeruire poſſe indicationi diuerſi frigoris maioris et minoris in maſſa frigorifica, quamuis menſuram frigoris non determinent; poſſunt igitur loco Thermometrorum ſolidorum interim eſſe, et adhiberi, donec idonea ſolida et ad hunc ſcopum apta habeamus.

Phaenomenum ſupra indicatum de continuato deſcenſu Mercurii in Thermometris in aëre libero, para-

paradoxum omnino videtur, quum frigus in aëre libero regnans ſemper multis gradibus a frigore materiae noſtrae frigorificae ſuperetur. Ratio non alia videtur, quam duratio ſolutionis niuis, quae Thermometro adhaeret. Nam quum frigus a materia frigorifica non producatur, niſi in quantum ſolutio et mixtio materiarum contingit: ſane eiusmodi frigus inſigne, quod Mercurium adhuc in aëre libero deprimit, aliunde eſſe poſſe non videtur, quam a continuata ſolutione niuis a ſpiritu nitri, Thermometro adhaerentis. Magis adhuc paradoxum videtur phaenomenum, quod interdum Mercurius prius adſcendat, et deinde demum deſcendere incipiat, vsque dum Mercurius fiat congelatus, quin non ſemel quoque expertus ſum in noua infuſione et inſtillatione ſpiritus Mercurium rurſus adſcendere coepiſſe, quamuis iam prope ad punctum congelationis antea deſcendiſſet. Cur hoc fiat, quaeritur: accidiſſe vt plurimum hoc mihi viſum eſt, quoties paullo maiorem quantitatem ſpiritus infudi, ita vt Thermometri bulbum immediate attingeret. Aqua adhaerens bulbo Thermometri in cauſſa primum eſſe videtur, quoniam conſtat ſpiritum nitri aquam calefacere, et niuem frigefacere Quod ſi igitur ſecunda infuſio in eandem materiam frigorificam fit, a niue fuſa; maſſa aquoſa iam eſt. Deinde quando immediate attingit ſpiritus nitri bulbum Thermometri iam inſigniter frigefactum, in ſecunda vel ter-

tia infuſione, Mercurium adſcendere debere facile conſpicitur, quum hic ſpiritus, qui de nouo infunditur, multo minus frigidus ſit, quam Mercurius in Thermometro iam frigefactus. Supra monuimus aquam fortem et ſpiritum nitri fumantem eſſe aptiora ad frigus producendum inſigne et tale, quo Mercurius congelatur, cui hic addimus nos ſpiritum nitri fumantem, et aquam fortem eſſe omnium ſpirituum, quin omnium materiarum, frigus artificiale producere valentium, praeſtantiſſima deprehendiſſe. Multis experimentis aliorum ſpirituum acidorum vim explorauimus. Cepimus primum oleum vitrioli, quod ſatis conſtat eſſe omnium acidorum fortiſſimum. Quum aqua fortis aliam ob rationem ſpiritui nitri ſimplici non videatur praeferenda in producendo frigore artificiali, quam quod ſit fortior; videtur oleum vitrioli omnium acidorum fortiſſimum et praeſtantiſſimum in producendo frigore artificiali, ad Mercurium gelandum effectum edere debere quoque fortiſſimum. Sed euentus ſpei non reſpondit, nunquam enim oleo vitrioli congelationem Mercurii producere potui, et ſemper maſſam frigorificam cum oleo vitrioli factam, minus produxiſſe frigus expertus ſum, quam maſſa frigorifica ope aquae fortis facta effecit.

Obſeruatur quidem oleum vitrioli in niuem quam fortiſſime agere, dum momento niuem, quam attin-

attingit ita ſoluit, vt in nihilum redacta videatur, ſed haec ipſa ſolutio, quaſi in inſtanti, videtur eſſe cauſſa, quare tam inſigne frigus non producatur, quam ope aquae fortis, vbi lentior videtur ſolutio, dum communicatio frigoris cum vitro Thermometri, et ipſo Mercurio tam cito fieri non poteſt; frigoris enim gradus maximi diutius, quam ſolutio maxima, durare nequeunt. Hinc maſſa frigorifica diu quidem maiorem frigoris gradum, quam in aëre regnantem retinere poteſt et ſolet, ſed ſummum frigus mox perire ſolet. Praeter oleum vitrioli alios ſpiritus acidos, et non acidos exploraui, vt effectum cognoſcerem, quem in producendo frigore praeſtarent. Nominatim adhibui ſpiritum ſalis marini, ſpiritum ſalis ammoniaci, ſpiritum vitrioli dulcem, *Hoffmanni* liquorem anodynum, liquorem *Beſtuſchewi*, vel *de la Motte* dictum, ſpiritum aceti, ſpiritum ſulphuris, ſpiritum vini rectificatiſſimum, ſpiritum cornu cerui. His liquoribus omnibus vim ineſſe producendi frigus niui admiſtis mirum omnino videri poteſt et debet, reuera tamen in iis eiusmodi vim maiorem et minorem ineſſe, experimenta indubia docuere, quae ad hunc ſcopum a me ſunt capta.

Quoniam ſcopus hic erat tantum diuerſam vim horum fluidorum explorare, quam habeant in producendo frigore; mediocris frigoris gradus in aëre ad hunc finem ſufficiebat. Thermometrum

monſtrabat 159, et variabatur durantibus experimentis 4. gradibus, dum in fine experimentorum oſtendebat in aëre libero 155. Summa experimentorum huc redit: Spiritus ſalis marini, niui adfuſus, auxit frigus naturale 30 gradibus. Spiritus ſalis ammoniaci 10 gradus frigoris produxit. Oleum vitrioli 35; Spiritus nitri fumans 58, Aqua fortis 40, Spiritus nitri ſimplex 30. Spiritus aceti, vti quoque ſuccus citri non notabilem differentiam. Spiritus vitrioli dulcis 20, Liquor anodynus *Hoffmanni* 32, Liquor *Beſtuſcheuii* dictus etiam 32, Spiritus cornu cerui 10, Spiritus ſulphuris 10, Spiritus vini rectificatiſſimus 20, camphoratus 15, Spiritus vini Gallicus 12. Quin etiam vina producere ſolebant frigus, 6. 7. 8. graduum et plurium. Spiritus inflammabiles producere frigus poſſe, et ſolere mirum omnino videri poteſt, quum ſpiritus vini rectificatiſſimus ipſe ignis liquidus videatur. At enim vero mirari deſinemus, ſi in animum reuocauerimus, cauſſam frigoris artificialis a nobis ſupra allatam, ſcilicet ſolutionem niuis a menſtruo, eiusque mixtionem. Quum igitur ſpiritus vini, et ipſa vina niuem ſoluere poſſint, et cum ea miſceri; mirandum amplius non eſt, nouum frigus ea producere valere.

Ergo quidquid ſpirituum niuem ſoluere eique miſceri poteſt, ita vt tertium fluidum conſtituat, illud

illud quoque nouum frigus producere valere, erit cenſendum. Eſt autem mixtio aeque eſſentialis, ac ſolutio. Nam ſunt fluida ſulphurea alia, vt olea eſſentialia, quae quidem niuem ſoluere, ſed ſolutae miſceri non poſſunt, et hinc quoque nullum effectum in producendo frigore praeſtare queunt. Inſtituimus ea fini experimenta cum oleo menthae, ſerpilli, terebinthinae, ſuccini quoque et aliis; obſeruauimus quidem aliquam niuis ſolutionem, ſed nihil plane frigoris, quod non aliam ob cauſſam contigit, et contingere potuit, quam quod haec olea niui ſolutae miſceri, adeoque tertium quoddam fluidum conſtituere non potuerint. Quod ſi paradoxum videtur, quod haec fluida, inprimis inflammabilia, et ſpiritus fermentati producere poſſint ac ſoleant frigus; multo magis paradoxum videri poteſt et debet, quod pleraque horum fluidorum aquae infuſa, non frigus, vt in niue, ſed calorem efficiant, adeoque contrarios et oppoſitos effectus in eadem materia producant: quid enim aqua aliud, quam nix liquefacta et fuſa eſt? Sic vna eademque cauſſa effectus oppoſitos producit, pro diuerſa eiusdem obiecti receptiuitate, vti loqui conſueuere. Receptiuitas autem diuerſa vnius eiusdemque obiecti et materiae, non niſi a diuerſa eius textura pendere poteſt, vti hic a diuerſa niuis et aquae textura, ita vt in productione frigoris ſolutio, contra in productione caloris efferueſcentia quaedam locum habere

habere poſſit. Ac ne forſitan ſuſpicio oriri poſſit, in niue adhuc aliud latere poſſe, praeter aquam ſimplicem, cum ipſa niue liquefacta experimenta inſtitui. De ſpiritu nitri, adeoque aqua forti et ſpiritu nitri fumante iam conſtat, quod niuem frigefaciant, eiusque aquam calefaciant, et de paucis aliis; ſed vtrum quoque in aliis fluidis pluribus mihi exploratis haec contraria phaenomena ſint obſeruata atque deſcripta, mihi quidem cognitum non eſt. Obſeruata mea hic tantum ſummatim indicabo, quia huius loci proprie non ſunt, ſpecialiora et alia huius generis obſeruata alii tempori reſeruamus. Poſtquam aqua, et ſpiritus ad eandem temperiem cum Thermometro erant redacta, ſcilicet ad 128 gradus in muſeo meo, obſeruaui 1) Oleum vitrioli aquae inſtillatum produxiſſe calorem 35 graduum, 2) Spiritum ſalis marini 10, 3) Spiritum Vitrioli dulcem 15, 4) Liquorem anodynum *Hoffmanni* 10 5) Eundem gradum produxit Liquor *Beſtuſcheuianus* ſcilicet vltra temperiem 128, 6) Spiritus vini rectificatiſſimus 10°. Contra ea in ſpiritu ſalis ammoniaci, in ſpiritu ſulphuris, in ſpiritu cornu cerui nihil mutationis temperiei aquae infuſis obſeruare potui, nihil producti caloris, quae omnia hic generatim indicaſſe ſufficiat. Olea etiam ſubtiliſſima aquae infuſa, et hic quoque nullum effectum caloris, vti in niue nullum effectum frigoris producere poſſe, per eandem rationem ſupra datam, quod ſcilicet nulla

miſtio,

miſtio, neque cum niue, neque cum aqua locum habeat, facile intelligi, praeuideri et praedici poterat. Nihilo minus de oleo ſuccini, terebinthinae, menthae et ſerpilli tentamina fecimus, vt et per experientiam res ab omni dubio liberaretur: Obiter notamus, perhiberi quidem olea eſſentialia, ſpiritui vini rectificatiſſimo mixta, frigus aliquot graduum producere, ſed nihil tale obſeruare potuimus, quamvis diutius quam horam dimidiam expectauerimus effectum, moram enim dimidiae horae requirunt, vti Diſſertatione peculiari mihi demonſtratum eſt, vitium hoc eſſe ſubreptionis.

Ergo ex dictis ſatis patet, quod diximus, quamuis multa ſint fluida frigus artificiale producere valentia, omnium tamen praeſtantiſſimum eſſe ſpiritum nitri cum ſuis ſpeciebus, eoque ſufficientiſſimum ad Mercurium ſolidum fixumque reddendum, ita vt quilibet Methodo mea ſimplici adhibita, ſufficienti frigoris naturalis gradu, minimum 175 exiſtente, experimenta mea ad congelationem Mercurii producendam, facile imitari poſſit, vti quoque, communicata mea methodo, optimo ſucceſſu iam hic Petroburgi ſunt iterata a diuerſis, inter quos *V. C. Lomonoſouium* Conſiliarium, *Zeiherum*, *Aepinum*, *Modelium* nominaſſe ſufficiat. Proportionem niuis et acidi nitri nullam determinatam adhibui, modo inſtillatis paucis tantum guttis in niuem experimentum ſucceſſit, modo maiorem portionem

tionem infudi. Niuem glaciei contuſae eſſe praeferendam, vel ex eo concludi poſſe videtur, quod nix ob texturam ſuam raram ad ſolutionem aptior deprehendatur adcommodatiorque. Deinde effuſio ſpiritus a *Fahrenheitio* et aliis eum imitatis adhibita plus obeſſe, quam prodeſſe videtur. Quod ſi obſeruata et obſeruanda diuerſorum in poſterum conferentur, dubium eſſe non poteſt, quin egregia incrementa haec de Mercurio frigore fixando doctrina ſit captura, aliisque inuentis anſam ſuppeditatura. Porro ex dictis ſatis quoque patet, Mercurium non tam loco numeroque Semi-Metallorum, ſed perfectorum eſſe habendum, quod vero minimo omnium Metallorum gradu caloris fluat. Nam fuſa Metalla cum Mercurio viuo ſeu fuſo conueniunt quoque, quod partes eorum mutuo ſe trahant, in globulos ſe colligant, item ex ſtatu fluiditatis, non in inſtanti, ſed ſucceſſiue in ſtatum ſoliditatis tranſeant, et vice verſa. Quaeri poteſt, an non hoc Metallum, quod omnes aliorum proprietates habet in ſtatu ſoliditatis et fluiditatis, hoc ſibi tamen proprium habeat, quod ad ebullitionem certo caloris gradu redigi poſſit, quod neutiquam vero in reliquis metallis obſeruare licet. Sed eſſe et alia metalla bullitionis ſub certa conditione capacia, quin ipſius quoque volatilitatis, iam ab aliis oſtenſum eſt, quod in praeſenti disquirere pluribus non licet. Gradum autem caloris, ſub quo Mercurius ebullire incipiat, non.

non eſſe 600 ſcalae *Fahrenheitianae*, vti vulgo traditur, ſed minimum 709 eiusdem ſcalae, ſiue 414 noſtrae ſupra 0 calorem aquae bullientis, (nam et hic punctum ebullitionis tam adcurate determinari nequit, vti punctum congelationis Mercurii ob phaenomenorum differentiam), multis experimentis iam alias oſtendi, et probatum dedi; Error igitur maior, quam centum graduum committitur, ſi punctum ebullitionis ponatur 600, ſcalae *Fahrenheitianae*, qui numerus cum $323\frac{1}{3}$ noſtrae ſcalae conuenit ſupra punctum ebullitionis aquae. Habent ceterum phaenomena ebullitionis et congelationis Mercurii hoc commune, vt quando ebullire incipit, cum impetu adſcendere, vti cum impetu deſcendere incipiat, quando congelaſcere incipit. Porro motum vibratorium ſaepius ante deſcenſum illum celerem in congelatione Mercurii obſeruaui, qui etiam contingere ſolet paullo ante initium ebullitionis illius. Quod ſi igitur ponere lubeat terminum congelationis Mercurii 650. tanquam medium quendam ſecundum obſeruata noſtra, et terminum ebullitionis 414 ſupra 0: conſpicitur a ſumma contractione ad ſummam dilatationem eſſe diſtantiam 1064 graduum ſcalae noſtrae, et *Fahrenheitianae* 1237, ſi ſcilicet ponatur, vti ponendum eſt, numerum 212 ſcalae *Fahrenheitianae* eſſe aequalem ciphrae ebullitionis aquae notae, et $32 = 150$. ſcalae noſtrae. Hinc quanta ponderis ſpecifici mutatio a termino ebulli-

Pp 2 tionis

tionis ad terminum congelationis Mercurii fiat, nemo non intelligere facile poteſt. Diminuitur ſcilicet volumen, quod Mercurius ad initium ebullitionis habet, plus quam decima ſui parte. Nam ſi ſupponatur vt ſupra, totum volumen, quod Mercurius in ſumma ſua extenſione habet, eſſe 10000, erit diminutio $= \frac{1064}{10000} = \frac{1}{9} + \frac{53}{133}$; Siue ſi extenſio ſumma ab initio ebullitionis Mercurii ad illius congelationem ponatur rotunde tantum 1000, adcurate diminutio voluminis a ſumma extenſione ad ſummam contractionem erit $\frac{1}{10}$. Ergo quoque grauitas ſpecifica a ſumma dilatatione decima ſui parte augeatur oportet ad ſummam condenſationem et contractionem, quae in illius congelatione contingit.

Quaeri adhuc poteſt, cur mixtura niuis et acidi nitri in maſſam ſolidam non abeat, glaciemque formet, ſed mollioris conſiſtentiae maneat, quamuis multo maiorem frigoris gradum poſſideat, quam ad congelationem aquae fortis requiratur? Aquam fortem, vt ſupra iam monuimus, frigoris gradus 204, ſiue 34. *Fahrenheitianae* ſcalae infra 0. gelauit. Maſſa noſtra frigorifica ſaepius 250 et vltra, gradus tenuit, et mollis inſtar pultis permanſit. Cauſſa huius Phaenomeni paradoxi non alia eſſe videtur, quam continuatio ſolutionis niuis et mixtionis quaedam. Nam quum frigoris productio a ſolutione et mixtione vnice pendeat; fieri non poteſt, vt maſſa haec, quae fluidum tertii generis conſtituit,

tuit, in glaciem perfectam abeat, dum eam ſolutio et mixtio perſeuerans non poteſt non impedire, quae in puncto maximi frigoris perfectiſſima ſit oportet.

Poſſunt adhuc aliae quaeſtiones, tam de natura Metallorum, quam frigoris artificialis indole inſtitui, et quae partim ex ſuperioribus ſolui poſſunt, quas autem in praeſenti lubens praetereo.

Haec habui in praeſenti de hoc meo inuento nouo dicere; quae deſiderari hic adhuc poſſunt, ſupplere et ipſi ſtudebimus, nec alii, quod ſperamus, deerunt, qui vna ſtudebunt.

DISSERTATIO

CONTINENS PARTIM ADDITAMENTA NOVA ET SVPPLEMENTA AD DISSERTATIONEM DE CONGELATIONE MERCVRII SIVE HYDRARGYRI, PARTIM IN ALIA CORPORA FRIGORIS ARTIFICIALIS INSIGNIORIS NOVOS EFFECTVS.

Auctore

I. A. BRAVNIO.

Ex quo tempore de congelatione Mercurii ſiue hydrargyri a me detecta diſſertationem euulgaui, nullam praeterire hyemen paſſus ſum, quin experimenta huc ſpectantia inſtituerem ad ſupplenda et perficienda, quae in diſſertatione noſtra dicta deſiderauimus.

Exiſtimauimus quidem tunc temporis eruditos in aliis regionibus quoque ad haec deſiderata ſupplenda ſuum eſſe collaturos; ſed ſpes nos feſellit, neque nunc ſperamus vmquam facile hoc fore. Nam requiritur omnino inſignis quidam frigoris gradus naturalis in aëre ad congelandum Mercurium, tanquam conditio ſine qua non, qui in regionibus minus borealibus eoque calidioribus raro, aut plane non exiſtere ſolet. Gradus frigoris minimus naturalis,

ralis, ſub quo hydrargyrum in forma ſolida, arte coëgi adparere, vti reliqua metalla adparere ſolent, fuit 175. ſcalae a nobis adhibitae Delilianae, neque hoc frigoris gradu Mercurium vnquam ad perfectam congelationem perducere potuimus, ſed tantum ad parietes vitri lamellas adhaerentes vidimus. Vbi igitur maiores eo frigoris naturalis gradus exiſtere non ſolent, ibi vix ac ne vix quidem voluptate vnquam fruentur alii Mercurium, vti reliqua metalla in forma firma et ſolida perfecte videndi, ſed ſpectabunt tantum eum, vt metallum fuſum in forma fluidi corporis. Hinc ſequitur innanem operam impendi, ſi quis animum inducat, arte rem eo perducere, vt aeſtate quoque Mercurius congeletur, et formam ſolidi corporis induat. Quum igitur eo felicius capiantur huius generis experimenta, quo regio frigidior eſſe ſolet: dubitari nequit, quin in Sibiria, vbi inſigniores frigoris gradus regnare ſolent, ſucceſſu egregio gauiſura ſint huius generis experimenta, modo ſatis periti ibi adeſſent, qui ea inſtituere debite poſſent. Interim deſperare plane non debemus; forſitan cum tempore, naſcetur quoque occaſio.

Habent igitur regiones borealiores, altiores eoque frigidiores prae reliquis hanc praerogatiuam, vt multa experimenta, et multae obſeruationes inſtitui eoque multa noua detegi queant, quae in aliis minus borealibus et minus altis locis obſeruari

non

non poſſunt, quo inter alia pertinent frequentes aurorae boreales, frequentes halones ſolis et lunae, Parelii, Paraſelenae, et alia. Quae nos praeterea noua circa congelationem Mercurii a tempore primae detectionis a nobis factae reperimus et deteximus hic Petroburgi, nouis multis experimentis captis, nunc indicare breuiter animum induximus. Interim praemoneamus neceſſe eſt, labores noſtros multos et moleſtiſſimos ſpei et votis noſtris minus ſatisfeciſſe, quam exiſtimauimus, vti ex ſequentibus patebit.

Certum frigoris gradum in aëre requiri naturalem, ſi congelatio Mercurii bene ſuccedere debet, generatim iam antea monui. Scilicet multis ad hunc finem nouis inſtitutis experimentis reperi gradum 175 ſcalae Delilianae eſſe minimum, ſub quo aliqua Mercurii congelatio produci arte poſſit. Sed ſimul quoque cognoui, congelationem Mercurii ſub hoc frigoris gradu ſaepius vix ac ne vix quidem ſuccedere, et ſi ſuccedit, eam admodum eſſe imperfectam. Nam tantum circa parietes bulbi Thermometri tenues laminae adparere ſolent, ita vt reliqua Mercurii pars plane fluida permaneat. Hoc experimentorum genus optime inſtituitur vitris Thermometricis ex parte tantum Mercurio repletis, ita quam diſtinctiſſime laminae ad parietes adhaerentes conſpici poſſunt.

Quam-

Quamuis igitur partialis quaedam congelatio ſub dicto frigoris gradu obtineri queat; nunquam tamen ſecundum experimenta mea, totalis Mercurii congelatio obtinebitur. Nam haec maiorem frigoris gradum in aëre regnantem poſtulat, gradum ſcilicet ad minimum 185, melius 190, 195, 200 etc. Semper ceteris paribus, ſucceſſus eſt eo melior, quo gradus frigoris naturalis eſt maior, quod experimentis innumeris compertum habeo, et confirmatum.

Ad ſucceſſum optimum et ſpiritus nitri optimae notae requiritur, ſcilicet vel ſpiritus nitri fumans *Glauberi*, vel aqua fortis optima. Differentiam ſaepe vix inter ſpiritum nitri *Glauberianum* et aquam fortem optimae notae deprehendere potui. Quia tamen aqua fortis optimae notae non ſemper haberi poteſt; ſpiritus nitri fumans *Glauberi* praerogatiuam mereri omnino videtur.

Ceterum, quamuis multis captis experimentis, oleo vitrioli, et ſpiritu ſalis nunquam congelationem producere potuerim, (vti iam in diſſertatione mea priori monui, et hic nouis experimentis factis confirmare poſſum): tamen mihi ſemel contigit, vt frigoris naturalis gradu inſigniori in aëre exiſtente ſcilicet 200; Mercurius licet imperfecte et ex parte, maſſa frigorifica ex ſpiritu vini rectificatiſſimo et niue adhibita recenti, congelaretur. Nix

recens lapſa praeferenda omnino eſt niui veteri, quemadmodum ſpiritus recens prae veteri omnino praerogatiuam habet. Nam ſi ſpiritus vetuſtior eſt, e, gr. ante annum vel dimidium anni confectus, multo difficilius effectus obtineri ſolet, quae omnia multis experimentis factis ſunt confirmata. Si ſpiritus nitri *Glauberi* eſt recens, niuem colore viridi, ſi vetuſtus, coeruleo colore tingere ſolet. De oleo vitrioli ſequens phaenomenum eſt adhuc notandum paradoxum, quod portione glaciei in illud iniecta fiat calidius, vti iam *Hoffmannus* adnotauit in obſeruationibus Phyſico-Chemicis ſelectioribus pag. 136, quum tamen ſi ſuperfundatur glaciei eam ſoluat atque frigus perducat. Scilicet portio non magna glaciei ſtatim ſoluitur et in aquam mutatur, quae oleo vitrioli miſta calorem producere ſolet. Male hinc nonnulli concluſere, oleum vitrioli omnia corpora et ipſam glaciem calefacere, et hinc menſuram caloris in corporis omnibus contenti praebere poſſe. Sic Thumigius Philoſophiae experimentalis pag. 293. ipſa glacies, inquit, oleo vitrioli adfuſo calorem gignit. Ceterum ſunt haec phaenomena theoriae, quam in priore diſſertatione dedi, omnino conſentanea. Nam cum frigus oriatur ex ſolutione; dubitari non poteſt, quin ſolutio eo melius ſuccedat, quo niues ſunt recentiores, atque ſpiritus; quum niues recentes et puriores ſint et rariores, ſpiritus autem recentes maiorem poſſideant vim ſoluendi, quia euaporatio nulla, aut parua adhuc

adhuc facta eſt, aut aliqua corruptio. Frigus artificiale per miſtionem ſalium cum niue ſoli quoque ſolutioni eſſe tribuendum per ſe intelligitur. Quod ad Mercurii indolem attinet, etiam puriſſimus congelari ſolet, quod etiam in diſſertatione iam monui, et multis experimentis captis nunc confirmo. Adhibui enim Mercurium non ſolum reuiuificatum ex ſublimato, ſed etiam ex cinnabari deſtillatum. Ex omnibus autem captis experimentis mihi innotuit, differentiam illam eſſe perpetuam, qua Mercurius puriſſimus paullo difficilius congeletur, quam ordinarius. Quamuis hanc differentiam etiam iam in mea priore diſſertatione indicauerim; tamen tunc temporis nondum certus eram, vtrum haec differentia eſſet perpetua, an non. Perpetuam autem eſſe, multis experimentis nunc eſt confirmatum. Forſitan propter maiorem denſitaten calor in Mercurio puriſſimo tam cito diminui nequit et amitti. Cogitarunt quidam Mercurium forſitam vel ob impuritatem, vel ob admixtam Mercurio aquam congelari, ſed hypotheſis, quam quidam ſumſerunt, eſt falſiſſima, omnem in corporibus fieri congelationem ob aquam contentam. Nam Mercurius quamdiu fluidus eſt, eſt pro fuſo metallo habendus, vti aqua pro glacie fuſa. Vti igitur reliqua metalla fuſa, neque ob impuritatem quandam, neque ob aquam iis admiſtam ſed ſola caloris diminutione rurſus firma fiunt; ſic quoque Mercurium frigore

 inſi-

inſigniori firmum fieri metallum, vti reliqua, omnino exiſtimandum eſt, et omnia metalla in ſtatu ſoliditatis vel firmitatis eſſe, ob eandem rationem ac Mercurium congelatum corpora que congelata alia, iam in diſſertatione priori demonſtraui, quod nemini dubium eſſe poteſt, qui ad genuinam congelationis notionem attendit. Aqua, glacies fuſa in glaciem abit, et fit corpus firmum frigore ſolo ſeu diminutione caloris, ſic omnia fluida, metalla fuſa et alia, vt vitrum fuſum etc. dum diminutione caloris firma fiunt, in ſpeciem quandam glaciei abire ſunt cenſenda.

De proportione niuem inter et ſpiritum, parum aut nihil omnino habeo quod addam. Nam aut ſpiritus niui ſuperfunditur, aut nix ſpiritui infuſo additur. In caſu priori proportio niuis et ſpiritus in cenſum plane non venit et venire poteſt. Infunditur enim niui ſpiritus, vbi vel Thermometrum niui immerſum eſt, vel, infuſione facta illi immergitur. Quod ſi vero ſpiritus prius infundatur, tanta niuis copia eſt addenda, vt eiusmodi maſſa frigorifica fiat inſtar pultis mollioris. Superflua hic eſſet adcuratior menſio et ponderatio miſcendorum, ſcilicet niuis et ſpiritus nitri.

Porro deſideratis adnumeraui praecipue quoque determinationem duorum terminorum, qui adhuc vagi et incerti erant, ſcilicet terminus, vbi Mercurius cum ſaltu et impetu moueri et deſcendere

dere incipit, et terminus, ad quem deſcendit, vel vbi deſcendere in congelatione deſinit. Ingens experimentorum numerus eſt, quae ad hunc ſcopum obtinendum, ſcilicet ad determinandos terminos dictos cepi, quae tamen ſpei et votis meis non omnino reſponderunt. Quod ad priorem terminum attinet, illum experimentis plurimis inſtitutis admodum vagum inueni, modo enim profundius regulariter deſcendit Mercurius, antequam impetus inciperet, modo minus profunde, porro modo, dum Thermometrum in materia frigorifica adhuc erat immerſum, modo in aëre libero, dum iam extractum erat, ſaltus praeceps coepit. Deſcendit Mercurius regulariter ad terminos, qui ſequuntur; ad 350. frigus naturale erat 177. ad 400 frigore naturali 193. ad 500 et 530. deſcenſus regularis obſeruabatur frigore naturali 193 exiſtente. Thermometrum in vltimo experimento erat cylindricum, et Mercurius reuiuificatus. Cera hiſpanica Thermometrum erat munitum in loco, vbi bulbus cylindricus tubo adhaerebat, ne congelatio Mercurii in eo loco, impediret deſcenſum plenum. Congelatio Mercurii erat perfecta et Mercurius ſolidus cylindrum perfectum repraeſentabat. Bulbus autem Cylindraceus fractus eſt, dum fiebat impetus, ita vt pars dimidia ex fracto cylindro promineret. Cylindrus Mercurii congelatus magis flexilis, quam plumbum et aurum purum, mihi viſus eſt. Poteſt

igitur Mercurius firmus iure pro molliſſimo omnium metallorum in ſtatu firmitatis conſtitutorum haberi; hinc clangor quoque, ſi modo clangor dicendus eſt, obtuſiſſimus eſſe ſolet. Digito quoque tetigi hunc cylindrulum, et vltra tria minuta ſecunda ſuſtinere frigus non potui; locus digiti vbi congelatum Mercurium tangebam, erat albus vt ſolet, ſi corporis humani pars gelatur, frictione vehementiore cum niue, more hic conſueto, digitum reſtitui. Deſcendit porro Mercurius regulariter aliquoties ad 550. frigus naturale erat 192; Mercurius etiam ex cinnaberi deſtillatus; vltra hunc terminum nunquam deſcendit regulariter ante impetum. Nonnunquam ad hunc terminum quoque regulariter deſcendit Mercurius ita, vt ibi ſtaret, impetu facto nullo, quod vero rarius contigit. De deſcenſu in aëre iam in diſſertatione priore expoſui et nulla alia omnino videtur ratio quam ſolutio continuata. Eſt hic impetus, vel praeceps ſaltus in congelatione, Mercurio plane proprius. In nullo alio fluido, quod frigore vel diminutione caloris firmum fit, ſimile phaenomenum, quod ſciam, obſeruari ſolet, certe ego non obſeruaui. Sed cur Mercurius ſolus dum ex ſtatu fluiditatis in ſtatum firmitatis tranſit eiusmodi phaenomenum motus praecipitis monſtret, tam facile dictu non videtur. Ratio tamen huius phaenomeni nulla alia mihi quidem videtur, niſi quod congelatio Mercurii fiat quaſi in inſtanti et mo-

momento, non ſucceſſiue, hinc non poteſt non Mercurii deſcenſus cum ſaltu praecipiti ſequi. Modus igitur congelaſcendi diuerſus in diuerſis fluidis eſt, dum in aliis quaſi in inſtanti, in aliis vero ſucceſſiue fieri ſolet. Quis enim ignorat congelationis modum eſſe alium in ſpiritibus et vinis, alium in oleis et aquis, alium in metallis etc. Eodem modo et regelatio in diuerſis congelatis eſt diuerſa, modo ſucceſſiua, tardior, celeriorue, modo quaſi in inſtanti. Certe Mercurius, ſi incipit regelari, vel rurſus fundi, momento et quaſi in inſtanti contingere hoc ſolet. Poteſt hoc oculis cerni et inde quoque colligi, quod Mercurius interdum celerrime rurſus aſcendat, licet iam, etiam poſt ſaltum, ad terminum fere vltimum deſcenderit.

Non minori difficultati obnoxia eſt determinatio termini alterius ſcilicet puncti congelationis Mercurii. Experimenta noua innumera ſunt, quae ad hunc ſcopum obtinendum cepi, ſed ſucceſſus ſpei et voto meo, non plane reſpondit. Nam fere omnia Thermometra, ſiue bulbus ſphaericus, ſiue cylindraceus, ſiue conicus fuerit, fracta ſunt, ita vt vel plane diſſiluerint, vel rimas egerint et fiſſuras, ſi ſcilicet Mercurius ex toto in bulbo contento congelatus erat. Vnde haec fractio pendeat, facile explicari non poteſt. Coniuncta haec fractio ſemper mihi obſeruata eſt cum impetu deſcendendi, ita vt videa-

videatur ſaltus hic praeceps et concuſſio bulbi, eſſe ratio cur bulbus Thermometri frangatur, et aliquid Mercurii non gelati ex bulbo vel plane fracto, vel ex fiſuris et rimis effluat, eoque terminum deſcenſus vltimum incertum reddat. At enim vero difficile eſt conceptu quomodo ex fiſuris et rimis bulborum, portio Mercurii effluere poſſit, cum congelatio a peripheria ad centrum tendat, eoque parietes bulborum primi congelentur. Videtur igitur neceſſe, vt, dum ex tubo Mercurius fluidus adhuc deſcendit, portio quaedam huius Mercurii inter Mercurium congelatum et parietes bulbi interfluat, et per fiſuras penetret, vel ſi parietes ex parte iam ablati ſunt, libere defluat. Forſitan ad hanc expanſionem ſubitam et fractionem concurrere poteſt aër contentus et concluſus in Mercurio, dum ſubito congelatione exprimitur et liberatur. Certe ſi Thermometrum ordinarium adhibetur, in quo bulbus nunquam frangi ſolet, cum Mercurius omnis in bulbum intret, ita vt ſpatium vacuum relinquatur: ſi Mercurius regelatus rurſus in tubum aſcendit, bullae aëreae paruae, quas forſitan aër expreſſus conſtituit, Mercurio interſperſae conſpiciuntur, cum ante congelationem fuerint nullae. Contractio bulbi vitrei ſubita ad fractionem parum aut nihil conferre videtur, alias bulbi Mercurio non plene repleti, vel bulbi Thermometrorum ordinariorum in congelatione Mercurii plena frangi quoque

que debere videntur. Cur bulbi non frangantur, ſi Mercurius tantum ex parte, non ex toto gelatus eſt, facilius intelligitur. Impetus enim, qui omnino cauſa fractionis principalis videtur, non tantus eſt, quantus in congelatione plena, eoque minor Mercurii copia in bulbum intrare ſolet, cedere quoque facilius poſſunt parietes et laminae Mercurii congelati.

Poſt innumera tentamina ad determinandum terminum vltimum deſcenſus Mercurii in congelatione eiusdem fruſtra facta, adhibui duo Thermometra, quorum bulbus ſphaericus diametrum $1\frac{1}{2}$ linea maiorem non habebat. Bulbi hi fracti non ſunt, ſed integri in congelatione perſtitere. Deſcendit Mercurius ad 630 et 640. et videtur omnino congelatio vel perfecta vel proxime perfecta fuiſſe. Frigus naturale fuit $=$ 190. Cera hiſpanica tubulus, vbi bulbo adhaerebat, erat circumdatus, ne congelatio in ipſo tubulo deſcenſum vlteriorem impediret et bulbum obſtruere poſſet. Hic terminus parum differt a termino, quem in diſſertatione mea priore poſui, ſcilicet 650. et quum adcuratiſſima puncti congelationis ſeu termini ad quem Mercurius in congelatione deſcendat, determinatio locum habere nequeat, ita vt ſemper idem punctum, idem terminus, vti in puncto congelationis aquae poni poſſit, ob diuerſas rationes potiſſimum cum maior frigoris

 gradus

gradus quam ad congelandum Mercurium requiritur adeſſe poſſit, eoque denſiorem Mercurium faciat, vti in aëre ſaepius maior, quam ad congelationem aquae requiritur, adeſſe ſolet; vti in diſſertatione mea priori iam monui: ſine errore terminus medius, quem in diſſertatione mea poſui 650. retineri poteſt, quum et alia experimenta ſint, qui hunc terminum indicare videntur. Nam ad 550. ſaepius deſcenſus regularis eſt mihi obſeruatus ante ſaltum, quin ſemel quoque ad 600 viſus eſt, quae tamen vltima obſeruatio dubia videri poteſt, quoniam vnica eſt. Non igitur videtur hic terminus minor ſtatui, neque etiam multo maior quam 650. Nam pro deſcenſu irregulari poſt ſaltum praecipitem iure centum gradus numerari poſſunt. Sed vtrum hic terminus deſcenſus vltimus gradum frigoris quoque indicet Mercurii gelati et firmi, quaeri poteſt et dubitari, vti iam in diſſertatione priore quoque monui. Contractionem Mercurii non amplius frigoris menſuram eſſe poſſe, quam primum irregulariter et cum ſaltu praecipiti deſcendere incipit, per ſe patet. Tamdiu igitur tantum Mercurii deſcenſus menſuram frigoris certam conſtituere cenſendus eſt, quam diu eſt regularis. Ergo gradus 550 certiſſime menſuram frigoris praebere poteſt, quoniam ſaepius in experimentis meis Mercurium ad hunc terminum regulariter deſcendiſſe ante impe-

impetum vidi. Habet igitur Mercurius ſuum contractionis terminum, vltra quem ſua contractione frigus indicare amplius non valet. Hinc ſequitur, ſi etiam Mercurii deſcenſus vsque ad hunc terminum vltimum regulariter etiam deſcenderet, tamen pro menſura certa frigoris haberi non poſſe, quoniam ſi frigus maius eſſet, vlteriore ſui contractione indicare illud tamen non poſſet, quamuis et firmus Mercurius ſe contrahere adhuc, vt reliqua metalla, queat. Habent ſine dubio et reliqua fluida ſuos per frigus contractionis terminos maiores et minores, vbi deſinunt gradus frigoris indicare. Hinc eſſe videtur, quod in gradibus frigoris maioribus Thermometra diuerſis fluidis repleta non amplius concordent, quamuis in minoribus frigoris gradibus optime concordauerint. Qui de frigore abſoluto loquuntur, aut eiusmodi frigus intelligere debent, quod inſtrumenta indicare amplius nequeunt propter terminos contractionis, ſiue ſint Thermometra fluidis repleta ſiue ſint ſolida: aut frigus intelligere debent, vbi omnis in corpore calor abeſt. Eiusmodi dari frigus in vllo corpore probari poterit nunquam, neque in hoc mundo eiusmodi corpus exiſtere poſſe videtur. Ergo eiusmodi frigoris per ſe abſoluti terminus ſtatui nullus poteſt. Concedi tamen poteſt frigus quoddam abſolutum, quatenus contractio fluidorum et ſolidorum ad certum

terminum locum habet, vltra quem inſtrumenta, quae ad determinandos gradus frigoris adhibere ſolemus indicare frigoris gradus amplius nequeunt. Si corpora fluida et ſolida darentur, quae quaſi in infinitum contrahere ſe poſſent; aptam inſtrumentis materiam praebere poſſent ad gradus frigoris ſummos et ad frigus, ſi quod daretur, abſolutum, indicandum. Ceterum vti nullum frigus per ſe abſolutum, ita multo minus calor abſolutus ſtatui poteſt, id eſt talis caloris gradus, qui augeri, et quo maior concipi nequeat, quamuis corpora quaedam tantum certum caloris gradum aſſumere queant. Monui iam in diſſertatione mea priore, frigus quod Mercurium gelauit, ſpiritum vini rectificatiſſimum vltra 300. gradus non depreſſiſſe in Thermometris, quae illo erant repleta. Confirmatum multis experimentis de nouo captis hoc vidi. Confirmarunt eiusmodi differentiam et alia mihi inſtituta experimenta. Impleui tria Thermometra oleis eſſentialibus, quae ſatis accurate inter ſe et cum Thermometris mercurialibus in gradibus frigoris, non inſigniter magnis, concordabant. Olea nominatim erant, ligni Saſafras, Chamaemeli et Serpilli. Haec olea incongelabilia ante repereram non ſolum frigoris naturalis gradibus ſummis, qui hic Petroburgi exiſtere ſolent, ſed etiam frigore artificiali, quod Mercurium congelauit. Deſcendit in

in Thermometris his oleis repletis fluidum non facile infra gradum 260. 270. 280. in maſſa frigorifica, licet Mercurius in aliis Thermometris gelatus fuerit. Frigus naturale erat 190 et 192. Praeter haec tria olea multa alia quoque tam in frigore naturali ſummo quam artificiali incongelabilia reperi; et praeter haec etiam aliud fluidum, lixiuium ſcilicet vltimum muriae (Mutterlauge) quod ex Stararuſſa eſt allatum. Dubium non videtur, quin alia quoque lixiuia eius generis vltima muriae congelationi non minus reſiſtant. Sed de his experimentis fuſius hic agere non licet, agam autem pluribus in poſterum. An vllum in rerum natura detur fluidum calori ſuam debens fluiditatem, quod per ſe ſit incongelabile, quaeri poteſt et ſolet. Non videtur dari eiusmodi fluidum per ſe et abſolute incongelabile. Nam ceſſante tantum calore ad fluiditatem requiſito, ipſa quoque fluiditas ceſſare debet. Aërem igitur quin ipſum Aetherem per ſe incongelabilem haberi poſſe non videtur. Cogitare licet, omni in rerum natura calore ceſſante, tunc certe nullum corpus fluidum, ſed omnia corpora rigida, firma et ſolida haud dubia futura eſſe. Ceterum me non monente apparet, pleraque olea eſſentialia optimae notae ad Thermometra conficienda adhiberi poſſe aeque ac ſpiritum vini rectificatiſſimum, quoniam ſcilicet ſunt incongelabi-

lia pleraque. Feci iam periculum et Thermometra optìme concordantia obtinui.

Haec fere ſunt, certe potiora, quae ad diſſertationem meam priorem in praeſenti addere poſſum. Deſideratis omnibus perfecte ſatisfactum non eſſe, neque forſan ſatisfieri facile poſſe, ex dictis iuxta mecum intelligent omnes. Quod ſi tamen fauentibus circumſtantiis peculiaribus aliquid noui adhuc detegere poſſum, id cómmunicare cum Academia non intermittam. Ceterum modum quem deſcripſi, Mercurium congelandi alium, eſſentialiter ab hoc differentem non noui, neque dari poſſe facile exiſtimauerim. Neſcio igitur quid ſibi velit modus congelandi Mercurium per euaporationem, qui deſcribitur in Diario Anglico The *Gentlemans* Magazine dicto pro menſe Septembri 1761. pag. 403. Nam aut per iocum de hoc congelationis modo ibi dictum eſt, aut ſi ſerio, vti videtur, ſumma et craſſa indicatur ignorantia. Scilicet ibi praecipitur repetita immerſio Thermometri in ſpiritum aethereum, qua facta frigus ita augeri dicitur, vt tandem Mercurius congelaſcat. Quod ad experimentum hoc attinet, verum quidem eſt, productionem frigoris per euaporationem vel exſiccationem bulbi oriri poſſe et ſolere, ſed hoc frigus productum vltra 15 gradus non facile augeri poteſt, certe

certe ego nunquam augere potui. Ceterum de hac frigoris productione in peculiari egi diſſertatione, Commentariis Academiae inſerta. Per calorem quoque firmum fieri poſſe Mercurium, conſtat, ſcilicet ſi per plumbum calidum, quod adhuc molle eſt Mercurius figatur. Cum autem hic modus figendi Mercurium per amalgamationem Mercurii et plumbi fiat, eum huc non pertinere, facile intelligitur.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE

ANNI MDCCXLII. TIVMENI, TVRINII, WERCHOTVRIAE ET SOLIKAMII IN ITINERE POTISSIMVM A GMELINO INSTITVTAE. POTIORA MOMENTA EXCERPSIT ET IN ORDINEM REDEGIT.

I. A. BRAVNIVS.

Obſeruationum Meteorologicarum, quas in diuerſis Sibiriae locis inſtituit Gmelinus, ſumma capita methodo noſtra, qua in obſeruationibus Petropolitanis vtimur, et adhuc vſi ſumus, propoſuimus Tom. VI. Nouorum Academiae Scientiarum Commentariorum. Praeter eas repertae adhuc ſunt quaedam, quas fecit Gmelinus in itinere ex Sibiria Petropolin. Quum et hae quaedam notatu haud indigna contineant; operae pretium me factururm arbitratus ſum, ſi et eas communes hic facio. Methodus eadem hic eſt adhibita, quae alias et in antecedentibus. Nimirum in ſummis et infimis altitudinibus barometricis numeri ante punctum pollices duodecimales pedis Pariſienſis, poſt punctum, partes eiusdem pollicis centeſimas ſignificant. Maximus et minimus calor ſecundum ſcalam thermome-

mometricam Delilianam eſt notatus. Praeter altitudines barometri ſummas et infimas, calorisque gradus minimos et maximos per ſingulos anni menſes, Meteora potiora ſunt adnotata.

Obſeruationes primae Tiumeni factae incipiunt a Februarii 1mo et pertingunt ad Martii 3. Quae Turinii ſunt inſtitutae, initium capiunt a Martii 7mo ad Iulii 4^{tum} vsque pertinentes. Et rurſus ab Oct. 1 ad Nov. 11. Werchoturienſes ſunt a Iul. 9 ad Dec. 8. Solicamienſes a Dec. 17 ad 31. eiusdem conſignatae.

Obſeruationes ipſae ſunt, quae ſequuntur, et primum Barometricae Tiumenii a Febr. 1 ad Martii 3. adnotatae.

Menſe igitur Februario Tiumeni Barometri altitudo maxima fuit $=$ 28. 28, quae obſeruata eſt d. 23. Minima $=$ 27. 24. d. 28. notata. Eſt igitur differentia, ſiue variatio altitudinis hydrargyri in tubo Torricelliano $= 1. \frac{4}{100}$. adeoque media altitudo barometrica 27. 76. medium arithmeticum ſumendo.

Maxima haec altitudo contigit ſub ſequentibus circumſtantiis: Coelum a meridie erat ſerenum vti quoque dies aliquot antecedentes et conſequentes fuere ſereni. Ventus SSW 3, proxime antecedens O 1 et W 2; ſequens SSW 3 et 4 per aliquot dies, ſequente demum SSW 1.

Frigus tempore obſeruationis nocte h. 12. Thermometrum monſtrabat 170. antecedens mane 165. ſequens 176. mane ſequenti die. Antecedens altitudo barometrica 28. 26. ſequens 28. 18.

Minima altitudo accidit ſub his circumſtantiis. Antecedens altitudo erat = 27. 26. ad quam nocte antecedenti a 27. 48 celeriter deciderat.

Sequens d. 1. Martii 27. 20 et denique 27. 13. h. 12. nocte.

Per diem nix larga cecidit, tempore obſeruationis h. 11. nocte coelum ſubſerenum. Die antecedenti coelum tenuibus nubibus erat obductum, ſequenti vero ſerenum. Ventus SSW 1 antecedente SSO 2. et ſequente SW 3 et 4 Thermometrum indicabat frigus = 169. Antecedens frigus = 172 et ſequens 174.

Frigus maximum fuit = 182. et minimum 146. variatio igitur = 36.

Maximum frigus notatum d. 27. et minimum d. 6.

Maximum frigus contigit vento SSO 2, antecedente SSW 2. 3. 4. et ſequente SSW 1. Antecedens frigus = 171 et ſequens 172.

Coelum erat fere ſerenum, vti quoque diebus antecedentibus et die ſequenti. Altitudo barometrica = 27. 67 antecedens 27. 80 ſequens 27. 46.

Mini-

Minimum frigus 146. h. 12 nocte conſignatum eſt, mane erat $=$173 et ſequenti die mane 162. ventus NW 2 antecedente SSW 3 et 4. ſequente NO 1 et co. Coelum ſerenari incipiebat ante nubilum ſequente ſerenitate.

Altitudo barometrica $=$ 27. 76 antecedens 27. 59 ſequens 27. 95 quae porro creuit.

Meteora potiora huius menſis huc redeunt. Venti vehementiores d. 1. WSW 3 et 4. d. 2 S et SW 4. d. 3 SW 4. d. 4. 5. 6 SSW 3 et 4. ſequenti die 8 malacia d. 11. N 3 et 4 d. 12. W 3 et 4. d. 13. 14 W 4 ſequente d. 17 tranquillitate d. 24 SW 3 et 4 ſequente d. 27. W 1. Ceterum regnavit ventus S et W.

Nebula d. 8. non admodum ſpiſſa h. 7. a. m. quae circa h. 10. diſſipata eſt ſequente ſerenitate.

Lux borealis tranquilla, quae arcus lucidi ſpecie ad horizontem adparebat d. 20. h. 10 et ſeq. vento N 1 coelo ſereno, Barometro 28. 07 Thermometro 168. ſequente frigore 174.

Cometa huius anni et hic ſpectatus eſt, et quidem primum d. 28 quamuis iam ante 8 dies eum alii conſpexerint. Cauda meridiem verſus extenſa orgyiam circiter longa adparebat.

Tota menſe Catarrhi, tuſſe, rheumate, tonſillarum, vuulae et gutturis inflammationibus comitati, regnabant, vti quoque Tobolii et Ircuti graſſati ſunt.

Ss 2 Menſis

Menſis Martius.

Obſeruationes huius menſis Turini (Turinsk) factae ſunt, exceptis tribus diebus primis, quae adhuc Tiumeni ſunt conſignatae. Incipiunt a d. 7mo.

Altitudo Barometri ſumma huius menſis Turini = 27. 85. Minima = 26. 95. Ergo variatio = $\frac{90}{100}$ ſiue circiter lin. 11 Paris.

Summa altitudo d. 18. ad h. 4. a. m. ſub ſequentibus circumſtantiis eſt notata. Antecedens altitudo = 27. 80 et ſequens 27. 80 et porro 27. 62. Coelum nubilum et niuoſum vti die antecedenti et conſequenti fuit. Ventus ONO 1. antecedens N 1 ſequens OSO 1. Calor = 160. antecedens 157. ſequens 157 mane ſcilicet.

Minima altitudo notata d. 10. h. 8. a. m. et 4. p. m.

Antecedens erat = 27. 00 et ſequens 27. 05. Ventus NW 2 antecedens SSO 2 ſequens W 1. Mane nix minuta iugiter cadebat ad h. 10. dein coelum hinc inde ſerenari coepit. Dies antecedens nubilus et niuoſus niue humida maiorum floccorum cadente, ſequens ſerenus cum aliquot ſequentibus. Thermometri gr. = 157. antecedenti die mane 167 et ſequenti 171.

Frigus maximum hoc menſe Turinii fuit = 179 et minimum = 135. Eſt igitur variatio caloris = 44°.

Frigus

Frigus maximum contigit d. 7. h. 7. a. m. vento O 1. coelo ſereno, Barometro 27. 50.

Calor maximus d. 31. h. 5. p. m. notatus eſt vento N g. W 2. coelo ſpiſſis nubibus obducto. Ventus antecedens W et W S W 3 et 4. ſequens O S O 1 Barometri altitudo = 27. 55 antecedens 27. 36. ſequens 27. 60.

Meteora huius menſis haec fere ſunt Turinii notata.

D. 8. O 3 et S O 4 nocte, barometri altitudine per totum diem inuariata = 27. 30. antecedens 27. 43 et ſequens 27. 20. D. 9. S O 3. d. 14. S W 4 antecedente S 2 et ſequente quoque S 2. Altitudo Barometri = 27. 46. antecedens 27. 36 ſequens 27. 45. D. 15. W S W 3 et 4. altitudo barometri = 27. 36 anteced. 27. 40 ſequens 27. 60. Adſcenſus hic fuit celerrimus interuallo 8 horarum. D. 20. W 3 et 4 coelo ſereno, altitudine barometrica = 27. 25. antec. 27. 35 et ſequens continuante procella 27. 35 et dein 27. 50. D. 21. nocte S W 3 et 4. ſub altit. barometrica 27. 55. anteced. = 27. 50 ſequens 27. 40. D. 28. W 3. Altitudo barometri = 27. 32. antecedens 27. 35. ſequens 27. 60. D. 30. W S W 4. Altitud. bar. = 27. 45. antec. 27. 55. ſequens 27. 36. vento W et W S W 3 et 4 d. 31. continuante.

Aurora borealis d. 22. adparuit, primum intenſe rubrae nubis, dein trabium rubrarum trium et quatuor ſpecie, quae paullatim rubedinem ammittentes euanuere tandem penitus. Coelum ſerenum, ventus WNW 2. Calor 152. Altitudo bar. 27. 60 antecedens 27. 42. ſequens 27. 74.

Lux rubra columnae ſpecie ab horizonte ad 15°. circiter eleuata SO verſus inter 7 et 8. d. 24.

Segmentum fere atrum ſeptentriones verſus adparuit d. 26. media nocte. Sub eo lux quaedam debilis et ſuper eo nubeculae quaſi igneae diſponebantur, dein NNW verſus permagnum ſpatium irregulare proxime ad horizontem viuida et eximie coruscante luce per ½ h. conſpiciebatur.

Halo circa lunam h. 7. p. m. d. 7. notata coelo tenuiſſimis nubibus obducto vento O 1.

Halo porro circa Lunam d. 8. inter h. 7 et 11. comparuit coelo tenuiſſimis nubibus obducto. Ventus h. 12. p. m. ſequutus SO 4 antea OSO 2 et 3.

D. 31. Turae fluuii glacies hinc inde ſoluta eſt, et Ialinka amnis a glacie penitus liber. Hoc die quoque Papiliones viſi ſunt.

Iidem morbi hoc menſe graſſati ſunt ac menſe antecedenti Februario, maligni oris tamen erant naturae et ſanguinis inſignibus inflammationibus ſtipati.

Menſis

Menſis Aprilis.

Obſeruationes huius menſis Turinii ſunt continuatae, et ſunt quae ſequuntur.

Altitudo Barometri maxima = 28. 05.

Minima = 27. 00. Ergo fuit differentia = 1 poll. $\frac{5}{100}$ et media ſenſu ſupra indicato, medium ſcilicet arithmeticum ſumendo, vt in Aſtronomia ſolet, = 27. 52½. Maxima notata eſt d. 14. h. 8. a. m. ſub ſequentibus circumſtantiis. Antecedens altitudo diei antecedentis eadem hora erat = 27. 94. et ſequentis diei eodem tempore = 27. 87. Coelum erat ſerenum, vti quoque diebus aliquot antecedentibus, ſequens dies primum nubilus, dein p. m. ſerenus. Ventus O g S 2, antecedens O 2 et ſequens S 2. 3. Thermometri gradus = 149. die antecedenti eadem hora 149 quoque et ſequenti 143 eadem h.

Minima obſeruata eſt d. 3. h. 8. a. m. Antecedens = 27. 30. et ſequens, diei ſcilicet ſequentis eodem tempore 27. 62. Coelum ſpiſſis nubibus obductum, duobus diebus antecedentibus ſerenum, ſequenti nubilum et pluuium quoque, ventus SSW 4 die antecedenti S 3 et SO 3 et 4. Aquae Turae Fluuii hoc vento valde intumuere. Die ſequenti W 1.

Gradus caloris 141. antec. 146. ſequens 145.

Fri-

Frigus maximum huius menſis erat =155. et calor maximus 119. Fuit igitur differentia et variatio caloris =36°.

Maximum frigus notatum eſt d. 29. nocte h. 12. anteced. 146. ſequens 148. Ventus N 1 anteced. O 2 ſequens W 2. Coelum a crepuſculo ſerenum, per diem tenuibus nubibus obductum. Barometri altitud. =27. 68. mane h. 8. 27. 57 et ſequenti die mane eadem hora 8. 27. 75.

Calor maximus contigit d. 22. h. 5. p. m. Mane erat h. 7. =132. nocte h. 12. 127. Ventus S W 3 et 4. antecedente malacia ſiue vento 00 et ſequente; die ſequenti W 3 et N 3. Coelum erat nub. et pluuia cadere incipiebat breuiſſimae durationis, antea aër tenuiſſimis vaporibus repletus erat, vti quoque nocte ſequenti.

Barometri altitudo =27. 58. anteced. proxime 27. 63. et ſequens h. 12. nocte 27. 28. ita vt ab h. 5 ad 12. adeoque interuallo 7 horarum $\frac{20}{100}$ ſiue $2\frac{1}{2}$ lin. diminuta fuerit, vento S W 3 continuante.

Meteora huius menſis huc redeunt. Venti vehementiores d. 1. SO et S W 3 et 4. d. 2. S et O 3 et 4. d. 3. S W 4. per totum diem. Barometri altitudo decreuit his tribus diebus ventoſis a 27. 60 ad 27. 00. dein celerrime rurſus adhuc creuit ad 27. 20. 27. 50. quamuis W 4. continuerit.

Porro

Porro d. 5. W4 breuis durationis, d. 7. N et NO3; d. 9. O3 altitudine barometrica inuariata; d. 14. S3; d. 17. et 18 S3 et 4. barometri altitudine decreſcente a 27. 78 ad 27. 55 durante vento; d. 22. SW3; d. 23. W et N3; d. 24. N3. Altitudo bar. decreuit a 27. 63 ad 27. 23. ſed N3 flare incipiente rurſus aucta ad 27. 57. d. 25. nocte W3. d. 27. S et SO et SW3 et 4. d. 28. W4 decreſcente altitudine barometri a 27. 62 ad 27. 23. d. 29. N3. creſcente altitudine bar.

Grando minuta d. 27. cecidit, et d. 15. Tuſſilago florens adportata eſt, et d. 5. Anates, Cygni et Grues viſi ſunt.

Halones circa Lunam et Solem fuerunt ſequentes obſeruatae.

Halo circa Lunam d. 1. inter h. 8 et 11. p. m. coelo tenuibus nubibus obducto, vento SSW4. Item d. 11. circa h. 12. nocte cum duabus paraſelenis ex vtroque Lunae latere et columna iridis coloribus praedita in rectum horizontem verſus protenſa. Coelo tenuibus nubibus obducto, vento W2. Halo circa ſolem cum pareliis ex vtroque latere ſolis vna d. 22. h. 7. a. m. conſpecta eſt, aëre tenuiſſimis vaporibus repleto, vento SW2. D. 6. paullo ante occaſum ſolis columna iridis coloribus coruſcans ex ſiniſtro ſolis latere in diſtantia circiter 15. diametrorum ſolis eleuata ad 8. circiter gradus, horizontem non tangens obſeruata eſt.

Lux borealis tranquilla inter h. 10 et 11. d. 12. conſpecta eſt columnarum in altum ſurgentium ſpecie, coelo ſereno, vento WNW1. D. 13. Glacies Turae fluuii rumpi coepit, et ſequenti die fluuius a glacie e regione vrbis liber erat.

Menſis Maius.

Eodem in loco, nimirum Turinii (Turinsk) obſeruationes menſis Maii ſunt inſtitutae. Erat ſumma altitudo Barometri = 27. 85. et infima = 27. 12. Ergo differentia = $\frac{73}{100}$ hinc media = 27. 48½. Maxima altitudo contigit d. 21. h. 12 nocte. Proxime antecedens = 27. 80. et proxime ſequens etiam = 27. 80. Ventus NO1, antecedens, O1, ſequens ONO2. Coelum erat fere ſerenum vti quoque diebus duobus antecedentibus, diebus vero ſequentibus maiorem partem nubilum et pluuium. Gradus Thermometri = 130. poſt meridiem h. 3. 126. et mane ſequenti die 134.

Minima altitudo notata eſt d. 7. h. 7. a. m. pluuia larga cadente, vti quoque die antecedenti, ſequens autem dies ab initio ſubnubilus, dein ſerenus. Ventus W2 vti quoque duobus diebus antecedentibus, veſperi mutatus in W3 et 4. qui magnam niuium copiam ſecum tulit in pluuiam tandem reſolutam, Thermometro 142 monſtrante. Mane Thermometri gradus = 135 et p. m. 137. Antecedens alti-

altitudo barometrica = 27. 23. et ſequens 27. 15 et dein 27. 34. ſaeuiente procella.

Maximum frigus = 151 et maximus calor 115. Ergo variatio caloris = 36.

Maximum frigus notatum d. 1. h. 7. a. m. mane, die antecedenti 154. et ſequenti 149. Ventus O 2, antecedens, OSO 1. ſequens NNO 2. Coelum ſerenum, et die antecedenti, ſequente nubilo.

Altitudo barometrica = 27. 62. anteced. = 27. 75 et ſequens 27. 46.

Calor maximus notatus d. 18. h. 5. p. m. vento S 4. pluuia cadere incipiente, coelo antea ſereno. Mane calor = 127 et nocte h. 12. 123. Altitudo barometrica = 27. 36. antec. 27. 42. ſequens 27. 45.

Meteora potiora ſunt ſequentia.

Venti vehementes d. 1. NO 3 et 4. altitudo barom. decreuerat ab h. 7. a. m. ad h. 5. p. m. a 27. 62 ad 27. 46. d. 3 S 4. et W 3 et 4 decreſcent. Altitud. barometr. 27. 48 ad 27. 28. creſcente rurſus altitudine bar. ventus ad huc continuauit. D. 4. W 3 et 4. altitudine bar. non imminuta ſed aucta a 27. 34 ad 27. 40. d. 7. W 3 et 4. nocte altit. baromet. ab h. 7. a. m. a 27. 12 ad 27. 34. creverat, d. 10. W 3 et 4. Alt. bar. a 27. 40 ad 27. 28. decreuerat, ſed orto vento iam ad 27. 38 rurſus adſcenderat. D. 18. SO et S 3 et 4. altitu-

dine bar. tantum $\frac{10}{100}$ mutata, praecedente S 2 et ſequente W 1; d. 26. SO 3 altitud. bar. nihil mutata.

Grando cecidit d. 3. circa h. 7. p. m. flante W 4. Thermometri gradus = 142 et altitud. bar. = 27. 32.

Nebula d. 11. nocte, Therm. 139. Barom. 27. 48. vento W 1 et d. 29. ſub ortum Solis Tonitru primum; d. 29. altitudine bar. 27. 35. gradu therm. 121. vento S 2.

Halo circa lunam d. 2. inter h. 11 et 12, p. m. coelo hinc inde nubilo. Vento S 2 gradu therm. = 144 et barometri alt. 27. 48.

Menſis Iunius.

Et huius menſis obſeruationes Turinii ſunt continuatae.

Altitudo barometri maxima erat = 27. 85. vt in menſe praecedenti; minima autem 27, 05. Ergo differentia ſiue variatio altitudinis = $\frac{80}{100}$ et media ſenſu vt ſupra = 2. 45.

Maxima eſt notata d. 15. antecedens = 27. 83 et ſequens 27. 80. Gradus caloris = 110. antecet. 116 et ſequens 112. Ventus 0 0 ſequente SSW 1, antecedente W 1. Coelum ſerenum, vti quoque diebus aliquot ſequentibus, die antecedenti maiorem partem ſerenum erat.

Mini-

Minima obſeruata eſt d. 5. coelo pluuio, vento NW 4, thermometro 129. Altitudo antecedens = 27. 35 et ſequens 27. 20.

Calor maximus = 109. Minimus = 139. Ergo differentia ſiue variatio caloris = 30°.

Calor maximus contigit d. 17 et 19. d. 17. vento SW 1 coelo mixto, barometro 27. 70. die vero 19. coelo ſereno, vento NW 1 altitudine bar. 27. 50.

Minimus notatus d. 7. altit. bar. 27. 35, vento WNW 2, coelo ſereno cum tempeſtate pluvioſa et ventoſa variante. Pruina in gramine eſt obſeruata.

Meteora praecipua ſunt quae ſequuntur.

Venti vehementes d. 3 et 4 WSW 3, et WNW 3 decreſcente altitudine bar. duobus his diebus a 27. 40 ad 27. 25. durante vento d. 5. WgN 4. antecedente malacia et barometro deſcendente a 27. 35 ad 27. 05 interuallo 8. horarum. Reliquis diebus venti admodum debiles, quin maiorem partem tranquillitas aëris ſiue ventus 00. fuit.

Tonitrua fuere d. 2. quum ex denſa nube occidentem verſus inconcinnus ſonus ſemel auditus eſt, pluuia mox ceſſante, et vento remiſſiori facto; item d. 18. 19. 27. Poſtremum grauiſſimum, alt. bar. = 27. 43. Therm. gr. = 116. ventus WNW.

 Ful-

Fulgurum luſus S et W verſus ad horizontem conſpiciebantur d. 17. nocte h. 12.

Menſis Iulius.

Huius menſis obſeruationes Werchoturiae factae ſunt, exceptis 4 primis diebus, quae Turinii adhuc ſunt inſtitutae. Incipiunt a d. 9.

Altitudo barometra maxima = 27. 50. Minima 26. 93. Ergo differentia et variatio altitudinis = $\frac{57}{100}$ ſiue lin. 7. fere paris. et altitudo media = 27. 21$\frac{1}{2}$.

Maxima altitudo obſeruata eſt d. 30. antecedens = 27. 47. conſequens 27. 45. eadem altitudo per duos dies. Coelum erat ſerenum vti diebus aliquot antecedentibus; ſequente tempeſtate nubila et pluuioſa. Ventus 00. antec. O 1. ſequens WNW2 et 3. d. 1. Auguſt Gradus thermometri mane 134. p. m. 117.

Minima accidit d. 14. h. 7. a. m. Antecedens = 27. 00. conſequens rurſus 27. 00. Ventus 00. antecedente quoque 00. ſequente W 2. Coelum pluvioſum, pluuia minuta per totum diem cadente. Calor = 124. Antecedens 122 et ſequens mane die ſequenti 130. Calor maximus = 111. d. 31. Minimus = 134. d. 30. Ergo variatio = 23. Calor maximus vento 00. bar. 27. 45. coelo ſereno contigit. Antec. = 131 mane, ſequens 120 nocte.

Mini-

Minimus vento itidem oo. coelo ſereno, altitudine bar. 27. 50. Antecedens calor 126. ſequens 131 die ſequenti mane.

Meteora. Nullus ventus vehemens, vtplurimum W flauit debilis, ſaepius tranquillitas aëris ſiue ventus oo.

Tonitru d. 20. h. 3. p. m. therm. 115. baromet. 27. 30. vento inter W et NW. Praeterea nullum meteorum notatu dignum hic contigit, Turinii vero d. 3. huius menſis h. 11. p. m. ſtriae quaedam luminoſae conſpectae ſunt, aliae horizontales, et in arcum incuruatae, aliae perpendiculares, aliae inclinatae, omnes ſplendore vibrante gaudentes, vti ſolet in luce boreali. Ad horizontem nulla obſcuritas. In eleuatione 45° circiter initium ceperunt ad verticem vsque fere extenſae. Splendor ſenſim imminutus eſt et poſt h. 12. euanuit.

Menſis Auguſtus.

Huius menſis obſeruationes Werchoturiae ſunt continuatae.

Altitudo maxima barometrica erat = 27. 77. Minima 26. 95. hinc variatio = $\frac{82}{100}$ ſiue fere 10 lin. Media altitudo = 27. 36.

Maxima altitudo notata eſt d. 21. h. 8. a. m. Antecedens erat = 27. 65. et ſequens 27. 75. Ventus NO 1. ſequente aëris tranquillitate. Coelum nubi-

nubilum, veſperi ſerenum, die antecedenti ſubnubilum. Thermometrum monſtrabat 129. p. m. 118.

Minima contigit d. 29. h. 7. a. m. vento oo. antecedente O 2 et ſequente S 1 et SW 3. Antecedens alt. bar. = 27. 08. et ſequens 27. 10. Coelum nubibus variegatum, die antecedenti ſerenum et die ſequenti primum ſerenum, dein veſperi tenuis pluuia cecidit.

Calor = mane 127. poſt meridiem 119.

Calor maximus obſeruatus eſt d. 23. 113. Minimus d. 19. 143. hinc differentia et variatio = 30.

Calor maximus contigit h. 4. p. m. vento SO 1 alt. bar. 27. 50. coelo ſereno.

Minimus h. 6. a. m. vento oo. coelo ſereno, barometro 27. 45. Plerisque diebus aër ſat calidus alias fuit.

Venti vehementiores nulli ſunt obſeruati, omnes debiles vt plurimum ex S et W ſpirarunt. Dies plerique fuere ſereni.

Tonitru nocte inter 3 et 4 auditum fuit, d. 4. h. 4. p. m. cum largo imbre et grandine, thermometro 116. Bar. 27. 20. vento WNW.

Lux borealis d. 16. conſpecta fuit, ſub initium h. 9. p. m. multis ſtriis lucide nitentibus conſtabat ab horizonte perpendiculariter exſurgentibus ad vrſam maiorem vsque pertingentibus, circa h. 10. hac phaeno-

phaenomenum periit. Accidit vento NN 1, calore 137. alt. bar. 27. 60.

Eodem die pruina hinc inde eſt obſeruata mane h. 6. thermometri gradus erat = 141.

Menſis September.

Et huius menſis obſeruationes Werchoturiae ſunt factae.

Maxima barometri altitudo erat = 27. 90. Minima 26. 55. Ergo fuit variatio = 1. 90. Media 27. 22½.

Maxima notata d. 24. h. 6. a. m. Antecedens = 27. 82. ſequens 27. 80. Ventus SO 2. antecedente malacia et ſequente. Coelum ſerenum, vt diebus antecedentibus aliquot, ſequente proxime tempeſtate nubila. Calor = 155. p. m. h. 3. 145.

Minima obſeruata d. 2. h. 7. a. m. anteced. = 26. 95. et ſequens 26. 80. Ventus SW 2. antecedens NO 2. ſequens WSW 2. 3. 4. Calor = 142. p. m. 137. Coelum pluuioſum, vti quoque die antecedenti, et ſequenti ad h. 5. a. m. dein nubilum, et ſerenum nocte.

Calor Minimus fuit = 155 et Maximus 119. hinc variatio = 36.

Minimus obſeruatus d. 24. h. 6. a. m. Vento oo. Coelo ſereno, alt. bar. 27. 90. antec. 27. 82 ſequens 27. 80.

Maximus d. 14. h. 3. p. m. Mane h. 8. =139. Ergo differentia diurna = 20. Ventus oo, et die antecedenti, ſequente W 1. Coelum ſerenum, alt. bar. 27. 87.

Meteora. Venti vehementes d. 20 et 21 W et SW 3. Ceterum aër ſatis tranquillus, ſaepius Vent. oo.

Nebulae d. 25 et 26. mane, vento S 1 et oo calore 140 et 144. ſequente ſerenitate. Bar. 27.70 vtroque die.

Pruina copioſa d. 1. obſeruata quae per noctem cecidit, partim vt ſolet, comparata, partim globulis conſtans grandinem forma et conſiſtentia ferentibus. Calor = 141. nocte 136. Ventus SW et S 1, tempeſtate ſerena. Alt. bar. nocte 27. 25 et mane 27. 32. Porro pruia copioſa d. 8. per noctem, vento ONO 1 et oo. Bar nocte 27. 55. mane 27. 75. therm. 149. h. 10. antec. diei 139. coelo ſereno.

Prima congelatio leuis d. 8. monſtrante thermometro 149, pruina nocte ceciderat.

Menſis October.

Huius menſis obſeruationes, Werchoturiae adhuc factae, ſunt ſequentes.

Altitudo barometrica ſumma erat vt in menſe praecedenti = 27. 90. Infima autem 26. 70. Ergo

go variatio = 1. 20. hinc media ſenſu vt ſupra 27. 30.

Maxima d. 1. h. 11. p. m. eſt obſervata, antecedens 27. 85. ſequens 27. 80. Ventus 00. anteced. Og N 1. ſequens SW 1. Coelum ſerenum, vti quoque per totum diem et fere die ſequenti. Calor = 150. h. 3. p. m. 144.

Minima contigit d. 24. h. 3. p. m. vento N 1. antecedente, O 1. ſequente WSW 2. Calor 148. mane 150½. Nix per totum diem cecidit madida, et dies antecedens nubilus et niuoſus, ſequente nocte et die ſequenti tempeſtate ſerena.

Calor maximus = 128½ frigus maximum 164½ hinc variatio = 36°.

Frigus maximum obſeruatum d. 21. h. 7. a. m. h. 3. p. m. = 156. Ventus erat 00. Alt. bar. 27. 35. coelum ſerenum.

Calor maximus d. 8. h. 3. p. m. coelo ſereno, vento SSW 1 alt. bar. = 27. 82. Mane calor = 139 erat.

Aër et hoc menſe ſatis tranquillus fuit, vnicus ventus W 3 d. 10. h. 3. p. m. obſeruatus eſt altitudine bar. a 27 65 ad 27. 60 ante deſcendente. Nix prima d. 16. cecidit, et nocte inter 19 et 20 glacies Turam fluuium in vicinia vrbis vbique occupauit. Ceterum maior menſis pars ſatis ſerena

 fuit.

fuit. Thermometra fluuio immerſa modo aequalem modo diuerſam temperiem in exceſſu et defectu monſtrabant.

Huius menſis obſeruationes et Turinii factae ſunt, vt ſupra monuimus, quas hic adiiciemus.

Altitudo bar. maxima fuit = 28. 17. d. 1. h. 11. p. m. Minima = 26. 87 notata d. 24. h. 3. p. m. Hinc variatio = 1. 30. et Media = 27. 52.

Maxima ſequentibus circumſtantiis eſt comitata.

Antecedens erat 28. 10. ſequens 28. 15. Ventus O 2. ſequens W 2, antecedente N et NO 3. Calor 157. mane 153 et p. m. 152. Coelum ſerenum, vti quoque per totum diem, ſequenti vero die nubilum.

Minima 26. 87 contigit ſub his circumſtantiis Antecedens erat 27. 12. ſequens 27. 04. Calor 155, ventus S et WSW 3. antecedens S 2 et ſequens WSW 2 die 25. h. 3. p. m. Nix admodum humida minutiſſimis floccis cadebat. Dies antec nubilus, nox ſequens autem ſerena, et dies ſequens fere ſerenus.

Frigus maximum = 168 et minimum = 134. Ergo variatio = 34.

Minimum notatum d. 9. h. 3. p. m. antecedens mane 143 et ſequens nocte h. 12 = 138. Ventus W 2, qui et antecedebat et ſequebatur. Alt. bar. 27. 85. antec. 28. 00. et ſequens 27. 80. Coelum

lum ſerenum, vti quoque diebus antecedentibus, ſequente die ſequenti tempeſtate nubila et pluuia.

Maximum frigus d. 25 nocte h. 12 et d. 28. h. 7. a m. accidit. Die 25 antecedens frigus erat = 164. h. 3. p. m. vento WSW 2. barometri alt. 27. 70. antec. 27. 58. ſequens 27. 65. Coelum maiorem partem nubilum erat.

D. 28. ventus 00, bar. 27. 53. coelum nubilum erat frigore hoc ſummo exiſtente.

Meteora, primum venti vehementes d. 5. W 3 nocte d. 9. W 3. p. m. d. 24 et 25. S et W 3. d. 26. S 4 nocte d. 28. h. 3 ſequente malacia et antecedente.

Tura fluuius nocte inter 26 et 27. glacie coiuit ex aduerſo vrbis.

Primi dies vsque ad 10 erant ſereni, ceteri plerique nubili, et niuoſi.

Hactenus de obſeruationibus menſe Octobri Turinii inſtitutis; nunc ad Werchoturienſes menſis Nouembris progrediendum eſt.

Menſis Nouember.

Summa altitudo barometrica huius menſis erat = 28. 12. Minima 26. 85. Hinc differentia ſiue variatio = 1. 27 et media 27. 48½.

Altitudo maxima notata eſt d. 27. h. 12. nocte. Anteced. erat = 28. 10 et ſequens quoque

 28. 10.

28. 10. Ventus oo. per totum diem et toto die antecedenti, ſequenti autem die NO3. Coelum ſubnubilum, die antec. ſerenum ſequenti tempeſtas turbida.

Minima contigit d. 1. h. 8. a. m. Praecedens = 26. 95 et ſequens quoque 26. 95. Ventus W1 antec. OSO1. ſequens NW2. Coelum nubilum et niuoſum niuibus copioſis floccis minoribus cadentibus. Calor = 147½. p. m. 156½.

Obſeruationes therm. ob fractum thermometrum tantum pertingunt ad d. 4. D. 3. frigus erat = 185½. quod maximum interuallo horum 4 dierum fuit.

Venti vehementiores d. 4. N3. altitudine barometrica inuariata, ſequente O1. d. 12 WSW3. d. 22. W 3. nocte. Altitudo bar. mane erat = 27. 47. ad quam a 27. 55 deſcenderat, h. 3. p. m. rurſus 27. 55 ad tempus obſeruationis.

Parelii ex vtroque latere ſolis occaſui proximi d. 3. vento N2. frigore 171. alt. bar. 27. 70. Coelo ſatis ſereno.

Halo circa lunam eodem die h. 10. p. m. conſpecta, vento NO2. eadem altitudine bar. coelo ſereno, hinc inde ſtriis albicantibus diſtincto. Item halones d. 26 et 27. Prior conſpecta h. 12. nocte vento oo. altitudine bar. 28. oo. coelo ſereno; poſterior

ſterior coelo ſubnubilo, vento oo. Alt. bar. 28. 12 h. 12. nocte, quae iam veſperi adparere coepit.

Huius menſis obſeruationis Turinii quoque vsque ad d. 11. ſunt continuatae. Interuallo horum dierum maxima altitudo barometri fuit = 27. 99 d. 5. et Minima 27. 05. d. 1. Frigus maximum = 193 d. 4. Minimum 157. d. 10. Venti vehementes d. 1. W 3 et 4. d. 2. WNW 3 et 4. d. 3 et 4. N 3. d. 6. S 3. d. 9. SW 3. d. 10. W 3. Ergo 7. diebus, ſpatio 11. dierum.

Menſis December.

Huius menſis obſeruationes Werchoturienſes ad 8. vsque tantum pertingunt, reliquae a d. 17 ad finem, Solikamii ſunt inſtitutae.

Interuallo horum 8. dierum altitudo barometri ſumma Werchoturiae fuit = 28. 08 d. 2. et Minima = 26. 78. d. 7. Frigus maximum = 200 d. 3. et Minimum 182 d. 1. Aër tranquillus ſatis fuit ita vt nullus ventus vehementior ſpirauerit.

Trabes luminoſa a luna ad diſtantiam 12 circiter graduum recta in altum ſurrexit h. 12. nocte, coelo tenuibus nubibus obtecto.

Singulare phaenomenum lunare conſpectum fuit d. 1. inter h. 5 et 7. p. m. Scilicet circa h. 5. duae paraſelenae (*aa*) adparuere, vna ex vtroque lunae latere quarum ea, quae a dextris ſpectatoris

toris erat, luce multo viuidior erat, ſiniſtra, et iridis coloribus coruſcabat, faſciamque bene lucidam ab externo latere perquam longe in directum de ſe emittebat; ſiniſtra obſcurior faſciam eodem modo ſparſit, ſed adeo obſcurae lucis, vt vix diſtingui potuerit. Eo ipſo tempore in diſtantia viginti circiter diametrorum lunarium ab halone, ſegmentum halonis lucidae, cornubus ſurſum verſis in conſpectum veniebat. Hac facie phaenomenum per tres horae quadrantes adparuit, luce tamen vtriusque paraſelenes viuidiſſima facta hac ratione, vt dextra perpetuo lucidior eſſet, et tandem viuidiſſimis iridis coloribus coruſcaret, quos et faſciae lucidae eius lateris in ſatis longam diſtantiam impertiuit. Tunc et in ſuperiore halonis parte e directo lunae halonis maioris arcus debili tamen luce conſpicuus, convexa ſui parte haloni contiguus prodibat. Faſciae lucidae paraſelenes vtriusque lateris longiſſime protendebantur, et totum coelum cingentes, halonem denique alteram formabant, in qua duae paraſelenae (*bb*) a prioribus diſtinctae iisque ex aduerſo ſitae conſpiciebantur, ea quidem multo lucidiore, quae prius nominatae lucidiori proprior erat, quod et de halone eas includente tenendum, regionem lucidae paraſelenae propiorem multo altera lucidiorem, alteram autem vix conſpicuam. Haec per integram horam conſpici poterant, donec omnia praeter halonem lunae concentricam, paullatim euaneſcerent,

quae

quae pallidiſſima tamen h. 11. p. m. ſpectari adhuc poterat. Altitudo bar. erat = 28. 05. antec. 27. 90 ſequens 28. 02. Frigus = 18 5. vente N 1. Coelum fere ſerenum, ſiue vaporoſo ſerenum.

Hactenus de obſeruationibus Werchoturienſibus, quae ſunt inſtitutae in altitudine $6\frac{1}{2}$ circiter orgyiarum a media ſuperficie aquarum Turae fluuii, qualis aeſtate eſſe ſolet. Altitudo ſcilicet ſoli = 6 orgyiarum et altitudo domus = $\frac{1}{2}$ org. ſupra ſolum, vbi barometrum erat ſuſpenſum.

Notandum adhuc eſt poſt diem 8. frigus intenſiſſimum ſequuntum eſſe perpetua tenui nebula, quaſi aëre gelato comitatum. Maximum fuiſſe videtur diebus 12 et 13. D. 12. frigus = 238 a meridie ad h. 4. in Koswa pago eſt notatum, et d. 13. omnis Mercurius in bulbum thermometri deſcendit, licet diuiſio 260 graduum eſſet, quod in pago Tſchikman eſt obſeruatum. Ob magnam aëris copiam inſigni hoc frigore in bulbo thermometri collectam altitudo vera aliquantum minor fuiſſe videtur.

Obſeruationes Solikamii factae incipiunt a d. 17. et finiuntur cum fine menſis.

Altitudo maxima bar. Solikamii a. d. 17 ad finem menſis fuit = 27. 73. d. 22. h. 12 nocte frigore 193. coelo ſereno. Venti in his obſeruationibus non ſunt conſignati.

Minima notata eſt d. 27. h. 8. a. m. = 26. 80. Ergo differentia = $\frac{93}{100}$.

Frigus maximum 238 et 260 et maius fuit d. 20. et h. 3. p. m. et d. 21. Nam mercurius omnis in bulbo thermometri erat d. 20. ab h. 11. p. m. vsque ad meridiem diei 21. Frigus antecedens d. 20. mane h. 9. = 231 et h. 3. d. 21. p. m. 138. h. 3. p. m. 208. Alt bar. erat die 20 mane h. 9. = 27. 47. et d. 21. h. 8. a. m. 27. 70. Coelum ſerenum cum tenui nebula vtroque die. Inſigniores porro frigoris gradus fuere d. 19 mane = 203 et h. 11. p. m. 211. d. 21. nocte 204.

Minimum frigus = 157. d. 27. h. 8. a. m. antec. = 163. ſequens 161. Altitudo bar. = 26. 80 antecedens 26. 90. et ſequens quoque 26. 90.

Halo circa lunam d. 25. ab h. 7 ad 12. coelo fere ſereno, altitudo bar. 26. 95. antecedens 26. 90. ſequens 27. 10.

Inter omnes totius huius anni obſeruationes maior altitudo barometrica non occurrit quam 28. 28. et nulla minor, quam 26. 55. Illa maxima Tiumeni Febr. 23. Haec minima Werchoturiae Septembris 2do eſt notata, vti ex comparatione patet.

Nam Tiumeni menſe Febr. erat Maxim. = 28. 28. Minim. 27. 24.

Menſa

Menſe Mart.	Turinii	Maxima $=$ 27. 85	Minima $=$	26. 95
Apr.	- - -	28. 05	- -	27. 00
Maio	- - -	27. 85	- -	27. 12
Iun.	- - -	27. 85	- -	27. 05
Iul.	Werchoturiae	27. 50	- -	26. 93
Aug.	- - -	27. 77	- -	26. 95
Sept.	- - -	27. 90	- -	26. 55
Oct.	- - -	27. 90	- -	26. 70 d. 24.
Nov.	- - -	28. 12	- -	26. 85
Dec.	Solikamii	27 73	- -	26. 80.

Differt igitur haec Maxima huius anni a Maxima Petropolitana $=$ 29. 12 adeoque $\frac{84}{100}$ ſiue lin. paris. 10 et quod excurrit, minor eſt.

Minima quoque maior eſt noſtra Minima Petropolitana quae eſt $=$ 26. 41 adeoque $\frac{14}{100}$ maior.

Differentiae et variationes altitudinum barometricarum et hic, vt alias, primis et vltimis anni menſibus maiores, quam mediis deprehenduntur, licet in diuerſis locis obſeruatae.

Nam variatio Menſis	Februarii	$=$ 1. 04
- - -	Martii	$=$ — 90
- - -	Aprilis	$=$ 1. 05
- - -	Maii	$=$ — 73
- - -	Iunii	$=$ — 80
- - -	Iulii	$=$ — 57
- - -	Auguſti	$=$ — 82
- - -	Sept.	$=$ 1. 35
- - -	Octobris	$=$ 1. 20
- - -	Nov.	$=$ 1. 27
- - -	Decembris	$=$ — 93.

Xx 2 Calor

Calor maximus fuit = 109 menſe Iunio Turinii obſeruatus; frigus maximum vltra 260 Solikamii Decembri notatus. Vti frigus maximum noſtrum Petropolitanum, quod eſt = 212 ſuperat plus quam 48 gradibus, ſic calor maximus a noſtro Petropolitano maximo, qui eſt = 97°. ſuperatur 12 gradibus.

Nam per antecedentia Tiumeni menſe Februario erat frigus Maximum = 182 Minimum = 146

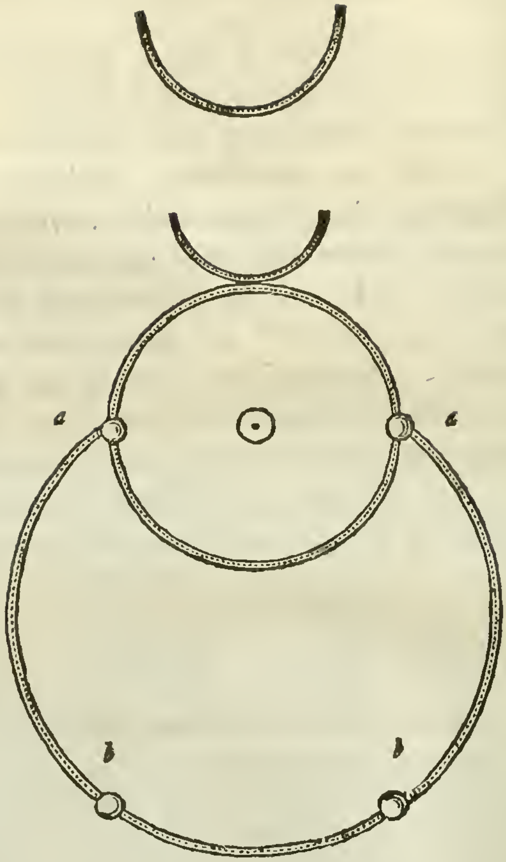
Turinii menſe	Martio	= 179	- -	= 135
- - -	Aprili	= 155	- -	= 119
- - -	Maio	= 151	- -	= 115½
- - -	Iunio	= 139	- -	= 109
Werchoturiae	Iulio	= 134	- -	= 111½
- - -	Auguſto	= 143	- -	= 113
- - -	Septembri	= 155	- -	= 119
- - -	Octobri	= 164½	- -	= 128½
- - -	Nouembri	= 185		
Solikamii	Decembri	= 260	et vltra	= 157
Turinii adhuc menſe Oct.		= 168.	- -	= 134.

Diuerſis igitur diebus frigus maximum et calor maximus contigit Turinii et Werchoturiae. Nam frigus maximum Turinii d. 28. Werchoturiae autem d. 21. Calor maximus Turinii d. 7 et 9. Werchoturiae d. 8. vti quoque gradus inter ſe differunt.

Deni-

Denique adiiciemus aliquot obſeruationes barometricas quae in itinere Werchoturia Solikamium in locis , Riphaeis montibus vicinis factae ſunt.

Decembris 4to ab h. 8. a. m. ad 2^{am} p. m. in vico Kyria ad amnem eiusdem nominis ex occidente Riphaeorum montium ſito altitudinem barometricam = 26. 20 obſeruauit *Mullerus* Vir Cl. Dec. 10 *Gmelinus* in Spaskoe Selo altitudinem bar. 26. 95 notauit , quae toto die ad mediam noctem eadem manebat. D. 11. in hibernaculo Podpaudenſi ab h. 4. a. m. ad 6^{tam} a. m. altitudo 26. 83. eſt deprehenſa. Eodem die ab h. 9 ad 11. a. m. in ſumma altitudine Raudae montis , ad quam via ducit , quae eſt tertia circiter totius montis altitudinis pars , fuit alt. bar. = 25. 32. In Kyria vico eodem die ab h. 4. p. m. ad h. 10. p. m. = 26. 02.



EPITOME OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM ANNO MDCCLXI. PETROPOLI INSTITVTARVM CVM CONSECTARIIS.

Auctore

I. A. BRAVNIO.

Eadem methodo in hac epitome obſeruationum meteorologicarum a nobis factarum vſi ſumus, ac in antecedentibus. Scilicet 1) exhibemus Altitudines Barometri maximas et minimas per ſingulos anni menſes cum differentiis 2) ſummos et infimos caloris gradus cum differentiis per ſingulos anni menſes. 3) Meteora potiora, quae ſingulis anni menſibus contigere.

Eadem quoque inſtrumenta ſunt adhibita in obſeruationibus barometricis et thermometricis. Nimirum barometrum ſimplex, et thermometrum ſcalae Delilianae. In obſeruationibus barometri numeri priores indicant pollices duodecimales pedis regii pariſienſis, numeri vero poſteriores partes centeſimas eiusdem pollicis. En ipſas obſeruationes.

Alti-

Altitudines Barometricae

per ſingulos menſes, ſummae et infimae cum differentiis, in altitudine ſupra flumen Neuam 15 ped. paris.

		Summa	Infima	Differentia
Ian.	18. h. 8. a. m.	28.65	26.98. d. 23. h. 7. a. m.	1.77
Febr.	28. h. 11. p. m.	28.60	26. 85. d. 15. 2. p. m.	1.75
Mart.	14. h. 2. p. m.	28.95	27. 72. d. 21. h. 6. a. m.	1.23
Apr.	14. h. 11. p. m.	28.55	27.65. d. 8. h. 6. a. m. et d. 18.	0.90
Maii	20. h. 7. a. m.	28.53	27. 75. d. 11. h. 2. p. m.	0.78
Iunii	18. 6. a. m.	28.35	27. 85. d. 13. h. 2.	0.50
Iulii	26. h. 2. p. m.	28. 35	27.55. d. 8. toto	0.80
Aug.	28. 11. p. m.	28. 39	27.90. d. 24 et 27	0. 49
Sept.	25. h. 6. a. m.	28.92	27.85. d. 1. h. 11. p. m.	1.07
Oct.	12. h. 11. p. m.	28.62	27. 50 d. 7. h. 2. p. m.	1. 12
Nov.	30. h. 2. p. m.	28.65	27. 30. d. 11. h. 8. a. m.	1.35
Dec.	9 toto die	28.65	27.75. d. 28. h. 9. a. m.	0.90.

Ergo maxima altitudo barometrica per totum annum fuit = 28. 95 Martii 14. et minima = 26.85 Febr. 15. Differentia igitur maxima = 2. 10.

Si haec altitudo maxima 28 pollicum et 95 partium centeſimarum pollicis pariſienſis ſiue $11\frac{1}{2}$ linearum conferatur cum maxima alias hic loci obſervata: patet hanc eſſe minorem partibus centeſimis pollicis 17. ſiue 2 lineis. Nam ex antecedentibus obſeruationibus conſtat ſummam barometri altitudinem nunc hic loci eſſe 29. 12. obſeruatam nobis 1757.

1757. Manet igitur haec ſumma, vti quoque inſima manet eadem 26. 41, quum huius anni altitudo minima = 26. 85 maior ſit hac partibus centeſimis 44. ſiue $4\frac{1}{2}$ lineis. Idem igitur quoque ſpatium variationis barometricae permanet, ſcilicet 2. 71 ſeu duorum pollicum $8\frac{1}{2}$ linearum, quum ſpatium variationum barometricarum huius anni = 2 10. ſit minus partibus centeſimis 61 ſiue paullo plus, quam 7 lineis. Ceterum ſummas et infimas altitudines barometri certis anni menſibus non euenire ex antecedentibus obſeruationibus iam ſatis conſtat.

Quod ſi differentiae menſtruae porro conſiderentur variationum barometri, et hoc anno lex illa in antecedentibus ſtabilita valet, ſecundum quam differentiae et variationes primis et vltimis menſibus, quam mediis ſunt maiores. Differentia menſis Decembris minor quidem ſolita eſt, ſed procul dubio hoc erit tribuendum frequentiori tranquillitati aëris, et ventis lenibus huius menſis vt ex ſequentibus patebit. Ceterum differentiam maximam menſe Ianuario, et minimam Auguſto eueniſſe, comparatio porro docet. Nam menſe Ianuario variatio fuit 1. 77 et Auguſto tantum $\frac{49}{100}$ ſiue fere 6 linearum. Reſtat vt more noſtro circumſtantias adiiciamus, ſub quibus maximae et minimae altitudines barometricae huius anni ſunt adnotatae.

Maxima igitur altitudo barometri 28. 95 Martii 14. h. 2. p. m. ſub ſequentibus circumſtantiis eſt notata; antecedens erat 28. 90 et ſequens 28. 93. Ventus erat S 2 et veſperi 00. antecedente et conſequente S 1 et 2 aliquot diebus. Calor 144 veſperi 154. Coelum ſerenum tam 3 diebus antecedentibus quam ſequentibus. Ceterum vt plurimum hoc menſe altitudines barometricae fuere inſignes. Altitudo proxime ad maximam huius menſis accedens fuit 28. 92, quae menſe Septembri d. 25. h. 6. a. m. eſt adnotata antecedente et ſequente tempeſtate ſerena; vento O leni, qui quoque antecedebat et ſequebatur.

Altitudo barometrica minima 26. 85 contigit Febrnarii 15. h. 2. p. m. Antecedens 27. 55, ſequens 27. 40 erat altitudo. Magna niuis copia hoc die cecidit Dies antecedens erat nubilus et nix quoque cecidit, die ſequenti coelum rurſus ſerenari coepit. Ventus erat N 2 antecedente SW 3 et 4 et ſequente W $2\frac{1}{2}$. Thermometrum monſtrabat 151, mane 153, veſperi 168. Die antecedenti mane 167, poſt meridiem 159 et veſperi 155. Hactenus de obſeruationibus barometricis, ſequitur vt progrediamur ad thermometricas. Frigoris et caloris gradus maximi et minimi per ſingulos menſes, ſunt qui ſequuntur cum differentiis.

Caloris

Caloris diminutiones.

	Maximae		Minimae		Differentiae
Ianu. 3 h. 8. a. m.	190	-	145. d. 13. h. 2. p. m.	-	45
Febr. 2. h. 8. a. m.	190	-	144. d. 28. h. 2. p. m.	-	46
Mart. 24. h. 5. a. m.	168	-	130. d. 31. h. 2. p. m.	-	38
Apr. 9. h. 11. p. m.	160	-	120. d. 25. h. 2. p. m.	-	40
Maii 12. h. 11. p. m.	148	-	110. d. 26. h. 2. p. m.	-	38
Iun. 19. h. 3. a. m.	138	-	105. d. 23. h. 2. p. m.	-	33
Iulii 12. h. 11. p. m.	139	-	106. d. 4. h. 2. p. m.	-	33
Aug. 21. h. 5. a. m.	136	-	106. d. 4. h. 2. p m.	-	30
Sept. 20. h. 11. p. m.	154	-	120. d. 1. h. 2. p. m.	-	34
Oct. 17. h. 7 a. m.	162	-	132. d. 10. h. 2. p. m.	-	30
Nov. 30. h. 8. a. m.	183	-	141. d. 5. h. 11. p. m.	-	42
Dec. 10. h. 11. p. m.	193	-	149. d. 29 et 30. h. 2. p. m.	-	44.

Ergo ſrigus maximum per totum annum fuit = 193
et calor maximus = 105
Maxima igitur differentia = 88.

Maximum ſrigus 192 huius anni minus eſt maximo alias hic obſeruato 19 gradibus. Nam ab anno 1759. frigus maximum hic loci eſt = 212, vt ex obſeruationibus noſtris anni dicti patet. Ergo manet hic gradus frigoris adhuc maximus 212. Calor maximus 105 minor quoque eſt calore maximo alias hic obſeruato 8 gradibus. Nam 1757. notauimus gradum caloris maximum 97. id quod ex obſeruationibus huius anni conſpicitur, hinc et gradus 97 caloris maximus gradus hic loci manet,

vti quoque differentia omnium maxima permanet 115.

Si differentiae et variationes caloris menſtruae conſiderentur; patet maximas fuiſſe menſe Ianuario et Decembri, illo 45 hoc 44. minimas autem menſibus Auguſto et Octobri in vtroque ſcilicet = 30. Ceterum has caloris variationes, certam legem non ſequi, vt variationes barometri, ex antecedentibus obſeruationibus iam ſatis intellig tur vti differentia per diem nonnumquam = 00, id quod tamen rariſſime accidit, ſic ſaepius tempore aeſtatis aeque ac hiemis ea aſſurgit ad 24 et amplius praecipue ab ortu ſolis ad h. 2. p. m. circiter quo interuallo, ceteris paribus termini caloris minimi et maximi continentur. Minimus enim calor eſt circa ortum ſolis, inde creſcit ad h. 2. p. m. circiter hic loci, decreſcere dein incipit ad ortum ſolis ſi ſcilicet reliqua ſint paria et tempeſtatis mutationes non eueniant.

Maxima differentia diurna hoc anno fuit = 24 Iunii 19. Nam mane circa ortum ſolis thermometrum monſtrabat 138 et h. 2. p. m. 114. Ceterum per ſe intelligitur differentias caloris magnas quoque oriri debere in mutationibus tempeſtatis ſubitis, quae hic loci inter 24 horas ſatis ſunt frequentes, easque generatim maxime inaequales. Ordinarie differentiae diurnae hieme hic loci ſecundum

dum obſeruationes noſtras quam aeſtate minores eſſe ſolent.

Conſiderandae et nunc porro ſunt circumſtantiae ſub quibus frigus maximum et calor maximus euenere hoc anno, vt pateat et hic, non ſub iisdem, ſed diuerſiſſimis haec accidere ſolere, vti quoque hi termini caloris maximi et minimi non iisdem menſibus contingere ſolent.

Maximum igitur frigus huius anni 193. Decembris 10. h. 11. p. m. eſt adnotatum, vento plane ſilente, tempeſtate ſerena, luce boreali inſigni, barometro 28. 44. monſtrante. Die antecedenti ventus quoque erat co. vti quoque ſequenti. Veſperi 28. 53. diei antecedenti et ſequenti veſperi 28. 35. erat altitudo barometrica. Dies antecedens et ſequens fuit nubilus.

Maximus calor 105. Iunii 23. h. 2. p. m. accidit, vento S 2 antecedente oo et ſequente Sg O 2. coelo e longinquo tonante, ante meridiem ſereno, barometro 27. 98 antea 27. 95, poſtea 28. 02. Antecedens calor 122 et ſequens 120.

Conſideratis caloris variationibus huius anni, progrediendum nobis eſt ad meteora proponenda, quae ſingulis anni menſibus nobis ſunt adnotata.

Menſis Ianuarius. Ad ventos quod attinet, vehementiores fuere hoc menſe d. 13. W 3 et 4.

d. 15 et 16. W 3 et 4. Ventus W regnauit ſcilicet per 20. dies flauit, reliqui ex diuerſis plagis. Altitudo aquae niuis liquefactae = 16 lin. ſiue 1. pollici parienſi et 4 lin.

Dies ſereni fuere 9. d. 1. 2. 3. 6. 8. 9. 10. 15. 25. reltqui vel nubili vel niuoſi.

Februarius. Venti vt plurimum ex occidente et meridie ſpirarunt, inter quos vehementiores fuere d. 6. W 3 et 4. d. 14. SW 3 et 4. d. 16. W 3. d. 22. W 3 et 4.

Dies ſereni erant 10. Nempe d. 1. 2. 6. 12. 13. 16. 17. 19. 24. 28. d. 25. pluebat.

Altitudo aquae 1 poll. 2 lin.

Nebula denſa a. m. d. 2.

Aurorae boreales 3. fuere d. 15. completa cum radiis eubratis coloratis, praecipue rubris. Placida et incompleta d. 16. Rurſus inſignis et completa d. 17.

Martius. Venti fere omnes hoc menſe fuere lenes, et ſaepius quoque tranquillitas. Ventus S potiſſimum ſpirauit. Vehementiores tantum d. 19. W 3 et nocte inter 20 et 21. W 3 et 4.

Plerique dies erant ſereni, numerabantur tantum 6 non ſereni. Scilicet 4^{tus} nubilus et 9. dies 19. pluuius cum inter mixta niue; d. 21. copioſa nix cecidit. Dies 23. 25. 26. nubili.

Nebula

Nebula d. 10. a. m.

Altitudo aquae 3 lin. tantum.

Aprilis. Venti hoc menſe, vt ſolet, admodum variabiles fuerunt, omnes tamen fere lenes, tantum d. 6. nocte, et d. 17. p. m. W 3 et 4. breuis durationis fuere.

Dies ſereni vltra menſem dimidium, ſcilicet 19. d. 2. 3. 7. 10. 12. 13. 14. 15. 16. 18. 19. 20. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. iidem ſatis amoeni.

Grando cecidit d. 17. 18.

Altitudo aquae 1 poll. 6. lin.

Nebula d. 23. a. m.

Maius. Venti et hoc menſe fuere lenes, et frequenter ventus ſiluit, tantum W 3 et 4. d. 15. Ceterum ventus O potiſſimum ſpirauit.

Pluuia cecidit nocte inter 8 et 9. = 1 poll. d. 12. 7½ lin. porro d. 30 et 31. cuius altitudo = 8. lin. Ergo pluuiae altitudo totius menſis 2 poll. 3½ lin. Ceterum dies plerique ſereni ſcil. 21 nominatim 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 10. 13. 15. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27.

Iunius. Venti omnes nullo excepto hoc menſe fuere lenes graduum 1 et 2. ſaepius quoque 00. Venti O et W potiſſimum ſpirarunt.

Dies

Dies ſereni fuere plerique, exceptis 6. nominatim d. 10. 13. 14 15. 23. 30. qui fuerunt nubili, vel parum pluuii, coelo tonante.

Tonitrua hoc menſe euenerunt 5. Primum omnium d. 2. h. 4. p. m. 2^{dum} d. 12, quod prope acceſſit 3^{tium} d. 14. 4^{tum} d. 22. tonuit tantum e longinquo, denique 5^{tum} d. 30. quod quoque non prope acceſſit.

D. 24. veſperi valde fulgurauit.

Altitudo aquae pluuiae admodum exigua trium tantum linearum.

Iulius. Et hoc menſe venti fere omnes fuere lenes, excepto d. 9. quo W 3 et 4. ortus eſt qui fere per totum diem ſequentem durauit. Ceterum ventus ex plaga orientali potiſſimum ſpirauit.

Dies ſereni 13. nominatim 2. 3. 4. 13. 14. 19. 22. 23. 24. 27. 28. 29. 31.

Tempeſtates fulmineae et hoc menſe, vti praecedenti fuere 5. d. 1. 4. 5. 6. 9. Illa, quae d. 4. euenit, feriit templum St. Andreae, quod combuſtum eſt. Pluuia cecidit d. 1. cuius altitudo = 5 lin. d. 6. = 3 lin. d. 7. 3. lin. d. 10. 8 l. d. 11. = 3 lin. d. 16. = $4\frac{1}{2}$ lin. d. 17. = $2\frac{1}{2}$ lin. Ergo tota altitudo menſtrua = 29 lin. 2 poll. paris. et 5. lin.

Augu-

Auguſtus. Ventus W potiſſimum flauit, ſcilicet per 20. dies, inter quos duo fuere vehementiores d. 13 et 16. W 3 et 4.

Dies ſereni 18. nominatim 1. 2. 3. 4. 6. 9. 10. 12. 13. 14. 20. 21. 22. 23. 25. 26. 28. 30. et iidem quoque ſat amoeni. Altitudo aequae pluuiae 2 poll. $6\frac{1}{5}$ lin.

Tonitrua erant quatuor d. 5. e longinquo, itidem d. 7. 16. 24.

Fulgurauit nocte d. 24. 26. 29.

Nebula d. 3 et 7. a. m.

Grando cecidit d. 5. cuius magnitudo piſo maiori aequalis, et d. 17. Magnitudo nuci auellanae fere aqualis fuit.

Aurorae boreales d. 18. quae erat placida, porro d. 30. h. 2. a. m. obſeruata, et h. 10. p. m. quae per totam noctem durabat, et completa cum radiis ſurgentibus coloratis maxime rubris.

September. Hoc menſe venti admodum variabiles, maiorem tamen partem S et O. inter quos nullus vehementior, quod raro contingit. Saepius quoque ventus ſilebat.

Dies plerique nubili et pluuii, ita vt tantum ſex numerarentur ſereni d. 4. 5. 6. 9. 15. 20

Altitudo aquae = 3 poll. 4. lin.

Prima nix cecidit iam d. 18. et pruina erat d. 21. 26. 27.

Lucis borealis veſtigia d. 14. h. 11. p. m. die autem ſequenti 15. h. 10. p. m. completa conſpiciebatur.

October. Venti huius menſis quoque, vti menſis antecedentis, variabiles, et ex diuerſis plagis ſpirantes erant, maxime tamen flauit ventus S dein O. Inter hos ſolus d. 23. erat vehemens, nimirum SW 3. Plerique dies quoque nubili, pluvii et niuoſi, ita vt 4 tantum ſint excipiendi, qui erant ſereni, ſcil. d. 2. 13 17. 20.

Altitudo aquae = 1. poll 2 lin.

Nebula d. 25. h. 8. a. m. et d. 24. h. 5. p. m.

Aurorae boreales duae, altera d. 11. altera d. 20. vtraque imperfecta et placida.

Nouember. Venti hoc menſe admodum variabiles, interdum tamen ventus nullus. Vehementiores fuere d. 9. W 3 et 4. d. 16. S 3 et 4. vterque durationis breuis.

Dies ſereni 8. Nimirum d. 12. 13. 21. 22. 24. 26. 29. 30. plerique non admodum frigidi.

Nebula d. 3. 4. 20.

Altitudo aquae = 1 poll.

Decem-

December. Venti admodum variabiles, inter quos d. 25. ſolus erat vehementior S 3 breuis durationis, non infrequenter quoque ventus ſilens.

Dies ſereni 7. d. 1. 2. 3. 4. 10. 20. 21. plurimi frigidiores.

Altitudo aquae = 2 poll. 5. lin.

Nebula d. 10. 11. 17. a. m.

Duae aurorae boreales et hoc menſe mihi ſunt obſeruatae, altera d. 10. d. 21. altera. Illa erat perfecta, haec autem imperfecta.

Ergo, vt ex hactenus dictis patet per totum annum venti vehementiores ſpirarunt 20. tres menſe Ianuario, ſcilicet d. 13. W 3 et 4 d. 15 et 16. W 3 et 4. Februario quatuor d. 6. W 3 et 4. d. 14. SW 3 et 4. d. 16. W 3 d. 22. W 3 et 4.

Martio. Duo d. 19. W 3. Nocte inter 20 et 21. W 3 et 4.

Aprili duo d. 6. nocte et 17. p. m. W 3 et 4.

Maio 1. d. 15. W 3 et 4. Iunio nullus. Iulio, duo veſperi d. 9 et 10. fere per totum diem. Auguſto duo d. 13 et 16. W 3 et 4. Septembri 00. Octobri vnus d. 23. SW 3. Nouembri duo d. 9. W 3 et 4. d. 16. S 3 et 4. Decembri vnus d. 25. S 3. Omnes fere ex occidente, vt hic ventus hic loci quoque per annum vt plurimum regnare h. e. maiorem partem ſpirare ſolet.

Menſe Ianuario et Februario plurimi venti vehementiores ſpirarunt, illo ſcil. 3 et hoc 4. Pauciſſimi aut potius nulli, Iunio et Septembri.

Dies ſereni per totum annum, mixtis incluſis erant 162.

Altitudo aquae = 19 poll. 8. lin. Nimirum Ianuario 1 poll. 4. lin. Febr. 1 poll. 2 lin. Mart. 3 lin. Apr. $1''$. $6'''$. Maio $2''$. $3\frac{1}{2}'''$. Iunio $3'''$. Iulio $2''$. $5'''$. Auguſto $2''$. $6\frac{1}{2}'''$. Sept. $3''$. $4'''$ Oct. $1''$. $2'''$. Nov. $1''$. Decembri $2''$. $5'''$. Ergo menſe Septembri pluebat maxime ſcil. 3 poll. 4 lin. e contrario minime Martio et Iunio nempe tantum 3 lin. Ceterum notandum hanc aquae altitudinem ſolito eſſe minorem.

Tempeſtates fulmineae et tonitrua hoc anno fuere numero 14. Scilicet 5. Iunio. Primum omnium d. 2. porro d. 12. 14. 22. 30. Iulio quoque quinque d. 1. 4. 5. 6. 9.

Menſe Auguſto quatuor d. 5. 7. 16. 24. Ergo primum Iunii 2do et vltimum Auguſti 24.

Illa tempeſtas fulminea, quae Iulii 4to euenit, memorabilis, eſt quod templum St. Andreae fulmine eius tactum conflagrauit.

Ceterum adhuc circa tempeſtates fulmineas notandum eſt, et hoc anno confirmari, quod in antecedentibus monuimus, eas ſcilicet requirere certos terminos altitudinum barometricarum et thermome-

tricarum, vt euenire queant, et prope accedere. In prima tempeſtate Iunii 2. Altitudo barometri maior quidem fuit, quam vt tonare ſoleat, ſed notandum tonitru tantum aliquoties e longinquo eſſe auditum. Illa quae Iunii 12. accidit, proxime acceſſit et altitudo barometri tantum 27. 90. erat. therm. 120. h. 2. p. m. 117. Interim et hoc notandum tempeſtatem fulmineam non neceſſario prope accedere debere, ſi altitudo barometri infra terminum eſt, vti e longinquo tantum tonuit Iunii 22. licet altitudo barometrica eſſet tantum 27. 92 et thermometrum h. 2. p. m. 117. adeoque omnes conditiones adeſſent, vt propius accedere potuiſſet. Tempeſtas Iulii 4to, quae templum St. Andreae incendit, euenit ſub altitudine barometrica 27. 94 et thermometrica 117. ſed h. 2. p. m. 106. Tonitrua Auguſti 5. audita quidem ſunt ſub altitudine barometrica 28. 23. adeoque multo ſupra terminum, quo tonare poſſit. Sed tonitru tanquam murmur e longinquo tantum eſt auditum. Idem notandum quoque de illa, quae Auguſti 7. ſub altitudine bar. 28. 19. euenit, et d. 17. altitudine bar. 28. 20. Sed hi termini altitudinum barometricarum et thermometricarum, inter quos hic loci et forſitan etiam alibi tonitrua fieri poſſunt et ſolent, paullo adcuratius figendi et determinandi ſunt. Nimirum ſi Mercurius in barometro in adſcendendo verſatur, et adſcendere pergit, incipiente et durante tempeſta-

 te,

te, terminus vltra quem tonitru non euenit eſt circiter 28 poll. pariſienſes et $\frac{1}{2}$ lin. omnia infra hunc terminum gradu caloris conuenienti accidere ſolent, ſi propius accedant. Secus ſi barometrum in deſcendendo verſatur et deſcendere pergit, tunc enim ſupra terminum adſignatum incipere poteſt, deſcendente interim Mercurio ad terminum et infra eum. Omnia ſunt intelligenda de tempeſtate fulminea, quae propius accedere ſolet. Terminus caloris vltra quem tonitrua non fiunt eſt 130 et terminus infra quem euenire non ſolent eſt 112 dum incipiunt. Calor antecedens multo maior 105 et 106. eſſe poteſt. Si quas exceptiones deprehenderimus, in poſterum indicabimus.

Aurorae boreales per totum annum mihi notatae ſunt 12. Scilicet menſe Februario 3. d. 15. completa, d. 16. placida et imperfecta d. 17. rurſus perfecta. Menſe Auguſto 3. Nimirum d. 18. imperfecta d. 30. h. 2. a. m. completa et nocte h. 10. obſeruata itidem completa. Septembri 2. d. 14. veſtigia tantum lucis borealis d 15. autem perfecta. Menſe Octobri rurſus 2. d. 11. altera et altera d. 20. vtraque placida et imperfecta. Denique 2. menſe Decembri d. 10 et 21. Illa perfecta, haec imperfecta.

Nebulae erant 13. ſcilic. Februarii 2. a. m. Martii 10. a. m. Aprilis 23. a. m Auguſti 3 et 7. Octobris 24. h. 5. p. m. et 25. a. m. h. 8. Nov.

Nov. 3. 4. 20. a. m. Decembris 10. 11. 17. a. m.

Grando cecidit hoc anno quater. Nimirum menſe Aprili d. 17 et 18 et Auguſto d. 5 et 17. Grando huius menſis ſat magna, quae d. 5. cecidit aequalis fere fuit nuci auellanae, ſaltim quaedam, quae d. 17. inſtar piſi maioris, coelo e longinquo tonante, ſequente pluuia ingenti. Aprilis 16. nix vltima cecidit, et d. 23. vltima congelatio. In adſignanda vltima congelatione cautio eſt adhibenda. Nam aqua in ſuperficie terreſtri propter frigus adhuc durans, congelari ſolet, quamuis aqua aëri libero expoſita non geletur. De congelatione aquae aëri libero expoſitae hic ſermo eſt, adeoque de puncto congelationis ſeu gradu 150, quem thermometrum noſtrum monſtrare debet in aëre.

Prima nix cecidit rurſus Septembris 18. et congelatio hoc die quoque prima fuit, adeoque ab vltima congelatione ad primam interuallum fere eſt 5 menſium, quodſi pro aeſtate reputetur, hiems fuit 7 menſium. Glaciei Nevae fluminis craſſities erat maxima = 28 poll. lond. fluuius a glacie liberatus Apr. 4. h. 5. p. m. et rurſus glacie obductus Nov. 16. h. 7. a. m.

OBSER-

OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM ANNI MDCCLXII. ST. V. EPITOME, CVM CONSECTARIIS INDE DEDVCTIS.

Auctore

I. A. BRAVNIO.

Ex obſeruationibus ſuperioribus a me communicatis Methodus mea ſatis patet. Exhibemus ſcilicet primum ſummas et infimas altitudines barometricas per ſingulos anni menſes cum earum differentiis, deinde Maximos et Minimos caloris gradus itidem per ſingulos anni menſes cum earum differentiis. In obſeruationibus barometricis vtimur Barometro ſimplici debitae diametri ſcilicet fere trium linearum, iuxta quod adhuc tria alia collocata habemus, vt ſi qua differentia altitudinis occurrat, ſpectare ſimul queamus. In obſeruationibus thermometricis adhibemus ſcalam Delilianam ſatis iam notam. Numeros priores ante punctum in altitudinibus barometri notatis ſignificare pollices pariſienſes, duodecimales; poſteriores poſt punctum, eorum partes centeſimas, notius iam eſt, quam vt monere neceſſe ſit. Denique ſequuntur ipſa Meteora per ſingulos anni menſes, et conſiderationes

rationes cum conſectariis, potiſſimum ex variis comparationibus reſultantes.

His paucis praemiſſis ſtatim ad ipſas obſeruationes exhibendas progredimur. Repraeſentabimus autem primum, vt alias, barometricas, in altitudine 15 pedum pariſienſium circiter ſupra Neuam flumen factas. En ipſas,

Altitudines Barometricae

ſummae et infimae cum differentiis per ſingulos menſes totius anni.

Menſis	Maxima		Minima	Diff.
Ian. 22. h. 11. p. m.	28. 66	-	27. 10. d. 27.	- 1.56
Febr. 18.	28. 48	-	27. 25. d. 10 et 23	- 1.23
Mart. 28. h. 2. p. m.	28. 73	-	27. 35. d. 18. h. 2. p. m.	- 1.38
Apr. 10. h. 2. p. m.	28. 40	-	27. 65. d. 6. h. 2. p. m.	- 0.75
Maii 13. h. 6 a. m.	28. 45	-	27. 68. d. 16	- 0.77
Iun. 7. h. 2. p. m.	28. 27	-	27. 81. d. 21	- 0.46
Iul. 7. h. 2. p. m.	28. 35	-	27. 40. d. 14. h. 7. a. m.	- 0.95
Aug. 1. h. 6. a. m.	28. 27	-	27. 35. d. 9. h. 11. p. m.	- 0.92
Sept. 6. h. 7.	28. 55	-	27. 65. d. 27. h. 11. p. m.	- 0.90
Oct. 7	28. 36	-	27. 15. d. 28. h. 2. a. m.	- 1.21
Nov. 18. h. 11. p. m.	28. 45	-	27. 47. d. 23. h. 8. a. m.	- 0.98
Dec. 15. h 2. p. m.	29. 03	-	27. 53. d. 10. h. 9. a. m.	- 1.50

Ergo maxima totius anni = 29. 03. minima 27. 10 differentia et variatio 1. 93. Ergo media altitudo 28. 06½.

Si differentiae altitudinum barometricarum vel variationes Mercurii menſtruae conſiderantur; adparet, et hoc anno variationes primis et vltimis anni menſibus eſſe maiores, quam mediis.

Poteſt igitur haec lex per inductionem ſufficientem in antecedentibus ſtabil tam pro vniuerſali omnino haberi. Minima variatio fuit menſe Iunio $\frac{46}{100}$ pollicis pariſienſis Maxima 1. 56 menſe Ianuario.

Altitudo maxima 29. 03 ſatis quidem per ſe magna eſt, non tamen adaequat maximam alias hic obſeruatam, quae eſt = 29. 12. vt ex antecedentibus obſeruationibus patet. Minor igitur eſt $\frac{9}{100}$ ſiue 1 lin. et quod excurr t. Contigit autem haec Dec. 15. h. 2. p. m. ſub circumſtantiis ſequentibus. Antecedens obſeruatio erat = 28. 98. h. 8. a. m. et ſequens h. 10. p. m. 28. 97. Ventus nullus ſpirauit, antecedebat leniſſimus S et ſequebatur lenis W. Thermometrum monſtrabat 183. dies erat ſerenus, vti quoque aliquot antecedentes, ſequentes autem erant nubili. Nocte antecedenti lux borealis inſignis erat cum radiis euibratis albis.

Minima 27. 10 accidit menſe Ianuario d. 27. quae per totum diem eſt obſeruata. Antecedens obſeruatio erat = 27. 23. et ſequens 27. 17. Calor erat 151 et 154. mane ventus W qui mane paullo fortior, deinde vero lenis euadebat; antecedebat

W et

W et ſequebatur quoque. Dies erat nubilus, vti quoque dies multi antecedentes, ſequebantur autem aliquot ſereni. Minima alias hic obſeruata ſecundum obſeruationes antecedentes 26. 41. manet adhuc minima, minima enim huius anni maior eſt illa $\frac{60}{100}$ ſiue $\frac{1}{2}$'' $2\frac{1}{4}$'''. Neque quidquam eſt mutandum in ſpatio variationum barometricarum, quod manet = 2. 71. ſiue 2''. $8\frac{1}{2}$''' fere. Alias iam conſtat ſpatium variationum barometricarum in locis borealioribus, quam in minus borealibus, eſſe maius. Haec hactenus de Barometricis, venimus ad Thermometrica. Infimi et ſummi caloris gradus per ſingulos anni menſes cum differentiis fuere, qui ſequuntur.

Caloris Diminutio.

	Maxima.		Minima.	Differentia.
Ian. 31 mane h. 8	169	-	148. d. 5	- 21
Febr. 26. h. 7. a. m.	175	-	145. d. 7 et 13. h. 2. p. m.	- 30
Mart. 20. h. 7 a m.	176	-	137. d 21. h. 7 p. m.	- 39
Apr. 7 h 6. a. m.	160	-	113 d. 18 et 19 h. 2. p. m.	- 47
Maii 2. h. 6. a. m.	148	-	110. d 28. h. 2. p. m.	- 38
Iun. 28. h. 11 p m.	135	-	109. d. 18 h 2. p m.	- 26
Iul. 2. h. 4. a m.	140	-	110. d. 10 h. 8. a. m.	- 30
Aug. 28. h. 6. a. m.	146	-	118. d. 1. h. 2. p m.	- 28
Sept. 26. h. 7. a m.	152	-	130 d. 1. h. 3. p. m.	- 22
Oct. 15. h. 7. a. m.	170	-	141. d. 24. h. 2. p. m.	- 29
Nov. 19. h 8 a. m.	167	-	138. d. 4.	- 29
Dec. 13. h. 8. a, m.	195	-	147. d. 4. h. 2. p. m.	- 48.

Frigus maximum $=195$ et calor maximus 109.

Hinc variatio maxima $=86°$. Et variatio maxima menſtrua 48. et minima 21 grad. Calor medius, ſi ſumma maximi et minimi gradus diuidatur p. 2. vel medium arithmeticum capiatur inter ſummum et infimum caloris gradum $=152$. qui parum differt ab illo medio, quod oritur, ſi ſumma caloris gradu diuidatur per numerum obſeruationum, vti alias fieri ſolet.

Frigus maximum huius anni, quod Dec. 13. h. 8. a. m. contigit, circumſtantiis ſequentibus fuit comitatum. Ventus S 1. vti quoque die antecedenti, et ſequenti. Tempus ſerenum et antecedenti et ſequenti die. Antecedens obſeruatio $=193$. ſequens p. m. 189. et veſperi rurſus 193. Barometrum 28. 65. quod ſequentibus diebus adſcendere perrexit ad 29. 03. ſummam huius anni altitudinem barometricam. Hoc frigus maximum non ſuperat frigus maximum alias hic obſeruatum $=212$. Manet igitur hic frigoris gradus adhuc maximus, dum 17°. maior eſt maximo, qui hoc anno eſt obſervatus.

Calor maximus huius anni $=109$. qui accidit Iunii 18. h. 2. p. m. comitatus fuit circumſtantiis ſequentibus. Ventus fuit W debilis, ſequentibus quoque diebus, antecedente N et O debili

bili, et dies ſerenus, vti quoque aliquot antecedentes et conſequentes. Barometrum 28. 08. quod nunc deſcendere coepit vsque ad 27 83.

Ceterum hic calor maximus huius anni, quum non exaequet gradum caloris maximum 97. alias hic obſeruatum; manet hic ad hoc tempus maximus. Et ſpatium quoque variationum thermometricarum manet inuariatum = 115 graduum.

Sed de Calore et Frigore ſatis, veniendum eſt ad Meteora, quae ſingulis anni menſibus contigerunt. Sunt autem ea, quae ſequuntur.

Menſis Ianuarius.

Omnes dies nubili et niuoſi fuere praeter 29. qui clarus fuit.

Venti vehementiores fuere hoc menſe 4. d. 10. W 3. d. 24. W 3 et 4. d. 25. W 3. d. 26. W 3 et 4. Ceterum ventus ex occidente et meridie ſolum ſpirauit, W per dies 20. et S per dies 11. d. 2. 3. 6. 7. 15. 17. 18. 19. 30. 31.

Altitudo aquae ex niue liquefacta = 4 lin. par.

Nebula denſa d. 12. a. m.

Lux borealis placida d. 12.

Februarius.

Plerique dies et hoc menſe fuere nubili et niuoſi, 9 tamen inter ſerenos numerari poſſunt.

Nimirum dies 11. 12. 14. 15. 16. 19. 24. 25. 27.

Ventus vehemens vnus d. 6. nocte S3 et 4.

Ceterum potiſſimum ſpirauit S. ſcilicet per 16. dies, vt 1. 2. 3. 4. 5. 6. 8. 9. 10. 12. 13. 14. 23. 26. 27. 28.

Nebula denſa d. 19. a. m. h. 7.

Altitudo aquae pluuiae ſiue ex niue liquefacta = poll. 1. lin. 1.

Martius.

Serenitas fuit coeli per 17. dies, vt 3. 6. 8. 11. 12. 13. 20. 21. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. Ventus vehementior d. 21. S3. Ceterum ex occidente plurimum ſpirauit ventus, nimirum per dies 15. vt d. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 15. 16. 19. 27. 28. 29. 30. 31.

Nebula mane d. 20.

Aquae pluuiae altitudo 5 lin.

Aurorae boreales 5. vt d. 3. 4. 5. 31. quae placidae, et incompletae, d. 30. autem inſignis et completa adparuit.

Aprilis.

Coelum amplius dimidia menſis parte fuit ſerenum, ſcilicet per 18. dies, vt 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 12. 14. 15. 17. 18. 19. 20. 21. 22.

Venti

Venti vehementiores 3. vt d. 2. W 3 et 4. d. 4. W 3. d. 11. W 2 et 3. Regnauit W vtpote qui per 20. dies ſpirauit, nimirum d. 1. 2. 4. 5. 6. 7. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 23. 26. 27. 28.

Nebula denſa d. 12. a. m.

Altitudo aquae pluuiae $7\frac{1}{2}'''$.

Lux borealis ter conſpecta eſt, vt d. 7. 16. 21. placida et debilis ſemper.

Maius.

Maior dierum huius menſis pars fuit ſerena videlicet 19. vt. 1. 3. 6. 7. 8. 9. 10. 13. 14. 18. 21. 24. 25. 25. 27. 28. 29. 30. 31.

Venti vehementiores 3. vt d. 8. W 3. d. 11. NW 3 d. 14. W 3 et 4. Ceterum et hoc menſe W plurimum flauit, ſcilicet per 16. dies, vt 1. 2. 4. 5. 8. 9. 10. 11. 14. 18. 20. 21. 24. 27. 2[illegible]. 30.

Nebula d. 3. a. m.

Grandinauit d. 16.

Altitudo aquae pluuiae $1''$. $2'''$.

Iunius.

Et hic menſis ſatis ſerenus fuit, cum 17. dies in ſerenis numerari potuerint, vt 1. 2. 3. 5.

7. 11.

7. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 29. 30.

Tonitrua 3. d. 1. quod fuit primum, d. 2 et 6. omnia e longinquo tantum.

Altitudo aquae pluuiae = 1. poll.

Ventus vnicus vehemens d. 26. W 3 et 4.

Ceterum ventus W et hoc menſe regnauit, dum flauit per dies 22. vt 1. 2. 4. 5. 6. 7. 10. 12. 13. 14. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 26. 27. 29. 30.

Iulius.

Vndecim tantum dies per hunc menſem inter ſerenos numerari poſſunt, videlicet 5. 6. 7. 8. 9. 11. 17. 21. 26. 27. 29.

Venti vehementiores 3. vt d. 2. N 2 et 3. d. 20. W 3 et 4. d. 21. W 2 et 3. Ventus W maxime regnauit, nimirum per dies 26. vt 3. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 29. 30. 31.

Tempeſtates fulmineae 4. d. 9. 10. 12. 30. quae vltima, et hoc anno vltima fuit.

Altitudo aquae pluuiae = 4 pol. 2 l.

Grando cecidit ter d. 3. 12. 23.

Auguſtus.

Numerus dierum ſerenorum idem hoc menſe fuit, qui antecedenti nempe 11. d. 1. 2. 3. 7. 13. 14. 15. 20. 21. 24. 28.

Venti

Venti fortiores 3. d. 6. SW 2 et 3. d. 9 et 10. W 3 et 4. cum aqua Neuae altiore. Ventus ex occidente et nunc plurimum ſpirauit, nimirum per dies 18. d. 1. 2. 3. 7. 8. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 18. 22. 23. 24. 30. 31.

Altitudo aquae pluuiae $= 3''. 11'''$.

Prima pruina d. 27, et 29. ningebat paullum.

Lux bor. incompleta d. 20 et d. 1 et 2. veſtigia lucis bor. obſeruabantur.

September.

Dies tantum octo ſunt huius menſis, qui inter ſerenos locum inueniunt, vt 4. 6. 7. 14. 15. 19. 20. 22.

Venti vehementiores 3. et hoc menſe d. 27. O 3 et 4. d. 28. W 3. d. 18. W 3. Ceterum venti fuere variabiles, W flauit per dies 12. d. 1. 2. 3. 4. 5. 9. 11. 18. 19. 20. 21. 22. S autem per 6. dies d. 15. 16. 17. 28. 29. 30. O. quoque per 6. dies d. 8. 13. 14. 23. 24. 27. N. denique etiam per ſes diex 6. 7. 10. 12. 25. 26.

Altitudo aquae pluuiae 3. poll. 7. lin.

Pruina copioſa d. 5. Pruina et Congelatio ſat fortis d. 15. Nix copioſa d. 27. cecidit.

Lux borealis cum columnis ſurgentibus fere completa d. 14. et veſtigia lucis borealis d. 4 et 5. conſpiciebantur.

October.

Dies ſereni decreſcunt; ſex enim tantum dies numerari poſſunt ſereni, vt 7. 11. 14. 15. 20. 21.

Fortiores venti 4. d. 16. S3. d. 17. SW3 et 4. d. 22. W2 et 3. d. 24. W3 et 4. W. potiſſimum ſpirauit, ſcilicet per dies 21. vt 1. 2. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 17. 18. 19. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30.

Altitudo aquae pluuiae 1″. 1‴.

Aqua Neuae altior d. 24. 28. 29. ita vt duas et tres d. 29. vlnas ruſſicas (Arſchinen) ſupra altitudinem ordinariam fuerit obſeruata. Eſt autem haec vlna = 28 poll. lond.

Grandinauit d. 16. et glacies iam d. 15. in flumine natare coepit, quamuis demum Nov. 19. glacie coierit Neua flumen.

Lux borealis placida d. 8. et veſtigia d. 3.

Nouember.

Quatuor tantum dies fuere hoc menſe ſereni, d. 3. 11. 27. 29.

Venti vehementes erant 7. d. 6. nocte W2 et 3. d. 7. nocte W2 et 3. d. 9 et 10. W3 et 4, cum aqua fluminis altiore, vt menſe praecedenti: d. 11. W2 et 3. d. 20. W2 et 3. d. 26. W2 et 3. W flauit et hoc menſe plurimum, nempe per

per 15. dies d. 4. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 20. 26. 28. 29. 30. S ſpirauit per dies 5. O per 4. N per 6. dies.

Altitudo aquae pluuiae = 1″. 8‴.

Aurorae boreales tres debiles d. 5. 8. 12.

December.

Hic menſis 9. dies ſerenos habebat, vt 3. 5. 6. 12. 13. 14. 15. 22. 23.

Venti vehementiores 5. vt d. 3 et 4. W 3 et 4. d. 8. nocte W 3 et 4. d. 9. W 3 et 4. d. 31. W 2 et 3. Ceterum et hoc menſe W regnavit, ſpirauit enim per dies 23. nominatim d. 1. 2. 3. 4. 8. 9. 10. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 26. 27. 28. 29. 30. 31.

Altitudo aquae ex niue liquefacta 4‴. deprehendebatur.

Aurorae boreales duae completae, priorem d. 8. inter h. 3 et 4. a. m. obſeruaui cum radiis coloratis, poſterior d. 14. Radii hic non erant colorati. Incompeta d. 6. et veſtigia d. 4.

Ex dictis adhuc ſequentia corollaria fluunt. Ergo fuit ſerenitas dierum amplius tertia anni parte, proprie per 130. dies. Nimirum Ian. 1. Febr. 9. Mart. 17 Apr. 18. Maio 19. Iun. 17. Iul 11. Aug. 11. Sept. 8. Octob. 6. Nov. 4. Decembri 9. dies.

Ventus W ſpirauit per dies 212. S 67. O 27. N 57. Declinatione a plagis cardinalibus non attenta. Scilicet Ianuario W per dies 20. S 11. O 00. N 00.

Febr. W. 5. S. 16. O. 4. N. 3.
Mart W. 15. S. 6. O. 4. N. 4.
Apr. W. 21. S. 1. O. 2. N. 6.
Maio W per dies 16. S. dies 4. O. dies 4. N. 6.
Iunio W. 22. S. 1. O. 2. N 5.
Iulio W. 26. S. 2. O 0. N. 3.
Aug. W. 18. S. 6. O 0. N. 7.
Sept. W. 12. S. 6. O. 6. N. 6.
Oct. W. 21. S. 4. O. 0. N. 6.
Nov. W. 15. S. 5. O. 4. N. 6.
Dec. W. 21. S. 5. O. 1. N. 4.

Venti vehementes ſpirarunt per dies 38. vt Ian. 4. Febr. 1. Mart. 1. Apr. 3. Maio 3. Iun. 1. Iul. 3. Aug. 3. Sept. 3. Oct. 4. Nov. 7. Decembri 5.

Altitudo aquae pluuiae et ex niue liquefactae = 21 poll. ſcil. Ian. 4. lin. Febr. 1. poll. $9\frac{1}{2}$ lin. Mart. 5‴. Apr. $7\frac{1}{2}$. lin. Mai 1. poll. Iun. 1. poll. Iulius 4. poll. 2. lin. Aug. 3. poll. 11. lin. Sept. 4″. 9‴. Oct. 1″. 1‴. Nov. 1. poll. 8. lin. Dec. 4 lin. Ergo menſibus Iulio, Auguſto et Septembri maxima pluuiae copia cecidit, Septembri tamen omnium maxima, et Ian. minima.

Gran-

Grandinauit toto anno quinquies. Menſe Maio ſemel d. 16. Iulio ter, d. 3. 12. 23. Octobri ſemel d. 6.

Tonitrua vel tempeſtates fulmineae 7. fuere Iunio 3 et Iulio 4. omnes mitiores, quae non prope ad nos acceſſerunt.

Aqua fluminis altior ſolita Aug. 9 et 10. Oct. 24. 28. 29. Nov. 9 et 10. Maxima altitudo amplius tres vlnas ruſſicas continebat.

Aurorae boreales 18. obſeruabantur (veſtigiis non numeratis), inter quas tantum 4. erant completae, vt vna Martii 30. vna Sept. 14. et duae Decembris 8 et 14. Reliquae placidae et incompletae Ian. 12. Mart. 3. 4. 5. 31. Apr. 7. 16. 21. Aug. 20. Oct. 8. Nov. 5. 8. 12. Dec. 6.

Nebulae denſae 6. vt Ian. 12. Febr. 19. Mart. 20. Apr. 12. Maii 3. Dec. 21. ſunt obſeruatae.

OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM

PETROPOLI FACTARVM EPITOME PER SINGVLOS MENSES ANNI MDCCLXIII. ST. V. CVM CONSECTARIIS, ET IN EAS CONSIDERATIONIBVS.

Auctore

I. A. BRAVNIO.

Harum obſeruationum meteorologicarum epitome eodem modo eſt confecta, vti antecedentes. Praemonere igitur multa de Methodo et ordine quem in hiſce obſeruationibus conſignandis tenuimus, ſuperuacaneum omnino eſſet cenſendum. Idem Barometrum ſimplex adhibitum eſt, cuius altitudines in pollicibus pedis pariſienſis adnotatę, eiusdemque pollicis partibus centeſimis ſunt. Priores numeri ante punctum poſiti pollices; et poſteriores poſt punctum, partes pollicis centeſimas indicant. Thermometro quoque eodem vſi ſumus deliliano, cuius ſcala ſatis nota, in qua ſcilicet calor aquae bullientis per Ciphram, et Punctum congelationis per numerum 150. indicantur. Obſeruationes barometricae et thermometricae eodem diei tempore factae ſunt, et in eadem altitudine, quae fuit circiter 20. pedum

pedum ſupra Neuam flumen, et mare balticum. Tria ſunt tempora, quae per ſingulas dies in adnotandis noſtris obſeruationibus elegimus, mane paullo ante aut ſub ſolis ortum, quantum fieri potuit, poſt meridiem circa horam tertiam, et veſperi hora fere vndecima. Horum temporum electionis cauſſa non obſcura eſſe poteſt. Nam mane ſub ſolis ortum frigus maximum, vel calor minimus, et hora circiter tertia pomeridiana Calor maximus, ceteris paribus, obſeruari ſolent, quis autem ignoret huius generis obſeruationes praecipue ſpectari et attentione dignas haberi, quum maioris momenti ſint prae ceteris. Et veſpertinae obſeruationes ſua vtilitate non deſtituuntur, tam barometricae, quam praecipue thermometricae. Quum enim ſaepius aeſtatis tempore hic Petroburgi mane ſub ſolis ortum obſeruationes propter ortum illius maturum, inſtitui vix ac ne vix quidem queant; obſeruationes veſpertinae matutinarum loco ſine errore ſenſibili adhiberi poſſunt, quum fere eundem caloris gradum indicare ſoleant. Indicabimus more noſtro obſeruationes barometricas primum cum differentiis ſuis et cum conſectariis, potiſſimum ex earum inter ſe comparatione, deductis, deinde obſeruationes thermometricas itidem cum ſuis differentiis et conſectariis, denique Meteora potiora ſingulorum menſium et in ea conſiderationes. En obſeruationes barometricas, quae maximas et minimas barometri altitudines

dines per ſingulos anni menſes quaſi in tabula ſiſtunt, vt vno obtutu conſpici queant.

Altitudinum Barometricarum.

Menſis	D.	Maxima	- - Minima	- Differentia.
Ian.	2 et 15.	28.40	- 27.43. d. 29. h. 2. p. m.	- 0″.$\frac{97}{100}$
Febr.	28. h. 6. a. m.	28.65	- 27. 25. d. 19. h. 11. p. m.	- 1. 31
Mart.	19. h. 2. p. m.	28.50	- 27. 28. d. 27. h. 7. a. m.	- 1. 22
Apr.	2. h. 11. p. m.	28. 36	- 27. 54. d. 13. h. 2. p. m.	- 0. 92
Maii	28. h. 11 p. m.	28. 23	- 27. 78. d. 31. h. 5. a. m.	- 0. 95
Iun.	24 ab h. 7. ad 2	28. 33	- 27. 68. d. 15. h. 7. a. m	- 0. 65
Iulii	1. 8. 9	28. 10	- 27. 60. d. 5. h. 7. a. m.	- 0. 50
Aug.	8. h. 7. a. m.	28. 50	- 27. 38. d. 13. h. 10. p. m.	- 1. 12
Sept.	20. h. 2. p. m.	28 23	- 27. 30. d. 5. h. 2. p. m.	- 0. 93
Oct.	14. h. 11. p. m	28. 30	- 27 18 d 21. h. 2. p. m.	- 1. 12
Nov.	26. h. 9. a. m.	28. 52	- 27. 15. d. 6. h. 7. a. m.	- 1. 37
Dec.	11. h. 9. a. m.	28. 92	- 26 53. d. 20. h. 6. p. m.	- 2. 39

Ergo maxima totius anni = 28. 92. minima = 26. 53. et differentia maxima = 2. 39.

Singulare eſt, et quod rariſſime occurrit, Maximam totius anni altitudinem et Minimam vno eodemque menſe, videlicet Decembri contigiſſe. Eſt maxima = 28. 92. Eſt haec altitudo ſatis quidem magna, ſed tamen minor maxima, ſcilicet 29. 12. alias mihi hic Petroburgi 1757. obſeruata. Nimirum vsque ad annum 1750. altitudo maxima erat = 29. 01. dein 1750. = 29. 10. denique 1757. = 29.

$=29.12$. quae igitur ad huc eſt maxima. Minima hoc anno eſt aequalis 26. 53. maior igitur et minima alias hic notata, ſcilicet 26. 41.

Altitudo huius anni maxima eſt Decembris 11. h. 9. a. m. obſeruata ſub circumſtantiis ſequentibus.

Antecedens obſeruatio barometrica $=28.85$. et ſequens 28. 91, vento O $2\frac{1}{2}$. Frigus $=179$. coelo ſereno vaporoſo. Dies aliquot antecedentes, et ſequentes, vti fere ſolet, erant ſereni.

Minima huius anni altitudo barometrica 26. 53. contigit d. 20. h. 6. p. m. et circumſtantiae erant, quae ſequuntur. Obſeruatio barometrica antecedens $=26.55$. et ſequens 26. 68. Frigus $=157$, antecedens 158. et ſequens 163. Coelum nubilum et niuoſum, quale quoque, vt fere ſolet, diebus aliquot antecedentibus fuit et conſequentibus, vento NW 1. ventus antecedens O 1 et ſequens NW 2.

Differentia igitur huius anni maxima, ſiue ſpatium variationum barometricarum fuit $=2.39$. Maximum huc vsque fuit 2. 71. quod igitur invariatum manet.

Differentiae altitudinum barometricarum menſtruae et hoc anno demonſtrant; variationes barometricas primis et vltimis anni menſibus, quam mediis, eſſe maiores, quamquam reſpectu menſis Maii et Septembris irregularitas quaedam parua occurrere videtur.

Hactenus de obſeruationibus barometricis, ſequuntur obſeruationes thermometricae variationem caloris annuam per ſingulos anni menſes indicantes.

	Calor Minimus.		Maximus.		Differentia
Ian.	10. h. 9. a. m. 193	-	148. d. 28. h. 2. p. m.	-	45
Febr.	12. h. 7. a. m. 204	-	142. d. 17. h. 2. p. m.	-	62
Mart.	1. h. 7. a. m. 185	-	139. d. 29. h. 2. p. m.	-	46
Apr.	16. h. 11. p. m. 163	-	120. d. 20. h. 2. p. m.	-	42
Maii	14. h. 4. a. m. 151	-	116. d. 10. h. 2. p. m.	-	35
Iun.	5. h. 11. p. m. 138	-	100. d. 27. h. 2. p. m.	-	38
Iulii	31. h. 11. p. m. 130	-	108. d. 1. h. 2. p. m.	-	22
Aug.	26. h. 7. a. m. 139	-	110. d. 10. h. 3. p m.	-	29
Sept.	28. h. 7. a. m. 152	-	125. d. 4. h. 2. p. m.	-	27
Oct.	19. h. 7. a. m. 157	-	140. d. 22. h. 2. p. m.	-	17
Nov.	26. h. 9. a. m. 185	-	144. d. 5. h. 8. a. m.	-	41
Dec.	16. h. 10. p. m. 198	-	148. d. 5. h. 2. p. m.	-	50.

Ergo frigus maximum per totum annum = 204,
et Calor maximus = 100.
Differentia maxima = 104°.

Ex comparatione graduum caloris huius anni patet calorem maximum 100°. eueniſſe Iunii 27. et minimum ſeu frigus maximum 204. Februarii 12. Calorem maximum et minimum non ſemper iisdem menſibus euenire, ex antecedentibus obſeruationibus ſatis manifeſtum eſt, vti quoque non ſub iisdem circumſtantiis accidere ſolent.

Frigus maximum Febr. 12. ſub ſequentibus circumſtantiis adnotatum eſt.

Baro-

Barometrum monſtrabat 28. 42. antea 28 46. Ventus vix erat ſenſibilis antecedentibus aliquot diebus erat N fere 2. Coelum ſereno vaporoſum, vti quoque die antecedenti et ſequenti. Ceterum frigus maximum huius anni 204. differt a frigore maximo alias mihi obſeruato 212. gradibus 8. Calor maximus ſub his, quae ſequuntur, circumſtantiis, eſt notatus. Barometrum erat 28. 23. antea 28.25. Ventus S 1. antecedebat O et ſequebatur S aliquot diebus. Coelum ſerenum, vti quoque diebus aliquot antecedentibus et ſequentibus. Ceterum hic menſis admodum calidus fuit, quum vt plurimum maiores caloris gradus regnarent, differt a gradu caloris maximo alias mihi obſeruato 97°. tribus gradibus. Manent igitur et ſummus caloris gradus et infimus hic Petroburgi obſeruatus idem per obſervationes huius anni. Variationes thermometricas non, vti barometricas, certam obſeruare legem, comparatio luculenter monſtrare poteſt.

Variatio maxima menſtrua hoc anno caloris erat $=62°$ menſe Februario, variatio minima $=17$. menſe Octobri. Vti magnitudo variationum thermometricarum ſiue differentiarum menſtruarum diverſis annis eſt diuerſa, ſic quoque maximae et minimae variationes non iisdem menſibus euenire ſolent.

Differentia ſeu variatio caloris huius totius anni eſt $=$ 104. differens a ſumma alias hic obſervata 115. gradibus 11.

Ceterum ſolet vt plurimum eſſe 100. graduum.

Haec hactenus et de Caloris variationibus huius anni. Sequitur, vt ad Meteora potiora hoc anno obſeruata recenſenda et exponenda pergamus, idque per ſingulos anni menſes.

Menſis Ianuarius.

Coelum paucis tantum diebus fuit ſerenum hoc menſe, ſcilicet ſex. 2. 9. 10. 15. 17. 31.

Halo circa lunam adparuit d. 15. h. 11. p. m. Barometro 28. 38. Thermometro 182. Vento 00. Coelo vaporoſo.

Altitudo aquae ex niue liquefacta $=$ 1 poll. 2 lin. Venti W ſiue ex occidente ſpirabant diebus 14. Nimirum d. 1. 8. 11. 12 13. 14. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 25. 26, inter quos ille d. 11. fuit vehementior 3°.

Ex meridie ſeu S 11. diebus, ſcilicet d. 3. 4. 5. 6. 7. 22. 23. 24. 27. 28. 29. Ille qui nocte inter 7 et 8. flauit, fuit vehementior 3°.

Ex ſeptentrione ſeu N 6. d. 2. 9. 10. 15. 30. 31.

Ex oriente flauit hoc menſe nullus.

Regna-

Regnarunt igitur venti W et S, et vehementiores fuere 2. vnus W d. 11. et alter S inter 7 et 8.

Menſis Februarius.

Dies ſereni hoc menſe numerabantur 10. ſcilicet 2. 4. 10. 11. 12. 22. 23. 24. 27. 28.

Venti ex plagis tribus W. N et S. ſpiravere; ex O et hoc menſe nullus. Ventus N et NW frequentius, nempe per 11. dies 2. 3. 4. 8. 9. 10. 11. 22. 25. 27. 28. Ex W diebus 8. ſcilicet d. 5. 15. 16. 17. 20. 21. 23. 24. Venti S fuere 7. nimirum d. 1. 7. 12. 13. 14. 18. 19.

Inter hos ventos fuere vehementiores 4. nempe d. 7. S 3. d. 13. S 2 et 3. d. 20. W 3 d. 22. W 2 et 3.

Altitudo aquae ex niue liquefacta = 2 poll. $4\frac{1}{2}$ lin.

Menſis Martius.

Menſis fere dimidius erat ſerenus, ſcilicet per dies 14. d. 1. 2. 3. 4. 5. 11. 12. 13. 14. 18. 19. 20. 21. 31.

Venti N et NW et hoc menſe regnarunt, dum per 14. dies ſpirauere, nempe d. 1. 2. 3. 4. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 19. 24. W et SW per dies octo d. 5. 6. 7. 16. 17. 26. 30. 31.

Ventus S quoque per dies 8. d. 18. 22. 23. 25. 26. 27. 28. 29.

Ventus O nullus et hoc menſe.

Inter hos duo venti vehementiores d. 16 et 17. SW 3.

Altitudo aquae pluuiae = 4 lin.

Nebulae denſae d. 19 et 28. manc.

Craſſities glaciei Neuae fluminis maxima hoc anno reperiebatur = 26 poll. Lond. ordinaria eſt fere 28.

Menſis Aprilis.

Venti vtplurimum ſpirauere ex S et N. Ventus S fuit per 12. dies nempe 2. 3. 6. 7. 11. 12. 19. 20. 21. 22. 23. 24.

N et NW per 10. dies d. 9. 10. 15. 16. 17. 18. 27. 28. 29. 30.

W d. 1. 4. 5. 8. 13. 14. 25. 26. Ergo 8. d.

Inter hoc vehementiores duo erant d. 4. W 3 d. 13. W 3.

Dies ſereni erant 18. ſcilicet 1. 2. 3. 5. 6. 7. 10. 11. 14. 15. 16. 19. 20. 21. 22. 24. 26. 30. ideoque vltra menſem dimidium coelum erat ſerenum.

Primum tonitru d. 28.

Nebu-

Nebulae 3. d. 5. veſperi; 7. 28. mane.

Grando cecidit d. 14.

Altitudo aquae pluuiae = 12 lin. ſeu 1 poll.

Lux borealis placida d. 5 et 6. Veſtigia lucis borealis d. 10 et 20.

Glacies Neuae fluminis ſolui coepit d. 23. h. 6. a. m.

Menſis Maius.

Venti N et NW hoc menſe regnarunt per dies 21. d. 1. 2. 5. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 25. 26.

O per dies 4. d. 27. 28. 29. 30.

S d. 3. 4 et SO d. 31.

W ſemel d. 6. quos inter vehementiores fuere d. 22. NW3. d. 29. O3.

Coelum maiorem menſis partem erat ſerenum ſcilicet per dies 22. d. 1. 2 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 23. 25. 26. 27. 28. 29. Altitudo barometrica vtplurimum ſatis alta erat.

Altitudo aquae pluuiae = 5 lin.

Niues adhuc cecidere d. 15; et d. 17. adhuc, idque vltimum gelauit.

Nullum per totum menſem tonitru.

Menſis

Menſis Iunius.

Venti N et NO hoc menſe maxime ſpirauere, videlicet per dies 12. D. 5. 6. 7. 8. 10. 12. 16. 17. 18. 19. 20. 23.

O per dies 6. D. 13. 14. 21. 25. 26. 30.

S per dies 5. D. 1. 2. 27. 28. 29. W d. 3. 4. 9.

Dies ſereni hoc menſe fuerunt 25. D. 1. 2. 3. 4. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30.

Tonitrua erant tria, d. 22. h. 4. p. m. et 23. h. 6. a. m. et. p. m et 30. h. 3 et 5. p. m. ſed omnia tria e longinquo.

Fulgurauit vehementer d. 6.

Altitudo aquae pluuiae = 8 lin.

Menſis Iulius.

Ventus auſtralis hoc menſe prae ceteris flauit ſcilicet per dies 12. Ventus W per octo, N et NO per 6 O 5 dies.

Nimirum ventus S et SW et SO D. 4. 6. 7. 10. 11. 12. 13. 15. 24. 25. 26. 27.

W d. 2. 3. 5. 8. 16. 30. 31. 32.

N et NO 17. 18. 19. 20. 21. 22.

O. D. 1. 9. 23. 28. 29.

Venti

Venti. Inter hos vehementiores fuere 4. D. 2. W 3. d. 25. S et W 3 d. 26. S 3. d. 31. W 3.

Dies ſereni tantum 8 numerabantur. D. 2. 5. 6. 7. 8. 15. 17. 28.

Altitudo aquae pluuiae = poll. 3. lin. 9.

Tonitrua 7. D. 1. 4. 7. 10. 26. 27. 31.

Menſis Auguſtus.

Nullus ventus hoc menſe praecipue regnauit, ſpirauit tamen W per 11. et O per 10. dies. Ceterum S per 4 et N per 2. Nimirum W d. 1. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11. 12. 14. 15.

O 19. 20. 22. 23. 24. 25. 26. 28. 30. 31. S d. 2. 3. 10. 13.

N d. 16. 18.

Hos inter vehementiores fuerunt 4. d. 1. W 3 d. 4. W 2 et 3. d. 12. W 3 et 4. die 13. S 2 et 3.

Coelum per dimidium menſem fuit ſerenum ſcilicet per dies 15. D. 1. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 15. 16. 17. 18. 19. 25. 31.

Nebulae denſae d. 2. h. 7. a. m. ſequente pluuia et d. 31. mane ſequente ſerenitate.

Tonuit bis ſcil. d. 11 et 12. ſed e longinquo.

Altitudo aquae pluuiae = 1 poll. 4 lin.

Lux borealis incompleta d. 10. h. 2. a m. adparuit.

Menſis September.

Ex plagis 4. cardinalibus omnibus ſpirauere venti ita, vt et hoc menſe nullus praecipue regnaret. Ventus W per 10. dies. Ventus O per 8. Ventus S per 6. V. N. per 4. dies flauere. Scilicet W d. 2. 3. 6. 9. 15. 16. 17. 18. 26. 27.

O d. 1. 5. 7. 8. 10. 22. 23. 29.

S d. 19. 20. 21. 24. 25. 30.

N d. 11. 12. 13. 14.

Inter hos fuere vehementes 4. Scilicet d. 5. O 3 et 4. d. 20. S 3 d. 25. S 3 et 4. d. 26. W 3.

Dies ſereni erant 9. D. 2. 3. 4. 13. 14. 19. 26. 27. 28.

Altitudo aquae pluuiae = 4 poll.

Grandinauit d. 13. h. 4. p. m.

Iris elegantiſſima ſole nondum plane orto adparuit d. 23.

Menſis October.

Ventus W praecipue hoc menſe ſpirauit, ſcilicet per dies 18. Ceterum flauit O per 4. N per 3 et S quoque per 3 dies.

Nimirum W d. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 14. 15. 16. 17. 23. 25. 26. 27. 28.

O d. 19. 20. 21. 31. N d. 11. 18. 22. S 12. 13. 30.

Vehe-

Vehementia 3 et 4. fuerunt inter hos per ſeptem dies. D. 6. W 3 d. 7. W 3 d. 8. W 3 et 4. d. 15. W 3 d. 16. W 3 d. 27. W 3 et 4.

Serenus fuit nullus dies hoc menſe.

Altitudo aquae pluuiae = 5 poll. 1 lin.

Nebulae tres d. 17. 24. 29.

Lux borealis inſignis et completa adparuit d. 6. inter h. 6 et 7. p. m.

Menſis Nouember.

Venti flauerunt ex plagis ſequentibus.

Ex occidente per dies 14; ex ſeptentrione per dies 10, ex oriente per 3. et ex meridie per 2. dies.

Scilicet W d. 1. 3. 4. 5. 6. 12. 13. 14. 15. 22. 23. 24. 28. 29.

N et NO et NW. d. 7. 8. 9. 10. 11. 16. 19. 25. 26. 30.

O 18. 20. 27. S d. 17 et 21.

Fuerunt inter hos vehementes tres d. 1. W 3 et 4. d. 5. W 3 et 4. d. 15. W 3.

Dies ſereni nouem numerari poſſunt. D. 1. 2. 3. 8. 9. 23. 25. 26. 27.

Altitudo aquae pluuiae 1 poll. 10 lin.

Halones circa lunam d. 6 et 11. inter h. 10 et 11.

Lux borealis debilis d. 16. h. 10. p. m.

Glacies in Neua flumine ſtetit d. 8. circa h. 9. a. m.

Menſis December.

Ventus O dominatus hoc menſe eſt, flauit enim per 13. dies. Ceterum N. per 8. et S. per 6. dies.

Nimirum O d. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 17. 25. 30. 31.

N. d. 15. 16. 18. 21. 22. 26. 28. 29.

S. d. 1. 2. 3. 4. 19. 20.

W nullus.

Fuerunt inter hos venti vehementiores d. 10. O 3. d. 19. S 3 et 4.

Diebus ſerenis 12. adnumerari poſſunt vt 10^mus 11. 12. 13. 14. 16. 18. 23. 24. 26. 27. 28.

Nebulae denſae d. 24 et 27.

Altitudo aquae pluuiae 1 poll.

Lux borealis mediocris d. 28.

Ex his omnibus patent ſequentia.

1. Ventus W et hoc anno dominatus eſt, ſpirauit enim per dies 104. Ceterum N. per dies 96. S. 78. et O 53.

Venti vehementiores 3 et 4°. inter hos erant per 30. dies, vt Ian. 11. W 3. Februarii 20. 23. W 3.

W 3. d. 7. S 3. d. 13. S 3. Martii 16. W 3. d. 17. W 3. d. 17. W 3. Aprilis 4. W 3. d. 13. W 3. Maii 29. O 3. d. 22. NW 3. d. 15. S 3 et 4. Iunio nullus. Iulii 2. W 3. d. 25. W 3. Auguſti 12. W 3 et 4. Sept. 26. W 3. d. 5. O 3 et 4. Oct. 6. W 3. d. 7. W 3. d. 8. 15. 16. W 3. d. 27. W 3 et 4.

Nouembris 1. W 3 et 4. d. 5. W 3 et 4. d. 15. W 3.

Decembris 9. O 3. d. 10. O 3. d. 19. S 3 et W. deinde 4.

Venti igitur vehementiores plerique fuere W, vt alias quoque ſolet.

Dies ſereni per totum annum numerari poſſunt 149.

Nebulae denſae obſeruatae 12. vt Martii 1. 19. 29. Apr. 5. 8. 28. Auguſti 2 et 31. Octobris 17. 24. 29. Dec. 27.

Tonitrua 12. primum Aprilis 28. Porro Iunii 22 et 30. Iulii 1. 4. 7. 10. 26. 27. 31. Auguſti 11 et 12.

Fulgurauit Iunii 22 et 30.

Grando cecidit Apr. 14. Sept. 13.

Altitudo aquae pluuiae 22 poll. 7 lin.

Aurorae boreaſes 4. ſunt notatae, vt Auguſti 10. Octobris 6. Nou. 16 et Dec. 28. quas inter, quae Oct. 6. contigit, completa et admodum notatu digna erat, propter colores ſuos varios.

Halones circa lunam 3. Ian. 15. Nov. 6 et 11. Nulla vero hoc anno circa ſolem mihi obſervata.

Denique Altitudines aquae Neuenſis ſolito altiores et profundiores notatae ſunt ſequentes. Scilicet Iulii 2. 1 Arſchin $\frac{4}{64}$ ſupra altitudinem ordinariam, ſeu mediam. Notandum Arſchin ſeu vlnam ruſſicam eſſe = 28 pollicibus londinenſibus.

D. 5. = 1 vlnae $\frac{40}{64}$.

Auguſti 14. = 1 vlnae ruſſ. $\frac{12}{64}$.

Sept. 25. $1\frac{12}{64}$.

Oct. 8. 2. vln. $\frac{56}{64}$.

Nov. 5. $2\frac{8}{64}$. d. 12. $2\frac{4}{16}$.

Ergo per dies ſeptem, aqua altior, et per vnum diem profundior, ſcilicet infra altitudinem ordinarium Maii 25. = $\frac{22}{64}$.

PHYSICA.

PHYSICA.

INSECTO-

INSECTORVM

MVSEI PETROPOLITANI RARIORVM, AMERICAE POTISSIMVM MERIDIONALIS INCOLARVM, DESCRIPTIONES.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

I.

Scarabaeus, thorace vtrinque in cornu antrorſum productum, capite in cornu recuruatum ac tridentatum deſinente.

Marcgr. braſ. p. 246. Enena ſ. Taurus volans.
Mouff. ſp. 2. p 152. cum fig. Scarabaeus naſicornis buceros.
Olear. Muſ. Gottorp. p. 25. Tab. XVI. fig. 2. Taurus volans.
Merian. ſurin. Tab. 72.
Hoffn pict. 1. t. 1. in medio.
Roeſ. ſcar. T. II. tab. A. fig. 2.
Scarabaeus thorace bicorni, capitis cornu tridentato: apice bifido. *Linn.* ſyſt. nat. p. 345. no. 2. edit. dec. (Actaeon).

DESCRIPTIO.

Longitudo indiuidui, cuius nunc ſequitur deſcriptio, ab extremitate cornu capitis ad anum quatuor eſt pollicum, triumque linearum. Prona corporis ſuperficies glabra ſatis eſt; colo-

coloris e caſtaneo nigricantis, vel plane nigri in nonnullis, absque eximio ſplendore, quo non niſi capitis cornu, et quidem facies ipſius ſupina potiſſimum, diſtinguitur. Supina vero corporis ſuperficies prona obſcurior, vt et auerſa elytrorum facies, duoque maiora abdominis proni ſegmenta poſtica villis ſunt obſita breuiſſimis, teſtaceis; rarius tamen iidem, vel plane nulli in capitis cornu, antica cornuum thoracis parte, corporis medio pedibusque occurrunt, vbi vel ob frictionem continuam patiuntur defluuia, vel quod etiam hiſce partibus eorum prouentum denegauerit natura. Praeter iſtos villos pili adſunt e ruſo ſpadicei, quibus os, antennae, margo thoracis anterior circa collum, eiusdemque poſterior, maxima ex parte, ornantur.

Caput pro mole corporis paruum, demiſſum, et cornu fere totum eſt: Prona nempe capitis ſuperficies cornu longioris recuruati ac tridentati baſis eſt, quod ſurſum leuiter flexum, e latiori baſi mox anguſtatur, ad dentem ſolitarium, e prona ipſius facie, parum eleuata, prodeuntem, anterioraque ſpectantem, ad eundemque horizontaliter deprimitur, abhinc vero aliquanto latius factum ac planiuſculum, magis ſc. latum, quam craſſum, eandem ad extremitatem bifurcatam fere vsque ſeruat latitudinem, vbi in dentes duos diuergentes terminatur. Ad eiusdem cornu baſin quatuor notandi

tandi ſunt denticuli, quorum vnus, ab vtroque latere retrorſum ſpectans, in oculum excurrit, duo alii ad oris angulos antrorſum ducti, ſubtriangulares, ſupra et intra quos cornu quaſi exaſciatum, marginibusque, hinc et inde, acutis eſt diſtinctum. Antennae, ſub baſi denticuli in oculos excurrentis, prouenientes, e ſeptem conſtant articulis, quorum infimus reliquis longe maior et clauatus, ſubſequentes ſex vero ſubrotundi ſunt, horum extimo inſiſtunt, ope articuli, lamellae tres oblongae, ſibique inuicem proxime adſtantes. Antennulae oris, quae a Cel. *Linnæo* palpi nouiſſime dicuntur, quatuor, quarum exteriores interioribus parum longiores, e quatuor, interiores e tribus tantum conſtruuntur articulis. Ad oris latera, iuxta antennulas, ex inferiore capitis parte, vtrinque porrigitur furca quaedam, antrorſum parumque ſurſum ſpectans, immobilis; dente exteriore interiore maiore, obtuſo, in aduerſa facie plano, in auerſa conuexo, altero ſeu interiore minore et acutiore. Inter duas haſce furcas collocati ſunt dentes duo ſubarcuati, acuti et conniuentes, qui, cum mobiles ſint, pro oris dentibus proprie haberi poſſent. Scutum illud, quod ante colli partem laeuigatam, in Ceruo volante ſpeculum vulgo dictam, ſitum obtinet, ouatum eſt ac planiuſculum, in extremo bi-vel tridentatum; ſi tres adſunt denticuli, duo ſibi inuicem opponuntur, anteriora ſpectantes, tertius autem,

Eee 2 tem,

tem, iſtis breuior, deorſumque magis vergens, tanquam ſolitarins, in media et ſumma huius ſcuti parte ponitur. Interdum etiam hic tertius plane deficit. Oculi prominentes, e griſeo fuſci, piſi maioris magnitudine. Thorax capite multo maior, valde conuexus, in medio in tuber mediocre eleuatus, margine antico, quo caput excipit, late prominente, lateribus itidem marginatis, ſed anguſtius, margine poſtico vix notabiliter diſtincto. Thoracis cornua, quae ad latera ſunt, antrorſum porrecta, e latiori baſi in obtuſum apicem terminata, diuergentia, lata magis, quam craſſa, et ab vtroque latere in margines adtenuata, quorum exterior ductum ſequitur leuiter conuexum, interior concavum. Deſuper prona cornuum ſuperficies ſubconvexa, ſupina planiuſcula eſt. Scutellum triangulare, ad baſin veſtitum pilis, apicem verſus laeue.

Elytra ſubconuexa, marginata, longitudine abdominis, ad baſin, iuxta angulum ipſorum externum in tuber parum elongatum eleuata, tubere illo, quod in thoracis medio eſt, maius quidem, elytri tamen marginem lateralem haud adtingens. Sic quoque aliud, verſus elytrorum extremitates, iuxta commiſſuram, interno margini propius, quam externo, e planitie ſenſim adſurgit tuber, illo tamen, quod ad elytrorum baſin eſt, minus prominens, minusque diſtinctum. Pro recipiendo ſcutello,

lo, internoque elytrorum margine inflexo, abdominis parti anticae mediae, quam thoracem ſecundarium vocare placet, ſecundum totam eius longitudinem inſculptus eſt ſinus, qui e lata et triangulari ad anteriora ſuperficie in canaliculum abit, ad oram thoracis ſecundarii poſticam truncatum. Prona abdominis in octo diſtributa ſunt ſegmenta, quorum ſex anteriora reſpectu inſequentium, glabra et caſtanei coloris; intermediis quatuor primo et ſexto latioribus; ſeptimum prioribus quadruplo maius, pilis teſtaceis breuiſſimis, quibus et abdominis latera tecta ſunt, obſitum; octauum, quod ano, ſeu vltimo abdominis ſupini ſegmento contiguum eſt, ſeptimo fere dimidio minus, eiusdemque generis pilis, quo prius, veſtitum. Supina abdominis e ſex ſegmentis conſtant, quorum quatuor anteriora in medio anguſtiora; quintum reliquis duplo maius, et in ſui medio latius, quam in lateribus; ſextum latitudine anteriorum, ad marginem poſticum, quo ano proximum eſt, exſciſſum.

Femora omnia inermia: quatuor anticis in pronae faciei medio ſerie punctorum excauatorum longitudinali notatis. Tibiae primi pedum paris ad marginem externum acutae, et parte ſua inferiore ſeptem dentibus inſtructae, quorum duo forma ſubtriangulares, maiores ac latiores reliquis, ſub angulo recto cum tibiae margine externo procedunt;

horum inferior alium ſibi iunctum habet, antrorſum porrectum, acutiorem, ad tibiae extremum, cui ex interno tibiae extremitatis latere dens reſpondet hamatus, deorſum incuruatus, tibiae, vt videtur, per gomphoſin iunctus; mox retro hunc iterum alius, ex ipſa tibiae ſubſtantia pronatus, deorſum ſpectans, et ſubtriangularis; tandem in ſupina tibiarum anticarum facie inter duos iſtos, qui ſub angulo recto egrediuntur, duo alii, reliquis longe minores. Pars ſupina lateralis tibiarum anticarum exterior punctis plurimis excauata.

Tibiarum mediarum, vt et poſticarum latus externum dentibus tribus, retrorſum parum ſpectantibus, et acutis eſt armatum: primo breuiſſimo, 2do et 3tio longioribus; omnibus aliquali diſtantia a ſe inuicem remotis. Sub horum infimo ipſa inferior tibiae extremitas in denticulum terminatur obtuſum ac breuem, et praeter iſtum armata eſt introrſum duobus aliis, per gomphoſin ſibi iunctis, longioribus: interiore recto, minore; exteriore introrſum incuruato, maiore. Ceterum tibiarum mediarum poſticarumque ſuperficies punctis vndique excauata cernitur. Pedes extremi e quinque conſtructi articulis, proportionem, qualis inter Scarabaeos obtinet, ſeruantibus: primo inferne in facie prona in dentem acuminatum terminato; extremo duobus vncis, auium vngues aemulantibus, armato,

armato, et praeter hos aculeo ſetiformi, recto, vncis breuiore, inferius ſub iisdem ſito. Supina articulorum pedum extremorum facies tuberculis minoribus, ſeu verrucis aculeatis exaſperata.

Maiorem, ratione magnitudinis et proportionis, differentiam in vllo, quod vnquam vidi, Inſecto, quam in hoc, vidiſſe vix memini; dantur enim indiuidua a 3 ad 4 poll. longa, et, quod ad proportionem ac ſitum adtinet, capitis cornu non ſolum, verum etiam thoracis cornua, ſolito minora, corporis magnitudini interdum non ſunt proportionata, interdum et magnitudo eorum maior eſt, quam corporis moles poſceret; imo thoracis cornua modo diuergunt, modo conuergunt, modo parallela ſunt. Verum haec omnia, recenſitis prius ſingulorum differentiis, clarius patebunt:

α) Long. 3 poll. 10 lin. Capitis cornu huic ab extremitate ad marginem oculorum anticum 1 poll. $1\frac{1}{2}$ lin. longum, ſurſum magis recuruatum, tenuius, pronaque in facie conuexum magis, quam ſuperius deſcripto. Thoracis cornua baſi latiora, ad internum marginem magis exſciſſa, ſituque parallela. Huius iconem vid. Tab. XI. fig. 1. Tab. XI. Fig. 1.

β) Long. 4 poll. 1 lin. Capitis cornu huic, ab extremitate ad marginem oculorum anticum, $9\frac{1}{2}$ lin. longum, adeoque minus, quam

quam praecedenti, licet hunc corporis magnitudine antecellat; tenuius quoque eſt, minoribusque inſtructum dentibus, nec ſurſum valde recuruatum; aſt, thoracis cornua ad internum marginem valde exſciſſa, hinc arcuata, et extremitatibus ſuis conuenientia. Tuber thoracis inſignius quam priori et deſcripto, inque medio ſecundum longitudinem in marginem acutiorem contractum.

γ) Long. 3 poll. 7 lin. Licet praecedenti (β) multo minus ſit, cornu tamen in capite maius gerit, ſc. ab extremitate ad marginem oculi anticum 1 poll. $\frac{2}{3}$ lin. longum; verum thoracis cornua longe minora, parallela, eiusdemque tuber minus inſigne ac in ſummitate obtuſius, quam in β. Ceterum thoracis cornuum magnitudo magnitudini corporis videtur eſſe proportionata. Denticulos in ſupina tibiarum anticarum facie, in vicinia duorum maiorum, ſubtriangularium, extrorſumque ſpectantium conſtitutos earundem ſiniſtra quatuor, dextra tres oſtendit.

δ) Long. 3 poll. adeoque omnium minus. Capitis cornu ab extremitate ad marginem oculorum anticum $7\frac{1}{2}$ lin. longum, parum recuruatum, late tamen, imo latius in extre-

Tab. XI. Fig. 2.

extremitate biſurcatum, quam in quibusdam ex praecedentibus. Thoracis cornua corporis magnitudini proportionata, parte antica leuiter intorta, extremitatibus ſuis conuenientia. Tuberis loco in thorace denticulum habet bifidum, 1½ lin. longum, et erectum. Huius iconem exhibui Tab. XI. fig. 2.

ι) Long. 3 poll. 9½ lin. Proni corporis color, praeſertim elytrorum, puniceus. Capitis cornu ab extremitate ad marginem oculorum anticum 1 poll. 2 lin. longum, rectius, Tab XI. Fig. 3.
quam in plerisque praecedentium, et anguſtius, pro corporis magnitudine longum, baſi compreſſum, ad eandemque pilis e rufo teſtaceis veſtitum; ceterum a baſeos dente ſolitario, qui ſolito maior, magisque incuruatus et antrorſum porrectus eſt, ad extremum vsque, modice bifidum, ſenſim fit anguſtius.

Thorax antice valde conuexus, hinc ad cornuum latus internum impreſſus, in medio in tuber aſſurgit notabile, planiuſculum. Cornua thoracis oblique extrorſum et antrorſum, parumque deorſum flexa, recta, in prona facie ad radicem tumida quaſi, et, reſpectu ad corporis magnitudinem habito, minora ſolito, acutioraque. Thorax quo-

 que,

que, praeſertim antice, villo teſtaceo, breviſſimo obſitus eſt. Tibiae anticae huic magis arcuatae, quam omnibus aliis ex prioribus, et, reſpectu mediarum poſticarumque, quae ſolito breuiores ſunt, ſatis longae, denticulisque iſtis minoribus, qui ex oppoſito duorum dentium maiorum, ſubtriangularium, extrorſumque ſpectantium, alias ſolent eſſe collocati, deſtitutae ſunt. Prona femorum tibiarumque medii ac poſtici paris facies pilis e ruſo teſtaceis longioribus hirta eſt. Vid. Icon Tab. XII. fig. 3. Conſeratur etiam *Olearii* fig. ſupra citata, qua eiusmodi varietas expreſſa ſiſtitur.

* * *

II.

Scarabaeus, thorace tricorni; intermedio longiore, ſubtus barbato; capite in cornu bifurcatum deſinente.

DESCRIPTIO.

Tab. XII. Fig. 1. Longitudo tota, ſc. a capitis cornu apicibus ad extremum abdominis marginem 3 poll. 1 lin. exaequabat. Totum corpus nigricans, et pilis pallide rufis, ſeu teſtaceis veſtitum eſt, excepto capitis

pitis cornu, mediique thoracis cornu ſupina et laterali facie, vt et extremitatibus cornuum thoracis lateralium, omnino glabris. Ratione conformationis partium plurimum cum priore ſpecie conuenit. Caput cornutum in prona ſuperficie ſeu in fronte, eminentiam exhibet paruam, ceu dentis cuiusdam, qualem in praecedente ſpecie, eumque ſolitarium, vidimus, rudimentum. Idem abhinc in cornu abit, $7\frac{1}{2}$ lin. longum, parumque ſurſum recuruatum, prona facie ſubconuexum, ſupina planiuſculum, et in extremo in dentes duos longos ac diuergentes fiſſum. Hoc latum magis, quam craſſum eſt, et a baſi extremitatem verſus biſurcatam latitudinis etiam ſenſim capit augmentum. Thorax tricornis: duo lateralia, antice e laterali margine producta antrorſum, ſubacuta, inter ſe diuergentia, internoque latere a medietate vsque ad apicem leviter exaſciata, tertium in ſumma mediaque thoracis parte recta fere antrorſum extenſum et horizontaliter compreſſum cornu eſt, quod lata ortum baſi, mox attenuatur, et, qua prominet, parte deorſum leuiter incuruatur: glabrum ceterum prona in facie ac lateribus, ſubtus vero barbatum, pilis ſc. rufis, denſis, rigidiuſculis, deorſum ſpectantibus obſitum, apiceque truncato quaſi, modiceque emarginato interſtinctum.

* * *

III.

Scarabaeus thorace turrito, inclinato, bicorni; capite in cornu modice recuruatum ac bidentatum deſinente.

DESCRIPTIO.

Tab. XII. Fig. 2. Longitudo huius Scarabaei, qui ſingulari ſua forma ab omnibus aliis facile diſtinguitur, a capitis cornu ſummitate ad corporis extremum 2 poll. 10 lin. Totum corpus nigrum; prona facie glaberrimum, ſupina pilis obſcure rufis inſtructum eſt, qui non tantum ex omnibus oris partibus, ſed e pedum etiam ſulcis, abdominaliumque ſegmentorum marginibus ſat copioſe proueniunt. Caput in cornu, 1 poll. 2 lin. longum, antrorſum ſurſumque exporrectum, modice recuruatum, validum, quadrilaterum, duobusque in ſummitate dentibus obtuſis, breuibus ac leuiter diuergentibus donatum, terminatur. Idem cornu a baſi ſummitatem verſus, inprimis ſi ad latera eius reſpicias, ſenſim fit anguſtius, craſſitiem vero, quae a diametro horizontali deſumitur, latitudine, diametro perpendiculari menſuranda, minorem, immo et eandem fere vbique habet, ſi modo baſin eius excipias, quam paullo craſſiorem, quam reliquum eius tractum, deprehendes. Latera cornu plana; ſupina eiusdem facies

facies in medio leniſſime conuexa, baſin et ſummitatem verſus planiuſcula, prona vero carinis duabus contiguis, quarum inferior in aliquot linearum a baſi interuallo incipit, et paullo ſupra cornu medietatem deſinit, ſuperior ab eiusdem ſummitate ad prioris finem vsque extenſa, vtraque vero e latiori principio in anguſtiorem finem terminata eſt, leuiter excauata conſpicitur; Hinc pronae huius faciei margines, quatenus ad formandas carinas neceſſarii ſunt, prominent, et, vbi ad vtriusque carinae finem anguſtiorem confluunt, leuem quandam in cornu ſiſtunt eminentiam. Apophyſis iſta, quae, ſolito more, ad cornu baſin orta, dentis recuruati ſimilitudinem prae ſe fert, ſuper oculum eo vsque extenſa eſt, vt apice ſuo anticum thoracis marginem attingat. Limbus, ad cornu baſin, inter vtramque apophyſin et antennas conſpiciendus, marginatus, conuexus, duabusque in medio crenis minoribus inciſus, vel etiam integer eſt. Quod ad reliquas capitis partes attinet, cum praecedentibus fere in omnibus conuenit hic Scarabaeus.

Thorax, mole ſua inſignis, e lata baſi in altum aſſurgit, turrim mentiens ſubteretem, antrorſumque inclinatam, et in ſummo in duo cornua, eiusdem directionis, parum inflexa et obtuſa, quaſi in totidem pinnas, deſinit. Intercapedo, quam inter ſe relinquunt cornua, ſemicircularis et tam lar-

ga eſt, vt digiti auricularis apicem commode recipiat. Ad thoracis latera, iuxta eius baſin, area magna rugoſa. Limbus thoracis tam antice, quam ad latera notabiliter productus, et ad haec ſub angulo acuto inflexus eſt: parte inflexa plana, et anteriora verſus ſenſim anguſtata. Scutellum, $1\frac{1}{2}$ lin. longum: apice obtuſo.

Elytra conuexa, parum marginata et inflexa, baſi ad angulum externum leui protuberantia, proxime ad commiſſuram linea longitudinali inſignita. Femora ex ouato oblonga, pilorum e poris contiguis prouenientium aliquot ſeriebus, ceu ſulcis longitudinalibus, inſtructa. Tibiae anticae, externo margine tridentatae, interno verſus extremitatem quarto dente, anguſtiore, acceſſorio terminatae. Faciem earum pronam, eiusdemque medium, longitudinalis pilorum ſeries, ſupinaeque latera duae aliae, medium vero linea eminens diſtinguit. Intermediae ac poſticae tibiae facie exteriore articulatim quaſi bis oblique inciſae, extremitate inferiore in dentem deſinunt, duobusque, praeter hunc, acceſſoriis inſtruuntur: exteriore breuiore, paululumque latiore, interiore longiore et anguſtiore. Inciſurarum, articulos mentientium, margines, vt et lineae quaedam ſcrobiculatae, pilos ſuſtinent. Pili hi, quibus et pedes exornantur, ceteris in abdomine diſtributis, longiores et craſſiores ſunt; omnes autem rigiditate ſuperant ii, quos in inciſurarum margi-

marginibus diſpoſitos eſſe diximus. Pedum extremorum, tam mediorum, quam poſticorum, articulus primus ſatis longus, inſerne latus, et in dentem extrorſum ſpectantem terminatus; ſecundus priore longe breuior ac minor, clauatus. Reliqui erant deperditi.

Scarabaei huius mentionem a ſolo, quantum mihi conſtat, *Swammerdammio* in Bibl. Nat. p. 143. verſ. germ. breuiſſimis tantum factam, iconemque non ſatis accurate elaboratam Tab. XXX. fig. 11, qua eius thorax et capitis cornu repraeſentantur, datam eſſe inuenio. Striae, quas lit. a. denotauit, et pro thoracis ornatu habuit, peſſime, ſub lacunarum forma, ſunt expreſſae, iisque nihil aliud, quam aream iſtam rugoſam, de qua ſupra dixi, exprimere Auctor voluit.

* * *

IV.

Scarabaeus thoracis cornu incuruo, maximo, ſubtus barbato; capitis cornu recuruato: ſupra dentato. *Linn.* Syſt. Nat. edit. dec. p. 345. no. 1. (Hercules).

Marcgr.

Marcgr. p. 246, et 247. f. 3. Enena ſ. Taurus volans IV.
Olear. Muſ. tab. XVI. f. 1. Scarabaeus buceros naſicornis.
Grew. Muſ. p. 162. The Toddy-Fly.
Petiv. gaz. tab. LXX. f. 1. Rhinoceros Amer. ciner. roſtro nigro, nitente.
Roeſ. ſcarab. tom. II. tab. A. f. 1.

OBSERVATIO.

Licet hic Scarabaeus ſatis iam cognitus, et a Cel. Roeſelio inprimis optime ſit deſcriptus, quaedam tamen, quae digna mihi viſa ſunt, vt innoteſcant, momenta in medium proferre, eo magis neceſſarium duxi, quo plus ad Inſecti hiſtoriam, et ad dubium quoddam reſoluendum, hancque ſpeciem ab alia, cum qua confunditur, facilius diſtinguendam conferre poſſunt.

Septem in Muſ. Petrop. aſſeruata indiuidua quaedam inter ſe habent communia, in quibusdam vero partibus vnum ab altero eſt diuerſum. In reſpectu ad prius valde miratus ſum, pronam a Roeſelio deſcripti ac delineati exemplaris faciem vnicolorem, e puniceo nempe nigricantem, cum omnium ſeptem, modo memoratorum, thoracis aeque ac capitis cornu nigrum, glabrum, ſplendensque, elytra vero coloris oliuarum, modo intenſioris, modo diluti magis, maculisque minoribus, ſubrotundis, a muſcis veluti conſpurcata, ſtriis etiam vagis, lineisque nigricantibus conſpurcata quaſi viderim; qua de re *Marcgraſium* etiam conſentientem habeo, omnes-

omnesque alii, quotquot de hoc Inſecto ſcripſerunt, eidem taciti aſſentiuntur. Momentum itaque hoc perpendens, elytra praeprimis accuratius adſpicere conſtitui, eaque, quae inueſtigatio mihi foret oblatura, Lectori communicare. Deprehendi autem, vernice, qua conſeruationis cauſa totum corpus erat obductum, ſeparata, pigmentum illud, colore fructus oliuarum, ſtratum eſſe tenuiſſimum materiae impellucidae, albicantis, cultelli apice facile abradendum, coloremque naturalem, quo ipſa elytrorum ſubſtantia erat imbuta, ſub eodem recondi, nec eius quicquam niſi ad maculas, ſtrias et lineas, vbi pigmentum illud deficit, apparere. Sic, abraſo omni pigmento, varietas iſta, a Roeſelio deſcripta, arte etiam producitur. Num autem elytra materiam iſtam albicantem ſub ipſa animalis metamorphoſi, vel poſtea demum exſudent, calore forte, diſſipata prius aquoſa parte, conſiſtentem, an artificium doloſe ſubſit, quaeritur? Poſterius vix credam, prius potius innumera probant puncta ſeu foraminula minima, quibus vndique pertuſum quaſi erat pigmentum, quaeque, abraſo hoc, ipſi etiam elytrorum ſubſtantiae impreſſa vidi. Aſt, vnde iſtae lineae, ſecundum elytrorum longitudinem plerumque ductae, et ad latera hinc et inde ramos de ſe ſpargentes? forſan ſubſtratis foraminulorum ſeriebus ſuam debent originem. Maculae vero ſubrotundae, vnde? an ab exſudantibus olei guttulis pigmentum

 illud,

illud, fluidum adhuc, et aquoſum forte reſpuentibus; an ab acri ſtirpis cuiusdam ſucco adſperſo, v. g. arboris Todoy ſ. Mammei dictae, cuius corticem cornubus perterebrare, ſuccoque eius e vulnere ſtillante hauſto inebriari Inſectum dicitur? Inde etiam forſan poſſet explicari, quam ob rem nonnulla indiuidua tota nigricent, ſi nempe larga eiusmodi diſſoluentis liquoris copia perfuſa fuiſſent elytra, qua pigmentum ſolutum, vel diffluerct, vel, friabile factum, ſenſim detereretur. An ab Inſecti cuiusdam, e. g. Muſcae, faecibus liquidis, pigmentum diſſoluentibus? Et ſtriae vagae, vnde? an a quibuscunque corporibus acutis, v. g. plantarum ſpinis foliisue pungentibus, quibus in curſu elytra ſua forſan adfricat Scarabaeus, quorumque veſtigia, pigmento nondum indurato denuoue emollito impreſſa, poſtea remanent. Vtut ſit, paradoxi huius rationem in vna alteraue adlatarum cauſa eſſe quaerendam, adeo perſuaſus ſum, vt opinionem, qua quis credere poſſet, dari inter Scarabaeos, vt inter homines, aethiopes aeque ac alios, nulla in ratione fundatam eſſe contendam. Obſeruaui enim, et obſeruare omnibus datur, ſimile quid in Inſectis nonnullis Europaeis, ex Coleopterorum claſſe, quorum vel vniuerſo corpori, vel elytris tantum farina quaedam, modo laxius, modo tenacius adhaeret, temporis ſucceſſu diſparitura; ita, vt priſtinum cum alio colorem mutaſſe ea facile quis crederet. Saepius

pius adeo leuiter adglutinata eſt corpori iſta farina, vt vel digito eam abſtergere poſſis.

Scarabaeum, vt vnicum tantum exemplum proferam, in Ducatu Würtembergenſi, Patria mea, copioſiſſimum, et Roſarum flores praecipue frequentantem vidi, cuius totum vere corpus farina ex virideſcenti-argentea erat obductum, qua ſenſim ſenſimque deperdita, caput et thorax obſcure viridi, nitente, elytra vero caſtaneo colore, tanquam naturali et immutabili, imbuta conſpiciebantur. Nec raro vno eodemque die plurima vtriusque varietatis exempla mihi obuenerunt. Fucatam etiam, detergendo farinam, in alteram extemplo transformare potui. Sed redeamus ad rem, circa quam omne ſoluant dubium ii, quibus Inſecta haecce vaſtiſſima in patrio ſolo, America nempe meridionali, videre continget. Sunt equidem, quas ſupra feci, merae coniecturae, quae, ſiue iis rem tetigerim, ſiue non, alios ſaltem ad vlteriorem disquiſitionem inuitabunt.

Tranſeo nunc ad ea, quae cuique peculiaria ſunt: Septem enim huius ſpeciei indiuidua non minorem, ac prima ſpecies, in magnitudine, et capitis cornu forma potiſſimum, offerunt differentiam:

Primus et maximus omnium, Roeſelianum adhuc ſuperans, a thoracis cornu extremitate ad poſticum corporis ambitum, 5 poll. 10 lin. longus;

gus; dentes, in capitis cornu medietate poſiti; tres: poſtico latiſſimo, et e duobus quaſi coalito; anterioribus duobus paruulis, $2\frac{1}{2}$ lin. inter ſe diſtantibus.

Secundus primo paullo minor; dentes tres: duo maiores, ſolitae magnitudinis, et proxime ante hos tertius, minimus.

Tertius, ſecundo magnitudine aequalis; dentes duo: poſticus minor, maior anticus.

Quartus 5 poll. 4 lin. longus; dentes duo, ſibi ſatis vicini, mediae magnitudinis: poſterior anteriore paullo maior.

Quintus 5 poll. 1 lin. longus; Dentes duo, aequales, ſolitae magnitudinis et diſtantiae inter ſe inuicem.

Sextus 4 poll. 3 lin. longus; Dentes tres: duobus ſolitae magnitudinis, et vnico proxime ad iſtorum anteriorem, minimo.

Septimus et omnium minimus, vtpote 2 poll. 10 lin. tantum longus, tam in reſpectu ad thoracis, quam capitis cornu a caeteris omnibus non parum abludit: dentes enim bini, qui alias circa cornu thoracis medietatem ſuum tenere locum ſolent, eius principio ſeu anteriori thoracis parti proximi et minimi ſunt. Ceterum idem cornu, vt in omnibus, ſubtus barbatum, inque extremo emarginatum eſt, hoc tamen cum diſcrimine, vt pili nusquam

quam ſint interrupti, cuiusmodi tamen veſtigium in reliquis omnibus, ab impreſſione capitis cornu ortum, videre licuit, certo indicio, modo dictum cornu barbatam thoracis cornu ſuperficiem nunquam attigiſſe; Nec attingere eam ob nimiam breuitatem potuit; eſt enim $4\frac{1}{2}$ lineas tantum longum, vnico dente, ſatis quidem notabili, in medio inſtructum, et in ſimplicem pariter apicem, vt ceterorum omnia, deſinit, licet dente, quem prope cornu extremitatem omnia habebant indiuidua, plane careat. Vid. ic. Tab. III. f. 1.

Denique amice monere mihi liceat, Cel. *Linnaeum* in citandis huius ſpeciei ſynonymis leuiter erraſſe, quod in Syſt. Nat. edit. dec. p. 345. no. 1. ex *Swammerdammii* Bibl. Nat. iconem huc retulerit; hac enim ſequentis, et diuerſiſſimae a praeſenti, ſpeciei imago exprimitur. Scarabaeum tamen, de quo nunc agitur, cognitum fuiſſe *Swammerdammio* ex Hiſt eius Inſ. generali (*a*) elucet, in qua p. 105. §. XXV. ſequentia legimus: „alia quaedam eorum ſpecies nobis —— eſt, quae verſus humeros deorſumque arcuata oſtendit naſi cornua, ſed intus quatuor dentatis eminentiis dotata, cuiusmodi quoque inſecta prominulum habent longiſſimum cornu ex oſſe humeri, lumborum et thoracis promiſ-

 ſum,

(*a*) edit. ſec. Vltraiect. 1693.

ſum, quod in interiore ſinuatione pilis ſetoſis aureum colorem aemulantibus inſtar panni heteromalli lanei tangentis manum adficit. Eadem in Bibl. Nat. germ. verſ. p. 118. repetit Auctor, et p. 119. „maximum Naſicornuum ſex pollices eſſe longum, vnumque cum dimidio latum„ ſuperaddit; iconem autem eius tradidiſſe, non inuenio.

* * *

V.

Scarabaeus thorace in cornu imberbi, ſubincuruum, antrorſum prolongato; naſi cornu vnidentato, ſubrecuruo; extremitate vtriusque bifida

Swamm. Bibl. Nat. Tab. XXX. f. 2.
Roeſ. Scarab. Tom. II. p. 17. Tab. A. f. 5.

OBSERVATIO.

Superfluum foret, integram huius Scarabaei concinnare deſcriptionem, quum in ea, quam Roeſelio debemus, nihil ſit, quod deſideretur. Quatuor equidem poſſidemus indiuidua, quorum tria inſoliti nihil prae ſe ferunt, quartum autem, quod ratione cornuum a ceteris multum differt, leui adumbra-

vmbratione dignum mihi viſum eſt; Thoracis enim cornu breuiſſimum, et in extremitate leuiſſime tantum ſinuatum; capitis cornu ſolito etiam breuius, bifidum tamen in extremo, denteque in medio, vt cetera, eſt inſtructum, vti ex figura apparet luculenter. Magnitudo etiam huius indiuidui 1 poll. 8 lin. tantum exaequat, cum ex illis maximum a thoracis cornu extremo ad poſticum corporis ambitum 2 poll. 4 lin. longum ſit. Tab. XII Fig. 4.

DE-

DESCRIPTIO
FVCI FOLIACEI,
FRONDIBVS FRVCTIFICANTIBVS PAPILLATIS.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Quum in hiſtoria Fucorum plurima, quae ad partes fructificationis eorumque propagationem pertinere videntur, in hunc vsque diem oculatiſſimos etiam lateant Botanicos; operae pretium eſſe duxi, vt ſpeciem huius generis plantarum minus cognitam et ſtructura maxime ſingularem, quam VIR PERILLVSTRIS, Baro de STROGANOFF, vt omnium ſcientiarum, ita et Hiſtoriae naturalis inprimis ſummus cultor et maecenas omnium maxime depraedicandus, ex Mari albo ad locupletiſſimum ſuum rerum naturalium theſaurum miſſam accepit, acceptamque pro eo, quo eruditos amplecti aſſolet, fauore mecum communicauit, non tantum accuratius deſcriberem, quam a *Moriſono* olim et inter recentiſſimos Hiſtoriae naturalis ſcriptores ab Ill. *Linnaeo*, quorum vterque breuiſſimis tantum verbis eam deſcripſit, factum eſſe ex integra, ab vtroque data, deſcriptione hic expoſita videre eſt, verum

rum etiam meliorem eius delineationem, quam *Moriſonus* exhibuerat, ſuppeditarem. Eſt autem haec planta:

Fucus foliaceus, frondibus fructicantibus papillatis.

Tab. XIII. Fig. 1.

Fucus fronde dichotoma plana integra: apicibus bifidis veſiculoſis. *Linn.* Fl. Lapp. 465. Fl. Suec. 1005. Spec. Pl. T. II. p. 1157. no. 3. (ceranoides).

Fucus humilis dichotomus ceranoides, latioribus foliis, vtplurimum verrucoſis. *Moriſ.* hiſt. III. p. 646. ſ. 15. t. 8. f. 13.

DESCRIPTIO.

Tab. XIII. Fig. 1.

Caulis † perbreuis (ſine dubio mutilatus), † *a.* tenuis, teres, obſcure fuſcus, in frondes † deſinens. † *b. b. b.* etc. *Frondes* e caule promiſſae circiter tredecim, valde ſibi approximatae, foliaceae, rigidae, fragiles, aetatis et magnitudinis diuerſae, coloris e fuſco nigricante et e bruno flaueſcente variegati. Color e fuſco nigricans in planta luci obuerſa hinc et inde ſub violaceo purpuraſcente apparet. Quaelibet illarum e petiolo †, cauli craſſitie non multum cedente, ſubtereti, ſenſim lateſcit, inque foliaceam formam expanditur, plus minusue regularem. Diuidi poſſunt hae frondes in duo potiſſimum genera: alterum tenellarum, *glabrarumque* †, alterum adulta- † *c.* † *d. d.*

 rum,

† *e. f.* rum, papillis conicis obſitarum, *fructificantium* †. Illarum vndecim ſunt, a duarum linearum ad duorum fere pollicum longitudinem accedentes, integerrimae. Harum duae, tenellis multo maiores, tres quatuorue ſc. pollices longae, et circa maximam ipſarum latitudinem vnum pollicem latae, ab
† *g. g.* vtraque facie *papillis* † conicis, plurimis, ſub angulo fere recto prominentibus, maximam partem impellucidis et ab ipſa frondium ſubſtantia, vtpote rariore et ſubpellucida, facile diſtinguendis, praeditae.
† *b.* Petiolum verſus † rariſſime occurrunt iſtae papillae,
† *g. g.* circa inferiorem vero frondis partem † omnium
† *e.* maxime confectae ſunt. Differt tamen vna † harum
† *f.* frondium ab altera † 1) papillis longioribus, lineam fere aequantibus, inter ſe ſatis aequalibus, et per
† *f.* omnem folii ambitum diſtributis, cum in altera † vix dimidiam lineam attingant maximae, in inferiore folii parte locatae, eaeque denſius ſtipatae,
† *i.* quam in ſuperiore †, in qua parciori numero ex-
† *l.* ſtant, leuesque tantum referunt et in rugas † quaſi confluentes prominentias; 2) *punctis* minimis, plurimis, obſcurioribus, quae per ipſam folii, nec non papillarum ſubſtantiam hinc et inde ſunt dis-
† *f.* perſa; his enim altera † frons penitus carere videtur; 3) margine integerrimo, qui in altera vnica
† *m.* lacinia † grandiore inciſus eſt. Forſan autem haec inaequali frondis ſicceſcentis contractioni ſuam debet originem.

Ita

Ita ſe habuit planta in ſicco ſtatu. Mutationes autem, quas frons altera † fructificans, punctis praedita, in aquam immerſa paſſa eſt, hae ſunt: breui ſcilicet intumeſcebat, tam ambitu quam craſſitie inſigniter aucta. Subſtantia, antea rigida et fragilis, elaſtica euadebat et flexilis, gelatinae inſtar concretae. Colores obſcuriores prius in dilutos valde mutati. Quo antea penitus priuata erat planta, nunc odorem ſpargebat muſci corallini. Lentor magna in copia defluebat ab omni ſuperficie, aquam viſcoſitate ſua imbuebat omnem, eandemque turbulentam reddebant ramenta variae magnitudinis herbacea, *corpuſculorum ellipticorum* †, minimorum, innumerorum, *fibrillarumque* tenuiſſimarum † ſoluta congeries. Vna cum his ramentis punctorum iſtorum, in ſicco ſtatu obſcuriorum, nunc vero purpuraſcentium, etiam nonnulla defluebant, plurima tamen ſubſtantiae arcte inhaerentia perſiſtebant, nec ab ea, niſi vi aliqua adhibita, auelli aut reſcindi patiebantur. Sunt autem haec puncta nihil aliud, quam *corpuſculorum oblongorum* †, purpuraſcentium, corpuſcula iſta elliptica, quibus immerſa ac permixta ſunt, magnitudine longe excedentium congregationes. Numerus eorum in ſingulo puncto haud exiguus eſt, ſc. ad 300 aut 400 circiter accedens. An corpuſcula haec oblonga ipſa plantae ſemina, an vero puluis maſculus, foecundans? et, an in lentore iſto corpuſculisue ellipticis vis lateat

† *ε.*

Tab XIII. Fig. 2.

† *η.*

† *θ.*

† *γ.*

ſeminalis, impraegnans? anceps valde et difficilis eſt controuerſia; detexiſſe haec omnia in praeſens ſufficiat.

Explicatio Figurarum.

Fig. I. Planta in naturali magnitudine.

Fig. II. Punctum, corpuſculorum oblongorum, purpuraſcentium congregationem ſiſtens, lente microſcopii Cuffiani ſimplicis No. 3. auctum.

AVES

AVES INDICAE RARISSIMAE ET INCOGNITAE.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

I.

Merops fuſcus; ani regione flaua; cauda ex incano nigricante, longiſſima.

Tab. XIV. Fig. 1.

An? Merops griſeus, ani regione flaua, cauda longiſſima. *Linn.* ſyſt. nat. edit. dec. Holm. 1758. p. 117. no. 4. (caſer.).

DESCRIPTIO.

Corporis magnitudine ad Turdum *muſicum* accedit. Roſtrum modice arcuatum, 1 poll. 2 lin. longum, in transuerſum ad baſin 2½ lin. latum, nigrum: mandibulis aequalibus. Carina vtrinque ad mandibulae ſuperioris baſin, vltra 3 lin. extenſa, nares lineares includit. Caput, dorſum et alae fuſci coloris: pennularum oris ſubteſtaceis, remigumque ſcapis e bruno rufeſcentibus. Frontis pennulae pallide teſtaceae, ſcapis nigricantibus. Mentum, gula et pectus, teſtacea ſiue e luteſcente pallide brunnea, extre-

extremitatibus pennularum, pectoralium praeſertim, albentibus. Pennulae abdominis fuſcae in medio, ad oras albae. Ani regio flaua, citrina. Cauda corpore duplo fere longior, nouem ſc. poll. pariſinorum, rectricibus duodecim compoſita, quarum ſex longiſſimae, flexiles, eiusdem fere inter ſe longitudinis, ex incano nigricantes; ceterae his breuiores inaequales, 2, 3 et 4½ poll. longae, fuſcae. Pedes nigricantes, ſquamoſi, vt in Turdis. Tibiae nouem lin. longae. Digiti fiſſi: tres antici, pone vnus, vnguibus aduncis inſtructi.

* * *

II.

Tab. XIV. Fig. 2. *Certhia* corpore ſupino viridi; gula lutea; pectore abdomineque ex viridi et luteo variegatis.

DESCRIPTIO.

Magnitudine Certhiam *Europaeam* parum ſuperat. Roſtrum ab angulo oris ad apicem 9. lin. longum, ad frontem duas lin. latum, modice incuruum, fuſcum. Totum ſupinum corpus, ſc. frons, vertex, occiput, collum, dorſum et vropygium viridis pſittacei coloris. Spatiolum iſtud mandibulae

dibulae ſuperioris baſin ſiue nares inter et oculos, vt et mentum, gula, infimumque abdomen, lutea. Regio ſupra - et infraorbitalis, temporum auriumque ambitus coloris e pallide luteo et fuſco mixti, ſtriati. Plumularum linea, vtrinque ab angulo oris retrorſum ducta, coerulea. Pectus et abdomen ex luteo et viridi variegata, ſtriata. Alae cum ſuis tectricibus maxima ex parte virides. Remiges fuſcae, margine exteriore plus minusue viridi ſordidiore colore tinctae. Tectrices ſupra caudam totae virides. Cauda breuis, verſus extremitatem modice diuiſa: rectricibus in ſupina facie viridibus externa parte apicibusque, interna fuſcis; in prona vero ſubincanis, leuique virore renitentibus. Pedes cum vnguibus fuſci.

* * *

III.

Paſſer e violaceo nigricans, fronte, mento, gula, pectore abdomineque ſaturate flauis. Tab. XIV. Fig. 3.

An? Fringilla violacea, fronte ſubtusque flauiſſima. *Linn.* ſyſt. nat. edit. dec. Holm. 1758. pag. 182. no. 25.

DESCRIPTIO.

Paſſere *domeſtico* paulo minor. Roſtrum nigricans: mandibula ſuperior modice arcuata et angulata

gulata in medio, margine laterali ad baſin protuberante, hinc vero ad apicem incuruum vsque inflexo; mandibula inferior recta, margine non niſi infra medietatem quadantenus impreſſo.

Totum caput, excepta fronte, collum deorſum, tectrices alarum et vropygium coloris e violaceo nigricantis, qualis v. g. hirundinis domeſticae. Remiges e fuſco nigricantes, margine exteriore maximam partem e violaceo virideſcente, ſummo autem extremitatem pennarum ſecundariarum verſus pallide flaueſcente. Flauo colore, eoque ſaturatiore, in aurantium inclinante, frons, mentum, gula, pectus, minus ſaturato, ex aurantio in citrinum ſenſim mutato, abdomen et tectrices ſub cauda, tincta ſunt. Cauda breuis: rectricibus nigricantibus, margine exteriore e violaceo vireſcentibus; harum duae infimae interiore parte albae, exteriore vero et apicibus pariter nigricantes. Pedes e fuſco nigricantes. Vngues brunnei.

* * *

IV.

Tab. XV. Fig. 4. *Fringilla* viridis, capite ſpadiceo, pectore abdomineque cyaneis; baſi alarum flaua.

An? The Red-headed Green-Finch. *Edward.* Tom. 1. p. 23. tab. 23.

DE-

DESCRIPTIO.

Magnitudo Alaudae *pratenſis.* Roſtrum fuſcum. Caput totum vna cum mento ſaturate ſpadiceum. Vltimas occipitis plumas ſpadiceas anguſta ſequitur ſeries flaueſcentium, illis et colli viridibus plumis interpoſitarum. Collum, dorſum, pectoris et abdominis latera, alae, vropygium, ani regio, et cauda, viuide viridi ſeu pſittaceo colore refulgent, Pectoris et abdominis medium cyaneum. Baſis alarum flaua. Remiges primores maxima ex parte nigricantes, nec niſi exteriore, eoque anteriore margine viridi colore tinctae. Ita etiam cum rectricibus lateralibus comparatum eſt, quarum exterior tantum pars viret, interiore in nigricantem vergente. Interior alarum ſuperficies ſubfuſca, caudae inferior incana, diluto valde virore renitens. Plumae femora ad genua vsque inueſtientes dilute ſpadiceae. Pedes cum vnguibus pallide brunnei. Quibus praecipue notis haec auis differat ab iſta *Edwardi*, e deſcriptione ſatis patet. An ſexus varietas? an vero colores capitis et femorum in noſtrate caſu mutati?

* * *

V.

Curruca nigra, fronte alba; abdomine croceo; vropygio cyaneo. Tab. XV. Fig. 5.

DESCRIPTIO.

Inter Currucam *fuſcam* et Luſciniam *ſalicariam* mediae circiter magnitudinis. Roſtrum nigrum: mandibula ſuperior angulata, apice incuruo. Frons late alba; areae huius margo vertici nigro contiguus coeruleſcens. Ceterum totum caput, collum, mentum, gula, pectus, dorſum, alae et cauda, fuliginis inſtar nigra. Imum abdomen ſaturate flauum, et croceum fere. Vropygium, ſeu tectrices ſupra caudam, coloris cyanei ſiue vltramarini. Cauda breuis, ſuper alarum compoſitarum extremitates vix eminens. Pedes et vngues e brunneo fuſci. Medius horum lateralibus duplo fere maior, poſticoque aequalis eſt.

* * *

VI.

Tab. XV. Fig. 6. *Fringilla* coerulea, mento, gula, alarum baſi, dorſique parte antica nigris.

DESCRIPTIO.

Magnitudo Linariae *maioris*. Roſtrum fuſcum, ſubulato-conicum, acutum, ab oris angulo ad ipſius apicem $5\frac{1}{8}$ lin. longum; hinc longius et tenuius, quam

quam in plerisque huius generis ſpeciebus. Caput coeruleum, excepta ſtria latiore, inter oculos et nares, nigra. Collum coeruleum, mentum vero et gula nigra. Anterior dorſi pars plagam exhibet ſemicircularem nigram, vtrinque crure quaſi concolore antrorſum producto confluentem cum nigredine baſis alarum latiore. Plagam iſtam arcus ſequitur latus coeruleus, eidemque parallelus, media ſui parte cum reliquo dorſi et vropygio, quae pariter coerulea ſunt, confluens. Pectus, abdomen, ani regio et tectrices ſub cauda coerulea. Remiges e fuſco nigricantes, margine exteriore coeruleo colore imbutae, eodemque latius extenſo in ſecundariis, quam in primariis. Quicquid autem in hac auicula coeruleum vel vltramarinum eſt, ſub alia radiorum reflexione viridis aeris colorem refert. Cauda aequalis, e fuſco nigricans. Pedes et vngues pallide brunnei.

* * *

VII.

Cornix atra; capite, collo pectoreque, flauis. Tab. XV. Fig. 7.

DESCRIPTIO.

Magnitudine ad Loxiam *curuiroſtram* circiter accedit. Roſtrum ſatis productum, forte e fuſco nigri-

nigricans: margine mandibulae ſuperioris marginem interioris recipiente. De extremitate roſtri, quae in hoc indiuiduo mutilata eſt, non conſtat, an recta et acuta fuerit, an vero incurua obtuſaue. Omnem fere roſtri baſin et ambitum circa caput, excepta parte fronti proxima, plumae nigrae rariores occupant, iisdemque interſtitium etiam, quod inter roſtri angulum et oculos occurrit, obſitum eſt. Totum caput, collum et pectus flauo, citrino, reliqua vero corporis omnia atro colore tincta. Vropygii pennulae, caudaeque ſuperior ſuperficies prae ceteris hoc habent ſingulare, quod ex atro ſplendorem emittant violaceum. Inferior caudae ſuperficies ex incano pallide nigricans; ceterum cauda aequalis. Pedes e fuſco nigricant, vti et vngues; poſticus horum, reſpectu anticorum, ſolito maior.

* * *

VIII.

Tab. XVI. Fig. 8.

Lanius capite, collo pectoreque e violaceo nigricantibus; digitis duobus anticis, totidemque poſticis.

DESCRIPTIO.

Lanio *cinereo maiore* paulo maior. Roſtrum albicans, verſus nares plumbeum, apice angulato adunco

adunco mandibulae ſuperioris obtuſiore, ſuper exſciſſum ſurſumque flexum mandibulae inferioris apicem deflexo. Longitudo eius ab oris angulo ad apicem 10 lin. Latitudo ad radicem frontalem nudam (omni nempe cera caret) 6 lin. abvno vero ori angulo ad alterum 9 linearum; hinc roſtrum ſubtriangulare, robuſtum, rictusque oris capax. Nares pennulis ſetaceis, rigidis, nigris obtectae. Setae etiam eiusmodi, ſed longiores, ad mandibulae inferioris baſin. Frons, oculorum auriumque ambitus, nigricant; reliquum vero capitis, collum ac pectus, e ſaturate violaceo nigricantia. Palpebrae luteae. Totum dorſum cum vropygio viride, ſaturatum, ſplendore aureo refulgens. Alae fuſcae: remigibus primariis immaculatis, ſecundariis parte exteriore punctis minimis albentibus, plurimis et haud raro confluentibus conſperſis; ſimilibus etiam punctis tectrices notatae. Abdomen totum, vt et tectrices ſub cauda viridi aurantii coloris. Tectrices ſupra caudam e coeruleſcenti virides, deauratae. Cauda longa, aequalis, mollis, rectricibus duodecim compoſita, quarum ſex ſuperiores, eiusdem inter ſe longitudinis, e coeruleſcenti virides partim, partim nigricantes: ſc. ſupremae duae pennae illo totae imbutae colore, exceptis extremitatibus, nigris; reliquae vero quatuor exteriore tantum parte vel margine, ceterum totae nigricantes; ſubſtratae vero his aliae ſex, nigrae, extremitatibus et zonis

 pluri-

plurimis transuerſis albis notatae, illis breuiores, et inter ſe, per paria, longiores. Pedes, habito ad auis magnitudinem reſpectu, parui admodum, et, quod maxime ſingulare, picorum pedibus ſimillimi: tibiae ſc. perbreues, pennulis nigris, ad imum fere vsque, veſtitae; digiti tenues, vnguibus breuibus et modice incuruis muniti, duo antici, totidemque poſtici. Illi a baſi ad duas vsque lineas inter ſe concreti, exteriore interiorem longitudine parum ſuperante; hi vero diſtincti, illis breuiores: exteriore maiore, interiorem notabiliter excedente.

* * *

IX.

Tab. XVI. Fig. 9. *Loxia* atra; vropygio flauo.

DESCRIPTIO.

Magnitudine Loxiam *curuiroſtram* fere exaequat. Roſtrum aequale: mandibula ſuperiore nigricante, inferiore ſordide albicante. Caput, collum, dorſi maxima eaque anterior pars, gula, pectus, abdomen, ani regio, cauda et tectrices ſub cauda, atra. Plumae capitis et colli a reliquis ſe diſtinguunt, quod laxius ſibi inuicem incumbant, firmioris ſint ſubſtantiae, et, cincinnatae leuiter, reuolutas quaſi et transuerſim reſciſſas habeant extremitates.

mitates. Splendore quodam renitent omnes, exceptis dorſualibus, quae eo carent, nigrae potius quam atrae dicendae. Alae fuſcae: tectrices omnem alarum baſin, crepidinem, internamque earum faciem circa baſin obtegentes, flauae ſeu citrinae; ceterae tectrices maiores, at pauciores numero, fuſcae vel totae, vel margine tantum extremo pallide flaveſcentes, partim alarum baſi flauae ſuperſtratae, partim medium earum occupantes. Remigum extremus margo pariter flaueſcens. Extremum dorſum, et vropygium flaua ſiue citrina tota. Plumae inferiorem femorum extremitatem inueſtientes pallide fuſcae; vt et pedes vnguesque. Medius horum lateralibus duplo maior; poſticus vero omnium maximus, ſatis arcuatus, tenuis et acutus.

* * *

X.

Turdus niger; faſcia capitis longitudinali, vropygioque luteis; baſi alarum alba. Tab. XVI. Fig. 10.

DESCRIPTIO.

Magnitudo Turdi *muſici.* Roſtrum nigrum, ab angulo oris ad apicem $6\frac{1}{2}$ lin. longum. Faſcia capitis longitudinalis lata, a media fronte, per verticem

ticem, ad occiput vsque ducta, lutea, antice flaveſcens. Caput, mentum, gula, collum, pectus, dorſum, alarumque tectrices maiores atra, nitida. Zona lata, per alarum baſin oblique ducta, e tectricibus minoribus compoſita, alba. Remiges omnes, abdomen, tectrices ſub cauda, et ipſa cauda nigra; exceptis huius ſcapis, ſubtus e rufo brunneis. Vropygium late luteum. Pennulae abdominis laterales nonnullae, in femorum regione, e flaueſcenti ferrugineae; ipſa vero femora ad genua vsque pennulis nigris obtecta. Pedes et digiti cum vnguibus pallide fuſci. Vngues tres antici minimi, vix incurui; poſticus ſatis magnus et arcuatus.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

BREVIS EXPOSITIO OBSERVATIONVM OCCASIONE TRANSITVS VENERIS PER SOLEM IN VRBE SELENGINSK AN. 1761. INSTITVTARVM.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKY.

Quanta auiditate expectauerint Aſtronomi memorabilem illam diem, qua Venerem in Sole conſpicuam Tabulae annunciabant, quanta ſe praeparauerint diligentia ad inſtituendam ipſius obſeruationem, quantosque in eam ſumtus Europae Principes impenderint; ſatis notum eſt. Permotus grauitate rei, Illuſtriſſimus Academiae Praeſes quoque voluit, vt in Ruſſici Imperii partibus Orientalibus phaenomeni huius obſeruationes inſtituerentur, eoque fine praeter Cl. *Popouium*, Conſiliarium Aulicum et Aſtronomiae Profeſſorem, et ego juſſus ſum, in Sibiriam proficiſci, vt in vrbe *Nertſchinsk*, aut ſi fieri poſſet, in vrbe *Jakutsk*, memorabilem hanc obſeruationem perficerem.

Munitus, quibus opus erat, inſtrumentis, Petropolin relinquebam d. 14. Ianuarii. Cum vero

 d. 16.

d. 16. Martii itinere hactenus ſatis felici in vrbem *Irkutsk* perueniſſem, dubitare incepi, an in poteſtate foret, vrbem *Nertſchinsk* attingere; niues enim iam fundebantur, atque vlterius iter proſequi, niſi et me et inſtrumenta certo periculo exponere vellem, vix licebat. Neque tamen in vrbe *Irkutsk* ſubſiſtere poteram, cum ſcirem, hunc locum elegiſſe ſibi Cl. *Popouium*, cuius aduentus quotidie expectandus erat. Periculum tamen facturus, an vrbem *Nertſchinsk* adhuc attingere liceret, ſine mora iter ingrediebar. Aſt montes et deſerta arenoſa traiicienda a propoſito me deſiſtere cogebant. Mutato itaque conſilio, in vrbem *Selenginsk* proficiſcebar, quo non ſine periculo tandem d. 25. Martii perueniebam.

Perhibebant vrbis incolae, et breui tempore propria experientia me docebat, locum, vbi neceſſitas pedem figere me adegerat, ob inconſtantiam tempeſtatis inſtituendis obſeruationibus aſtronomicis parum aptum eſſe: verum id ſolatio mihi erat, quod longe adhuc huic fini ineptiorem aſſererent omnes vrbem *Nertſchinsk*, quo proficiſci primum mihi propoſueram. Sine mora itaque de Obſeruatorio in colle, cui arx inaedificata eſt, quam citisſime exſtruendo cogitabam, quod d. 13. April abſoluebatur, ac etſi ex ligno, ſatis tamen ſolide, conſtructum erat. Pars pauimenti ea, vbi quadrans aliaque inſtrumenta locanda erant, lateribus ſternebatur,

batur, et ad horologia ſuſpendenda infigebantur terrae trabes duae ad profunditatem aliquot vlnarum, nullam cum aedificio connexionem habentes. Eodem tempore machinam parallacticam conſtruendam curabam, qua pro obſeruationibus, quas inſtituturum me ſperabam, opus erat.

In obſeruatorium hoc d. 16. Aprilis transportabam inſtrumenta ſequentia:

1) Quadrantem Aſtronomicum micrometro inſtructum radii duorum circiter pedum, a perito Artifice *L'Anglois* Pariſiis magna diligentia elaboratum.

2) Horologia pendula bina, quorum id, quod praecipue in vſum vocaui, a Dn. *Julien Le Roi* elaboratum eſt.

3) Machinam parallacticam et cum aliis tubis tubum dioptricum, cuius lens obiectiua, Londini elaborata, diſtantiam focalem habet 15. ped. Lond. Tres ad manus erant lentes oculares, quarum ea in omnibus obſeruationibus vſus ſum, quae meliorem effectum praeſtare mihi viſa eſt, et cuius diſtantia focalis erat 2. 52. dig. Lond. et a. d. 18. April. labores meos incipiebam, quos breuiter iam enarrabo, iunctis tamen omnibus circumſtantiis, quo eo ſecurius lectores de fide, quam obſeruationes meae merentur, iudicare queant.

OBSERVATIONES
Pro determinanda Latitudine Vrbis Selenginsk inſtitutae.

D. 18 April. inſtituebam quadrantis verificationem ad horizontem. Reducto quadrante in ſitum verticalem, obiecti ad 1750. ped. Lond. circiter diſtantis altitudinem inueniebam, ſumendo ex pluribus medium 90° —— 2 Reu. 81½. par. cent. Dein quadrante inuerſo, ac ope menſulae, cuius altitudo circiter quadrantis radium aequabat, eleuato, eiusdem obiecti altitudinem reperiebam 90° —— 2. Reu. 95. p. cent. vnde pro corrigendo errore filum micrometri fixum 6½. p. cent. deprimebam. Quoniam obiectum, quod pro verificando quadrante elegeram, propinquius erat, quam vt pro infinite diſtante haberi poſſet; operam dedi, vt centrum lentis obiectiuae in ſitu inuerſo quadrantis aequaliter a pauimento diſtaret, ac in ſitu recto, quod ope menſulae antea commemoratae ſufficiente cum exactitudine obtinui: ad ſummum enim in ſitu inuerſo dimidio pollice magis eleuata erat lens obiectiua, quam in ſitu recto fuerat; aſt error inde oriundus ad ſummum 2″½. efficere, atque hic contemni poteſt.

Valorem partium micrometri, quadranti affixi, determinaueram Petropoli, antequam iter ingrederer. Anno namque 1760, collocato quadrante in

in meridiano, menſurataque Diametro Solari, inveneram

	Part. micrometri.	Diam. ☉lis in Cal. Aſtron. Pariſino
d. $\frac{30}{11}$ $\frac{Sept.}{Oct.}$	10 Reu. 33. part. cent.	32′. 11″.
d. $\frac{20}{31}$ Oct.	10 — $36\frac{1}{2}$ - -	32. 19.
d. $\frac{21}{1}$ $\frac{Oct.}{Nov.}$	10 — 38 - -	32. 22.

Hinc valor vnius partis centeſimae colligitur ex obſeruatione

Ima . . .	1″. 52‴. 1.
IIda . . .	1. 52. 7.
IIItia . . .	1. 51. 2.
Medium . . .	1. 52.

D. $\frac{21}{2}$ $\frac{April}{Maii}$ altitudinem Spicae Virginis meridianam inueniebam 28°. 50′. + 3. Reu. 58. part. cent.

	29°. 1′. 8″. $\frac{1}{3}$.
Refractio . . .	1. 56.
Altitudo refract. correcta . .	28. 59. 12. $\frac{1}{3}$.

Declinatio Spicae Virginis

ineunte A 1761. Auſtr. .		9°. 54′. 20″. 2.
* Deuiatio	+	7. 9.
Praeceſſio	+	5. 3.
Aberratio	+	7. 6.

Declin.

* Correctiones has, ex Deuiatione, Praeceſſione et Aberratione oriundas, elicui ex Tabulis, quas Cel. de la Caille in *Aſtronomiae fundamentis* ſuppeditauit.

Declin. Spicae Virg. app. ad 21. April.	+ 9. 54. 41.
Complementum altitud. Poli	38. 53. 53. $\frac{1}{3}$.
Latitudo vrbis *Selenginſk*	51. 6. 6. $\frac{2}{3}$.

Eadem die altitudo Arcturi meridiana erat 59°. 20′.

+ 0 Reu 22. part cent.	59°. 20′. 41″.
Refractio . . .	38.
Altitudo refractione correcta . .	59. 20. 3.

Declinatio Arcturi ineunte Ann. 1761. Borealis . .	20°. 26′. 31″. 2.
Deuiatio	— 5. 2.
Praeceſſio	— 5. 3.
Aberratio	— 11. 7.
Declinatio Arcturi appar. ad 21. April.	— 20. 26. 9.
Complementum altitudinis Poli	38. 53. 54.
Altitudo Poli quaeſita	51. 6. 6.

D. $\frac{22\ \text{April}}{3\ \text{Maii}}$ micrometrum tractans ſentiebam, cochleam micrometri non ſatis libere circumagi, ac intus puluiſculos haerere: quam ob rem ſoluto purgatoque micrometro, eadem die denuo quadrantis verificationem inſtituere opus erat. Faciebam hoc dirigendo tubum in idem obiectum ad horizontem, quo d. 18. April. vſus eram. In ſitu recto quadrantis altitudinem eius inueniebam 90°. — 2 Reu. 82$\frac{1}{3}$, p. cent in ſitu inuerſo autem 90°. — 2 Reu. 94$\frac{1}{3}$, p. cent. Depreſſo igitur filo immobili micrometri ad 5$\frac{1}{2}$, p. cent.

D. $\frac{26\ \text{Apr.}}{7\ \text{Maii}}$

D. $\frac{26 \text{ April}}{7 \text{ Maii}}$ rurſum capiebam altitudines meridianas Spicae Virginis ac Arcturi.

Illius altitudinem reperiebam 29°. + 0. Reu. 36½. p.c.	
	29°. 1′. 8″.
Huius autem 59°. 20′ + 0: Reu. 28 p.cent.	59. 20. 52.
Vnde ex prima obſerv. alt. Poli colligitur	51. 6. 7.
Ex altera vero . . .	51. 5. 55.

Quo certior euaderem de ſtatu quadrantis, d. 5. Maii denuo verificationem illius ad horizontem repetebam. Obiectum, quod in vſum vocabam, ſemper mihi erat idem, cuius altitudinem in ſitu recto quadrantis inueniebam 90°. − 2. Reu. 85⅔. p. cent. in ſitu autem inuerſo 90°. − 2. Reu. 87⅖. p. cent. vnde, ſi quis fuit, in verificatione error, contemni potuit.

D. $\frac{1}{12}$. Iunii altitudinem meridianam Arcturi inveniebam 59°. 30′ − 2. Reu. 99½. p. cent. = 59° 20′. 41″.

Vnde adhibitis iisdem in declinationem correctionibus, vt ſupra, altitudo Poli quaeſita prodit . . . . . 51. 6. 6.

Obſeruationem hanc omnibus reliquis praeferendam cenſeo. Arcturus enim culminabat hac die, tempore crepuſculi veſpertini, paulo poſt Solis occaſum, vnde in obſeruatione inſtituenda, neque filum micrometri, neque filum penduli, ex quadrantis centro pendentis illuminari opus erat.

Cepi quoque aliquas Solis altitudines meridianas, et ex ipſis Latitudinem Obſeruatorii mei elicui: d. nempe $\frac{22}{2}$ $\frac{Iulii}{Aug.}$ altitudinem meridianam limbi Solis ſuperioris inueniebam 57° — 0. Reu. 19. part. cent. ſeu 56°. 56′. 27″. 40‴. Poſita autem Semidiametro Solis 15′. 50″. 10‴. ac refractione — parallax. 32″. 12‴.

Altitudo centri Solis fit .	56°. 40′. 5″, 3
Declinatio Solis Borealis .	— 17. 46. 18. +
Complement. altitud. Poli	38. 53. 47.
Hinc altitudo Poli . .	51°. 6′. 13″.

D. $\frac{2}{13}$. Aug. altitudinem meridianam limbi Solis ſuperioris inueniebam 54°. — 3. Reu. 10½. p. cent. = 53°. 50′. 20″. 17‴. Poſita autem Semidiametro Solis 15′. 52″. 15‴. ac refr. — par. 38″. 30‴.

Altitudo centri Solis fit .	33°. 33′. 49″, 4
Declinatio Solis Borealis —	14. 39. 58, 5
Complementum altit. Poli .	38. 53. 51.
Altitudo Poli	51. 6. 9.

Sumendo autem medium omnium ſupra recenſitarum altitudo Poli quaeſita prodit 51°. 6′. 6″.

Ad definiendam Declinationem Solis pro meridie Obſeruatorii mei ſuppoſui differentiam Meridianorum Pariſienſis et Selenginskenſis 7. hor. praeciſe, qua ſuppoſitione in ſequentibus quoque vtar, donec

donec veram ex obſeruationibus meis reſpondentibus eliciam.

Obſeruatio Eclipſeos Solaris d. $\frac{22}{3}$ Maii Iun.

Ex quo Horologia pendula in Obſeruatorium transportaueram, tam ope altitudinum Solis correſpondentium, quam ope tranſitus ſtellarum quarundam, per tubum immobiliter trabi affixum, motum ipſorum ſolerter examinabam, ac Horologii a Dn. *Iulien Le Roi* conſtructi motum admodum vniformem inueniebam: conſtanter enim interuallo diei ſolaris medii 23″. accelerabat. Superfluum fore exiſtimo, ſi integrum hoc examen apponere vellem; ſufficiet, eas tantum altitudines Solis correſpondentes recenſere, quas immediate ante Eclipſin Solarem et poſt eam obſeruaui. In capiendis iis pro multiplicando numero obſeruationum, dimoui filum mobile a filo immobili micrometri, ac quoties circumſtantiae permittebant notaui ad horologium appulſum vtriusque limbi Solis ad vtrumque filum. Vnde facile colligi poteſt, quid in ſequentibus voces *fil. mob. fil. immob.* indicent.

D. $\frac{22}{2}$ $\frac{\text{Maii}}{\text{Iun.}}$ cepi altitudines Solis correſpondentes:

Ante merid.			Altit. ☉lis.	Poſt merid.	Merid. ad Hor.
Therm. Reaum.		15°.	- - - -	19°½. ſupra o	
fil. mob.	ſup.	11h.48′.58″.	54°.	3h.39′.3″.	1h.44′.0″½.
- immob.	ſup.	50. 49.		37. 14.	1. 44. 1½.
fil. mob.	ſup.	11. 53. 20.	54°. 30′.	34. 44.	1. 44. 2.
- immob.	ſup.	55. 11.		32. 53.	1. 44. 2.
fil. mob.	ſup.	11. 57. 43.		30. 21.	1. 44. 2.
	inf.	12. 2. 31.	55°.	25. 34.	1. 44. 2½.
- immob.	ſup.	11. 59. 38.		28. 25.	1. 44. 1½.
	inf.	12. 4. 29.		23. 34.	1. 44. 1½.

Medium 1h.44′.1″,7
Correctio merid. - 4, 5
Meridies vera 1. 43. 57, 2
Temp. med. inſtante merid. vera eſt 11h.57′.28″,1

D. $\frac{23}{3}$ $\frac{\text{Maii}}{\text{Iun.}}$ circa horam ſextam matutinam Therm. Reaum. 7°. ſupra o. Coelum erat totum nubibus obductum; vnde non ſolum initium Eclipſis Solaris non obſeruare poteram, ſed et de fine videndo deſperabam. Aſt inopinato accidebat, vt nubes diſcederent, Solque per vices conſpiceretur. Eripuiſſet nihilominus exigua at ſpiſſa nubecula finis videndi copiam, niſi continuo tubo adſtitiſſem, eumque coeli locum attente contemplatus eſſem, vbi Solis ex nube emerſuri aliqua ſpes erat. Subito namque et praeter expectationem Sol prodibat in conſpectum pleno ſplendore fulgens, paucis ſecundis prius, quam Eclipſis finiebatur, quod accidebat, cum

cum Horologium meum indicaret $10^h.7'.26''$. Ad inſtituendam hanc obſeruationem adhibebam tubum quindecim pedum, de quo ſupra locutus ſum. Eadem die capiebam altitudines Solis correſpondentes

Ante merid.			Altit. ☉lis.	Poſt merid.	Merid. ad Horol.
fil. mob.	ſup.	$11^h.13'.20''$.		$4^h.15'.49''$.	$1^h.44'.34''\frac{1}{2}$.
	inf.	17. 12.	49°. 30′.	11. 56.	1. 44. 34.
- immob.	ſup.	14. 53.		14. 14.	1. 44. 33½.
	inf.	18. 48.		10. 19.	1. 44. 33½.
fil. mob.	ſup.	11. 20. 47.		4. 8. 22.	1. 44. 34½.
	inf.	24. 48.	50. 30′.	4. 22.	1. 44. 35.
- immob.	ſup.	22. 23.		6. 45½.	1. 44. 34½.
	inf.	26. 26.		2. 44.	1. 44. 35.

Therm. Reaum. 15°. ſupra o. Medium $1^h.44'.34''$,3

Correctio merid. — 4, 9

Meridies vera 1. 44. 29, 4

Tempus medium, inſtante merdie vera $11^h.57'.37''$, 4.

Vnde acceleratio Horologii ſpatio diei Solaris medii colligitur $23''$. Quoniam iam d. 22. Maii meridies vera ad Horol. euenit ad $1^h.43'.57''$,2.
d. 23. Maii autem 1. 44. 29, 3.
acceleratio Hor. ſpatio diei Solaris veri erit - 32, 1.

A meridie ergo 22. Maii ad tempus obſeruationis acceleratio reperitur $27''$,2. Hinc tempus verum, quo finis Eclipſis euenit, prodibit ſi de $22^h.7'.26''$. dematur $1^h.43'.57''$,2 + $27''$,2 = 1^h.

$= 1^h.44'.24'',4$. Conſequenter tempus verum, in quod finis Eclipſis incidit, erit $20^h.23'.1''\frac{2}{3}$. Obſeruationem hanc admodum exactam et certam praedicare nullus dubito.

Obſeruatio Tranſitus Veneris ſub Sole.

In hac obſeruatione inſtituenda non aeque felix fui, ac in antecedente; quid vero egerim, quidque obſeruauerim, fideliter enarrabo.

D. $\frac{24}{4}$ $\frac{\text{Maii}}{\text{Iunii}}$ capiebam altitudines Solis correſpondentes.

Ante merid.	Alt. ☉lis	Poſt merid	Merid. ad Hor.
Therm. Reaum. $11\frac{1}{2}^{\circ}$.	- - -	$19\frac{3}{4}^{\circ}$. ſupra o	
fil. mob. ſup. 10h.14′.27″.		5h.15′.43″.	1h.45′.5″.
inf. 17. $57\frac{1}{2}$.		12. $12\frac{1}{2}$.	1. 45. 5.
immob. ſup. 15. $53\frac{1}{2}$.	41°.	14. 18.	1. 45. $5\frac{3}{4}$.
inf. 19. 23.		10. 48.	1. 45. $5\frac{1}{2}$.
fil mob. ſup. 10h.21. 5.		5. 9. 5.	1. 45. 5.
inf. 24. 36.		5. 33.	1. 45. $4\frac{1}{2}$.
immob. ſup. 22. 30.	42.	7. 39.	1. 45. $4\frac{1}{2}$.
inf. 26. 2.		4. 6.	1. 45. $4\frac{1}{4}$.

Medium $1^h.45'.4'',9$.

Correctio meridiei $-\ 4,\ 7$.

Meridies vera 1. 45. 0, 2.

Temp. med. inſtante merid. vera, 11. 57. 47.

Vnde adhuc colligitur, Horologium ſpatio diei Solaris medii accelerare $23''$.

Sequen-

Sequenti die, coelum per integram diem ſparſis nubibus inquinatum erat, quapropter altitudines Solis correſpondentes capi non potuere. Therm. Reaum. ante merid. circa hor decimam 16°. poſt merid. circa hor. quartam $15\frac{1}{4}^{\circ}$. ſupra o.

D. $\frac{26}{6}$ $\frac{Maii}{Iunii}$ in quam Veneris tranſitus incidit, mane caelum prorſus nubibus tectum erat, aëre quieto. Circa horam octauam matutinam ex improuiſo vehementiſſimus ex Septentrione oriebatur ventus Circa horam decimam larga decidebat pluvia; verſus vndecimam vero, Sol per nubes atque Venus a limbo Solis per ſuam Diametrum remota conſpici aliquoties poterat: poſt 13 vero aut 15 minuta Sol nubibus denſiſſimis denuo e conſpectu eripiebatur, et poſt meridiem hora prima rurſum pluebat. Tandem circa horam tertiam caelum tegentes nubes dirumpebantur, ſic vt Sol per vices in conſpectum prodiret, Venus autem tum emerſioni iam propinqua erat. Spes proinde aliqua erat contactum limborum Veneris atque Solis obſeruandi; quapropter oculum continuo tubo applicatum tenebam, mutans vitra colorata, prout varius ſplendor Solis, mox denſis, mox tenuioribus nubibus tecti, exigebat, ac limbi Solis, qui modo fluctuans, modo bene terminatus apparebat, eam partem, vbi Venus emerſura erat, in medio tubi, quantum vehementia venti permittebat, retinere operam dabam. Oculo tandem hebeſcente, vento tubum aliquantum agitan-

agitante, limbo Solis tantiſper fluctuante et tenui nubecula obducto, appulſum limbi Veneris praecedentis ad limbum Solis ſecundum Horologium meum ad $5^h. 7'. 49''$. euenire iudicabam. In contactu limborum id ſingulare obſeruabam, quod filum lucidum inter Planetae et Solis limbum interceptum ante expectationem euaneſceret, ac ſubito quaſi exigua guttula nigra (*) e Venere procedere, limbumque Solis limbo Veneris iungere videretur. Cum Horologium $5^h. 8'. 8''$. indicaret, Sol per aliquot minuta ſecunda pleno fulgore radiabat, tumque limbus Veneris praecedens vltra Solem prominens lucido annulo cinctus mihi videbatur; attentius vero conſiderare ac examinare hoc phaenomenon non licebat, Sol enim ſubito per nubem intercurrentem ex conſpectu eripiebatur.

In contactu exteriori obſeruando eadem, imo et maiora aderant impedimenta, quae in contactu interiori expertus ſum; accidere vero contactum exterio-

(*) Vt clariorem ideam de guttula nigra lectores concipiant, inſtituant velim ſequens experimentum. Remoto ab oculo vnius manus digito per vnum circiter pedem, et digito alterius paulo plus, promoueantur in directum alter ad alterum, vt ſeſe inuicem contingere appareant; tunc ante mutuum contactum ſubito inter eos naſcitur guttula nigra, quae eo magis ampliatur, quo magis digiti ad mutuum contactum deducuntur, ſimile huic erat phaenomenon, quod in contactu interiori obſeruabam.

teriorem limborum Veneris atque Solis iudicabam, cum Horologium indicaret $5^h. 25'. 55''$.

Enarro, quae obſeruaui, neque, quae forte fuerit cauſa phyſica, apparentiam guttulae nigrae limbum Solis ac Veneris iungentis, annuli ve lucidi Veneris limbum cingentis producens, inquiro.

Conſtitueram ſemitam Veneris apparentem et Diametrum eius conſuetis methodis obſeruare, eoque fine machinae parallacticae tubum octo pedum, micrometro Grahamiano inſtructum, impoſueram, at irritos reddidiſſe conatus hos meos tempeſtatis inclementiam facile iudicabunt lectores.

Binis ſequentibus diebus capiebam ante meridiem altitudines Solis, verum poſt meridiem correſpondentes ob caelum nubilum non obtinebam. Tandem d ♀ $\frac{29}{9}$ $\frac{\text{Maii}}{\text{Iun.}}$ ſequentes capiebantur:

Ante merid.		Alt. ☉lis	Poſt. merid.	Merid. ad Horol.
Therm. Reaum. $6\frac{3}{4}^\circ$.			$16\frac{1}{2}^\circ$. ſupra 0.	
fil. mob.	ſup. $10^h. 18'. 9''$		$5^h\ 17'. 45\frac{1}{2}''$	$1^h. 47'. 57\frac{1}{4}''$.
	inf. 21. 40.	$41^\circ. 30'$.	5. 14. 14.	1. 47. 57.
- immob	inf. 23. $4\frac{1}{2}$		5. 12. 50.	1. 47. $57\frac{1}{4}$.
fil. mob.	ſup. $10^h. 54. 8.$		4. 41. 46.	1. 47. 57.
	inf. 57. 51.	44°.	38. 4.	1. 47. $57\frac{1}{2}$.
- immob.	ſup. 55. 38.		40. 17.	1. 47. $57\frac{1}{2}$.

Medium	1. 47. 57, 3.
Correct. merid.	— 3, 6.
Meridies vera	1. 47. 53, 7.
Tempus medium, inſtante meridie vera	11. 58. 40, 5.

 Hinc

Hinc acceleratio penduli ſpatio diei Solaris medii per obſeruationes d. 22 et 29. Maii colligitur $23\frac{1}{2}''$. Sumta autem pro termino comparationis obſeruatione d. 24. Maii, acceleratio reperitur $24''$. Vnde patet, motum Horologii intra hos dies fuiſſe ſatis vniformem. Poſita proinde acceleratione penduli ſpatio diei Solaris medii $23\frac{1}{2}''$, inuenitur

d. $\frac{26}{6}$ $\frac{Maii}{Iunii}$ meridies vera ad Horolog.	-	$1^h. 46'. 7'',8$
d. $\frac{27}{7}$ $\frac{Maii}{Iunii}$	- - - - - -	1. 46. 42, 1
Acceleratio Horologii ſupra diem Solarem erit	- - - - -	$34'',3$

et a meridie 26. Maii ad tempus contactus interioris acceleratio reperitur $4''$, 8, ad momentum autem contactus exterioris $5''$, 3. Hincque concluditur

	Tempus verum
Contactus interior limborum ♀ et ☉lis	$3^h. 21'. 36'',4$.
Contactus exterior - - -	3 39. 42, 1.

Quantum pretium huic obſeruationi ſtatuendum ſit, et num alicuius poſſit eſſe vſus, ex circumſtantiarum deſcriptione Aſtronomiae periti iudicabunt lectores.

OBSERVATIONES
pro ſtabilienda Longitudine Vrbis Selenginsk.

Determinata Latitudine vrbis *Selenginsk* definienda ſupererat ipſius Longitudo. Expectans huc facien-

facientia phaenomena, operam interea dabam longitudini penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda in vrbe *Selenginsk* oſcillantis definiendae, et cum ſufficientem numerum obſeruationum, cum automato, pendulo inuariabili inſtructo, inſtitutarum, collectum haberem, ſatagebam per experimenta ope penduli ſimplicis inſtituenda in eandem rem inquirere. Quam ob rem Horologium Aſtronomicum in talem ſtatum redigebam, vt intra breue temporis interuallum multos concurſus penduli ſimplicis cum pendulo Horologii Aſtronomici obſeruare poſſem; indeque oritur, quod Horologium pendulum, prouti in ſequentibus videbunt lectores, tantopere retardauerit.

D. $\frac{4}{15}$. Iulii capiebam altitudines Solis correſpondentes.

Ante merid.			Alt. ☉lis	Poſt merid.	Merid. ad Horol.
fil. mob.	ſup.	$8^h. 22'. 27''$.	41°.	$3^h. 12'. 4''$.	$11^h. 47'. 15\frac{1}{2}''$.
	inf.	25. 58.		8. 22.	11. 47. 15.
- immob.	ſup.	24. 6.		10. 25.	11 47. $15\frac{1}{2}$.
	inf.	27. 36.		3. 6. 54.	11. 47. 15.
		8 35. $45\frac{1}{2}$.	43°.	2. 58. $41\frac{1}{2}$.	11. 47. $13\frac{1}{2}$.

Medium 11. 47. 14, 9.
Correctio meridiei + 7. 0.
Meridies vera 11. 47. 21, 9.
Tempus medium, inſtante meridie vera, 0. 5. 22, 2.

Eadem die tubo quindecim pedum obſeruabam Immerſionem Φ Sagittarii ſub Luna, quam iuxta Horologium meum ad $11^h.7'.54''$. circiter euenifſe aeſtimaui. Circiter inquam, quia ob coelum nubilum hoc momentum praeciſe obſeruare non poteram. Error tamen, ſi quis eſt, non plurium, quam duorum ſecundorum eſſe potuit. Emerſio ſtellae prorſus erat inconſpicua.

D. $\frac{6}{17}$. Iulii rurſum capiebam altitudines Solis correſpondentes.

Ante merid.			Alt. ☉lis	Poſt merid.	Merid. ad Hor.
fil. mob.	ſup.	$9^h.15'.34''\frac{1}{2}$.		$1^h.42'.36''$	$11^h.29'.5\frac{1}{4}''$.
	inf.	19. 49.	50°. 50'.	38. 23.	11. 29. 6.
- immob.	ſup.	17. 42.		40. 29.	11. 29. $5\frac{1}{2}$.
	inf.	21. 57.		36. 14.	11. 29. $5\frac{1}{2}$.
fil. mob.	inf.	29. 19.	52°.	28. 53.	11. 29. 6.
- immob.	inf.	9. 31. 34.		1. 26. $37\frac{1}{2}$.	11. 29. $5\frac{3}{4}$.

Medium 11. 29. 5, 7.
Correctio merid. + 6, 1.
Meridies vera 11. 29. 11, 8.
Tempus medium, inſtante meridie vera 0. 5. 33, 7.

Vnde retardatio Horologii ſpatio diei Solaris medii colligitur $9'.10\frac{3}{4}''$. Quo autem magis certus fierem de motu Horologii, ſequenti quoque die ſumebam altitudines Solis correſpondentes, quarum ope meridiem veram ad Horologium reperiebam $11^h.20'.6'',5$.

Tem-

Tempus autem medium, inſtante meridie vera, hac die eſt $0^h. 5'. 38'', 7$. Vnde retardatio Horologii colligitur $9'. 10\frac{1}{3}''$. ac motum horologii fuiſſe vniformem. Quam ob rem reperitur

d. $\frac{5}{16}$. Iulii meridies vera ad Horol.	$11^h. 38'. 17'', 3$.
d. $\frac{4}{15}$. autem erat - -	11. 47. 21, 9.

Retardatio igitur Horologii die Solari eſt $9'. 4'', 6$, ac ad meridianum Obſeruatorii mei tempus verum, quo Luna Φ Sagittarii occultauit, reperitur $11^h. 24'. 51''$.

D. $\frac{11}{22}$. Iulii motus Horologii Aſtronomici inanimaduertentia erat turbatus, quam ob rem, vt paratum illud haberem ad obſeruationes, d. $\frac{13}{24}$. Iulii capiebam ſequentes altitudines Solis correſpondentes:

Ante merid.	Alt. ☉lis.	Poſt merid.	Merid. ad Horol.
fil. mob. inf. $7^h. 20'. 30''$.		$1^h. 30'. 10''$.	$10^h. 25'. 20''$.
- immob. ſup. 18. $42\frac{1}{2}$.	42°. 10'.	31. 58.	10. 25. 20.
inf. 22. $20\frac{1}{2}$.		28. $19\frac{1}{2}$.	10. 25. 20.
fil. mob. ſup. 7. 28. 23.	43°.	22. 18.	10. 25. $20\frac{1}{2}$.
inf. 32. $5\frac{1}{2}$.		18. 35.	10. 25. $20\frac{1}{4}$.
- immob. ſup. 30. $16\frac{1}{2}$.		20. 25.	10. 25. $20\frac{3}{4}$.

Medium	10. 25. 20, 2.
Correctio merid.	+ 8, 8.
Meridies vera	10. 25. 29.
Tempus medium, inſtante meridie vera	0. 5. 56, 9.

 D. $\frac{17}{28}$. Iulii

D. $\frac{17}{28}$. Iulii per altitudines Solis correſpondentes meridiem veram reperiebam $9^h.48'.50'',6$. habita ratione correctionis meridiei $+11'',5$. Tempus autem medium, inſtante meridie verà, eſt $0^h.5'.57'',4$. hinc retardatio Horologii intra hos dies colligitur $9'.9\frac{3}{4}''$.

D. $\frac{20}{31}$. Iulii Immerſionem ſecundi Satellitis Iovis tubo 15 pedum obſeruabam horologio meo monſtrante $12^h.12'.40''$. ſtatus autem Horologii ex ſequentibus colligi poterit

D. $\frac{20}{31}$. Iulii		Ante merid.	Alt. ☉lis.	Poſt merid.	Merid. ad Hor.
Therm. Reaum. 20°.				25½°. ſupra o.	
fil. mob.	ſup.	6^h. 3′. 4″.	39°. 30′.	0^h. 38. 48.	9^h. 20′. 56″.
	inf.	6. 40.		35. 12.	9. 20. 56.
- immob.	ſup.	4. 45.		37. 7½.	9. 20. 56¼.
	inf.	8. 20.		33. 31.	9. 20. 55½.
fil. mob.	ſup.	6. 13. 20½.		0^h. 28. 32.	9. 20. 56¼.
	inf.	17. 1½.		24. 51.	9. 20. 56¼.
- immob	ſup.	15. 3.	41°.	26. 50.	9. 20. 56½.
	inf.	18. 43.		23. 8.	9. 20. 55½.

Medium 9. 20. 56.
Correctio meridiei + 10. 8.
Meridies vera 9. 21. 6, 8.
Tempus medium, inſtante meridie vera, 0. 5. 51, 6.

D. $\frac{2}{7}$. $\frac{\text{Iul.}}{\text{Aug.}}$ capiebam altitudines Solis correſpondentes

Ante merid.			Alt. ☉lis.	Poſt. merid.	Merid. ad Hor.
Therm Reaum 20.			- - -	$27\frac{1}{2}$. ſup. 0	
fil. mob.	ſup	$6^h.11'.15\frac{1}{2}$	41°.50′.	$0^h.12.\ 4\frac{1}{2}$.	$9^h.11'.40''$.
	inf	15. $0\frac{1}{2}$		0. 8. $19\frac{1}{2}$	9. 11. 40.
- immob	ſup.	13. 1.		10. 20.	9. 11. $40\frac{1}{2}$.
fil. mob.	ſup.	6. 20. 44	43. 10′.	0. 2. $36\frac{1}{2}$.	9. 11. $40\frac{1}{4}$.
	inf.	24. 33.		11. 58 47.	9. 11. 40.
- immob.	ſup.	22. 31.		0. 0. $49\frac{1}{2}$.	9. 11. $40\frac{1}{4}$.

Medium	$9^h.11'.40$, 1.
Correctio meridiei	+ 10, 7.
Meridies vera	$9^h.11'.50$, 8.
Tempus medium, inſtante meridie vera,	0. 5. 48, 5.

Hinc retardatio Horologii ſpatio diei Solaris medii eſt $9'.13''$, ac tempus verum Immerſionis ſecundi Satellitis Iouis prodit $14^h.58'.35''$.

D. $\frac{28}{8}$ $\frac{\text{Aug.}}{\text{Sept.}}$ meridiem veram ad Horologium per altitudines Solis correſpondentes reperiebam $8^h.6'.46''$, 3, habita ratione correctionis meridiei + $12''$, 4. Tempus autem medium, inſtante meridie vera, hac die eſt $0^h.5'.10''$, 2. Vnde rurſum retardatio Horologii diurna eſt $9'.12\frac{1}{2}''$.

Cum interea ſufficientem numerum obſeruationum cum pendulo ſimplici ſub hoc ſtatu Horologii inſtitutum obtinuiſſem, e re eſſe iudicabam, ob nimiam Horologii retardationem ſtatum eius immuta-

re,

re, id quod ſimulac effeceram, d. $\frac{5}{16}$. Aug. ſequentes captae ſunt altitudines Solis:

Ante merid.	Alt. ☉lis.	Poſt. merid.	Merid. ad Hor.
Therm. Reaum 14°.		20. ſupra o.	
fil. mob. inf. $9^h. 11'. 16''$.	39°. 30′.	$2^h. 49'. 9\frac{1}{2}$.	$0^h. 0'. 12\frac{3}{4}$.
- immob. ſup. 9. 57.		2. 51. $29\frac{1}{2}$.	0. 0. $13\frac{1}{4}$.
- immob. inf. 12. 56.		47. 30.	0. 0. $13\frac{1}{4}$.
fil. mob. ſup. 14. 49.	40. 30.	45. 38.	0. 0. $13\frac{3}{4}$.
- immob. ſup. 9. 16. 30.		43. 56.	0. 0. 13.
		Medium	$0^h. 0'. 13''$,2.
		Correctio meridiei	+ 14, 1.
		Meridies vera	0. 0. 27, 3.
Tempus medium, inſtante meridie vera			$0^h. 3'. 51$, 9.

D. $\frac{10}{21}$. Aug. hora nona matutina thermometro Reaum. monſtrante 8°. hora autem quarta pomeridiana 15°. ſupra o, meridiem veram ad Horologium per altitudines correſpondentes reperiebam $0^h. 4'. 21''$, 9. habita ratione correctionis meridiei + 15′. 5. Tempus autem medium, inſtante meridiei vera, hac die eſt $0^h. 2'. 45''$, 5. Hinc ſumta, pro termino comparationis, meridie diei 5. Aug. acceleratio Horologii diurna 1′.

D. $\frac{14}{25}$. Immerſionem I. Satellitis Iouis ad Horologium meum tubo 15. pedum $10^h\ 54'\ 15''$. et Immerſionem II. Satellitis Iouis tubo $8\frac{1}{2}$. pedum obſeruabam ad $12^h. 22'. 58''$.

D. $\frac{16}{27}$. Aug.

D. $\frac{16}{27}$. Aug. ſequentes altitudines Solis correſpondentes capiebam:

Ante merid.		Alt. ☉lis	Poſt. merid.	Merid. ad Hor.
Therm. Reaum. $6\frac{1}{2}°$.			8°. ſupra o.	
fil. mob. ſup.	$8^h. 29'. 52''$.	29°. 50'.	3. 47. 37	$0^h. 8'. 44\frac{1}{2}''$.
- mob. —	32. 20.	30. 20.	45. 9.	0. 8. $44\frac{1}{2}$.
- immob. —	33. 21.		44. 9.	0. 8. 45.
fil. mob. —	36. 58.		40. 32	0. 8. 45.
- immob. —	37. 59	31°.	39 31.	0. 8. 45.
inf.	8. 41. 42.		3. 35. 48.	0. 8. 45.

Medium $0^h. 8'. 44'', 8$.
Correctio merid. + 17, 5.
Meridies vera 0. 9. 2, 3.
Tempus medium, inſtante meridie vera, 0. 1. 11, 2.

Hinc, ſumto remotiſſimo termino comparationis, acceleratio Horologii ſpatio diei Solaris medii prodit $1'. 1\frac{2}{5}''$. ſumta autem meridie d. 10. Aug. acceleratio reperitur $1'. 2\frac{1}{3}''$. id quod, me iudice, manifeſte abbreuiationi penduli a frigore ortae adſcribendum eſt, nam a die 5. Aug. ad 16. calorem ſenſibiliter remiſiſſe obſeruabam. Poſita itaque acceleratione Horologii diurna $1'. 2\frac{1}{3}''$. inuenitur.

d. $\frac{14}{25}$. Aug. merid. vera ad Horol. $0^h. 7'. 30''$.
d. $\frac{15}{26}$. Aug. - - - - $0^h. 8'. 16'', 3$

Acceleratio igitur Horologii die Solari vero erit $46'', 3$, ac tempus verum Immerſionis I. Satellitis erit $10^h. 46'. 24''$, et tempus verum Immerſionis II. Satellitis $12^h. 15'. 4\frac{1}{2}''$.

D. $\frac{21}{1}$. $\frac{Aug.}{Sept.}$ obſeruabam tubo quindecim pedum Immerſionem primi et ſecundi Satellitis Iouis, verum obſernationes has ſubdubias reddidit ros, qui lenti obiectiuae tempore obſeruationis adhaeſerat, ad magis tamen confirmandam differentiam meridianorum, non prorſus inutiles exiſtimo: Nam ſi momenta obſeruationum cum momentis ex Tab. Cel. *Wargentini* deductis comparem, non multum abludentem differentiam meridianorum ſuppeditant, ac obſeruationes praecedentes. Manente eodem ſtatu Horologii.

D. $\frac{6}{17}$. Sept. capiebam altitudines Solis correſpondentes:

Ante merid.	Alt. ☉lis	Poſt merid.	Merid. ad Hor.
Therm. Reaum. 5°.		10°. ſupra o.	
mob. ſup. $9^h.25'.50''$	39°.	$3^h.21'.\ 6''.$	$0^h.23'.28''.$
immob. — 26. 51.		3. 20. $5\frac{1}{2}$.	0. 23. 28.
mob. — 28. $31\frac{1}{2}$.	29. 20.	3. 18. 24.	0. 23. $27\frac{1}{2}$.
immob. — 29. 34.		3. 17. $21\frac{1}{2}$.	0. 23. $27\frac{3}{4}$.
mob. — 31. 15.	29. 40.	3. 15. $41\frac{1}{2}$.	0. 23. $28\frac{1}{4}$.
immob. — 9^h.32. 17.		3. 14. 40.	0. 23. $28\frac{1}{2}$.

Medium $0^h.23'.27'', 7.$

Correctio meridiei + 20, 6.

Meridies vera 0. 23. 48, 3.

Tempus medium, inſtante meridie vera, 11. 54. 20, 1.

Hinc colligitur a d. 16. Aug. ad 6. Sept. Horologii motum fuiſſe ſat vniformem.

D. $\frac{8}{19}$. Sept.

D. $\frac{8}{19}$. Sept. obſeruabam occultationem *k* Tauri a Luna tubo octo pedum cum dimidio. Immerſio eius eueniebat Horologio meo praeciſe monſtrante 16^h.37′.42″. Emerſio autem cum debita praeciſione ob nebulam obſeruari non poterat; prodibat autem in conſpectum ſtella, cum Horologium indicaret 17^h.47′. et 6″. circiter.

D. $\frac{9}{20}$. Sept. capiebam altitudines Solis correſpondentes.

Ante merid.	Alt. ☉lis.	Poſt merid.	Merid. ad Hor
ſup. 10^h. 9′. 2″.	32°. 41′.	2^h.41′.59″.	0^h.25′.30$\frac{1}{2}$″.
— 10. 2.		40. 59.	0. 25. 30$\frac{1}{2}$.
— 12. 16.	33.	38. 46.	0. 25. 31.
— 13. 18.		37. 44.	0. 25. 31.
— 15. 34$\frac{1}{2}$.	33. 20.	35. 28.	0. 25. 31$\frac{1}{4}$.
ſup. 10. 16. 37.		2. 34. 24$\frac{1}{2}$.	0. 25. 30$\frac{3}{4}$.

Medium	0.^{h}25′.30″, 8.
Correctio merid.	+ 19, 2.
Meridies vera	0, 25. 50.

Tempus medium, inſtante meridie vera, hac die eſt 11^h.53′.17″,4. a d. 6. itaque Septembris ad d. 9. Sept. Horologium ſpatio diei Solaris medii accelerabat 1′. 1$\frac{2}{3}$″. quapropter meridies vera d. 8. Sept. erit Horologio monſtrante 0^h. 25′. 9″, 2. Vnde acceleratio Horologii ſpatio diei Solaris veri colligitur 40″,8, ac tempus verum, quo Im-

 merſio

merſio *k* Tauri ad meridianum Selenginskenſem euenit $16^h. 12'. 5''$. Emerſionem tanquam non ſatis exactam, quae determinandae differentiae meridianorum inſeruire queat, hic non moror.

EXPERIMENTA,

circa longitudinem penduli ſimplicis minuta ſecunda oſcillantis in Vrbe Selenginsk inſtituta.

Ad inſtituendas huc ſpectantes obſeruationes, apportaueram mecum Petropoli Horologium, pendulo inuariabili inſtructum, nec non ponduſculum biconicum vna cum virga ferrea a Cel. *de la Caille* ad b. *Griſchouium* transmiſſa. Duplicia ergo mecum habens inſtrumenta, disquiſitionibus his inſtituendis apta, duplici modo in longitudinem penduli inquiſiui. Cunctas hunc in finem inſtitutas obſeruationes hic commemorare animus non eſt; easdem etenim cum omnibus circumſtantiis peculiari et ampliori ſcripto Academiae communicandas reſeruo.

Incipiens hunc laborem, automaton pendulo inuariabili inſtructum ſuſpendebam prope Horologium Aſtronomicum, ita vt pulſus vtriusque penduli optime exaudiri poſſint, et inter vtrumque Horologium collocabam thermometrum Reaumurianum.

EXPE-

EXPERIMENTVM I.

D. $\frac{13}{24}$. Iulii, cum Horologium Aſtronomicum ſpatio diei Solaris medii retardaret $59\frac{1}{2}''$, ſequentia inſtituebam experimenta:

	Hor. Aſtronom.	Therm. Reaum.	Pend. inuar.	Num. oſc. ſpat. diei Sol. med. confectarum.
I	$12^h.\ 47'.\ 14''$.	18°. ſupra o.	19063. oſc.	I et II 98895. 6.
II	1 43. 10.		22907. -	
II	1. 45. 7.	18. — -	23041. -	I et III 98895. o.
IV	1. 59. 33.		24033. -	I et IV 98896. 8.
V	2. 21. 27.		25538. -	I et V 98895. 2.
VI	32. 55.	$18\frac{3}{4}$. — -	26326. -	I et VI 98894. 7.
VII	52. 24.		27665. -	I et VII 98894. 9.
VIII	58. 49.		28106. -	I et VIII 98895. 1.
IX.	3. 4. 5.	19. — -	28468. -	I et IX 98895. 6.
				Medium 98895. 3.

Cel. *de la Caille* Pariſiis in temperie aeris $6\frac{1}{2}$°. therm. Reaumuriani ſupra o. inſtituens experimenta, reperit idem pendulum ſpatio diei Solaris medii conficere 98908. oſc. Ex experimentis autem Cl. *Griſchouii*, in inſula Oeſelia inſtitutis, patet, variationem vnius gradus therm. Reaum. producere variationem vnius quam proxime oſcillationis in motu penduli inuariabilis: Quare, vt noſtra experimenta ad eandem temperiem reducantur, numerus oſcillationum 98895. 3. augendus eſt 12. 2. oſcillationibus. Hinc idem pendulum in vrbe *Se-*

Ienginsk in temperie aeris $6\frac{1}{2}$°. ſupra o. ſpatio diei Solaris medii conficit 98907. 5. oſc.

Vt experimenta, de quibus hic agitur, maiori certitudine gauderent, deturbabam automaton ex priſtino ſtatu, quotiescunque ad noua memet accingebam, ac denuo in talem, qui mihi optimus viſus eſt, redigebam; id quod eo conſilio efficiebam, vt ſequentia experimenta nihil commune cum praecedentibus haberent.

EXPERIMENTVM II.

Calore increſcente Horologii retardationem a d. 16. ad d. 17. per altitudines Solis correſpondentes reperiebam 1′. $1\frac{1}{2}$″. ac d. $\frac{16}{27}$. Iunii ſequentes capiebam obſeruationes:

	Horol. Aſtron.	Therm. Reaum.	Pend. inuar.	Num. oſc. ſpat. diei Sol med. confectarum	
I	11ʰ. 3′. 18″.	$18\frac{1}{2}$. ſupra o.	53523. oſc.	I et VII	98896. 0.
II	11. 4. 54.		53633. -	II et VIII	98895. 9.
III	1. 41. 54.	19. — -	64423. -	I et III	98896. 6.
IV	1. 43. 31.		64534. -	I et IV	98895. 6.
V	1. 52. 41.		65164. -	I et V	98895. 8.
VI	2. 25. 34.	$19\frac{1}{2}$. — -	67424. -	II et VI	98896. 0.
VII	3. 41. 26.	$20\frac{1}{2}$. — -	72638. -	III et VII	98895. 5.
				Medium	98895. 9.

Aucto

Aucto autem hoc numero pro ratione temperiei aeris 13. oſc. numerus oſcillationum, ſpatio diei Solaris medii in vrbe *Selenginsk* in temperie aeris $6\frac{1}{2}$°. confectarum, erit 98908. 9. oſc.

EXPERIMENTVM III.

Ex captis d. 17 et 18. Iunii altitudinibus Solis correſpondentibus reperiebam, retardationem Horologii Aſtronomici prorſus eandem manſiſſe, nempe 1′. $1\frac{1}{2}$″, ac d. $\frac{17}{28}$. Iunii ſequentia inſtituebam experimenta:

	Hor. Aſtron.	Therm. Reaum.	Pend. inuar.	Num. oſc. ſpat. diei Sol. med. confectarum.	
I	1ʰ. 52′. 23″.	$20\frac{1}{2}$. ſupra o.	17452. oſc.	I et VIII	98894. 6.
II	1. 55. 49.		17688. -	II et VIII	98894. 4.
III	5. 21. 25.		31818. -	I et III	98894. 8.
IV	5. 38. 57.	21. — -	33023. -	II et IV	98894. 8
V	6. 6. 34.		34921. -	I et V	98894. 9.
VI	6. 7. 36.	$21\frac{1}{2}$. — -	34992. -	II et VI	98894. 6.
VII	9. 30. 21.		48926. -	III et VII	98894. 0.
VIII	9. 31. 36.	$21\frac{1}{2}$. — -	49012. -	IV et VIII	98894. 4.
				Medium	98894. 5.

Quod ad temperiem Pariſinam reductum, fit 98909. 5.

EXPE-

EXPERIMENTVM IV.

Per altitudines Solis d. 21. Iunii captas patebat, Horologium Aſtronomicum a d. 18. vsque ad d. 21. prorſus in eodem ſtatu manſiſſe, nempe ſpatio diei Solaris medii retardationem fuiſſe 1′. 1½″. d. vero $\frac{20}{1}$ *Iunii Iulii* ſequentia obſeruabam:

	Hor. Aſtron.	Therm. Reaum.	Pend. inuar.	Num. oſc ſpat diei Sol. med. confectarum.	
I	3ʰ. 34′. 51″.	20. ſupra 0.	74159. oſc.	I et VIII	98895. 6.
II	3. 41. 9.		74592. -	II et VII	98895. 4.
III	4. 2. 35.		76065. -	III et VIII	98895. 2.
IV	4. 4. 52.	20½. — -	76222. -	IV et VI	98895. 2.
V	7. 20. 43.		89682. -	IV et V	98895. 1.
VI	7. 26. 13.		90060. -	III et VI	98895. 6.
VII	9. 12. 20.		97353. -	V et VII	98895. 4.
VIII	9. 15. 33.	20. — -	97574. -	VI et VIII	98895. 7.
				Medium	98895. 4.

In eadem ergo temperie, in qua Pariſiis experimenta ſunt capta, pendulum inuariabile ſpatio diei Solaris medii conficere debuiſſet 98909. 4.

EXPERIMENTVM V.

Manente eodem ſtatu Horologii Aſtronomici d. $\frac{21}{4}$ *Iunii Iulii* ſequentia inſtituta fuere experimenta:

Horol.

	Hor. Aſtron.	Therm. Reaum.	Pend. inuar.	Num. oſc. ſpat. diei Sol med. confectarum.	
I	$0^h. 27'. 13''$.	19°. ſupra o.	78038. oſc.	I et IX	98895. 8.
II	0. 28. 29.		78125. -	II et IX	88895. 9.
III	0. 35. 1.		78574. -	III et VIII	98895. 6.
IV	3. 29. 5.	19½. — -	90537. -	I et IV	98895. 4.
V	3. 30. 55.		90663. -	V et VIII	98896. 3.
VI	3. 31. 36.		90710. -	I et VI	98895. 8.
VII	6. 46. 45.	20½. — -	104122. -	II et VII	98896. 0.
VIII	9. 0. 29.		113313. -	VI et VIII	98895. 7.
IX	9. 2. 5.	19½. — -	113423. -	V et IX	98896. 0.
				Medium	98895. 9.

Quod pro ratione temperiei aeris 13. 5 oſc. augendo, numerus oſcillationum ſpatio diei Solaris medii a pendulo inuariabili in temperie aeris 6½°. therm. Reaum. confectarum prodibit 98909. 3.

Collatis his meis obſeruationibus, d. 17. 20 et 23. Iunii inſtitutis, patet quodam modo idem, quod Cel. *Griſchouius* ex ſuis experimentis deduxerat: Variationem nempe vnius gradus thermometri Reaumuriani producere variationem vnius quam proxime oſcillationis in motu penduli inuariabilis.

Eſt iam ex obſeruationibus,

d. 13. Iunii inſtitutis, numerus oſcillationum, ſpatio diei Solaris medii in tem-

perie aëri $6\frac{1}{2}°$. ſupra o. a pendulo inuariabili in vrbe *Selenginſk* conте́ctarum - 98907. 5.

16. Iunii - - - -	98908. 9.
17 - - - - -	98909. 5.
20 - - - -	98909. 4.
23 - - -	98909. 4.

Medium omnium erit 98908. 9 + vel ſi numero rotundo vti velimus - - - - 98909.

Cum vero idem pendulum, in eadem temperie aeris Pariſiis conficiat 98908. oſc. et longitudo penduli, ſingula minuta ſecunda oſcillantis, ibidem ex accuratiſſimis Cel. *de la Caille* experimentis ſit 440. 55. lin. longitudo penduli, ſingula minuta ſecunda in vrbe *Selenginſk* oſcillantis, erit $= \frac{440.55 \times (98909.)^2}{(98908)^2} = 440.56.$ lin.

Poſt peractas has, cum automato pendulo invariabili inſtructo, obſeruationes, volui deductam ex iis longitudinem penduli ſimplicis, minuta ſecunda oſcillantis, per experimenta pendulo ſimplici inſtituenda comprobare. Cum per aliquot inſtituta tentamina viderem, pendulum ſimplex ſub eodem ſtatu Horologii Aſtronomici, qui hactenus fuerat, non niſi poſt longum tempus vnam duasue prae pendulo Aſtronomico lucrari oſcillationes, deprimebam lentem, vt plures concurſus pendulorum intra breue temporis ſpatium obſeruare poſſem. Nolo hic de cautelis, quas huiusmodi obſeruationes poſcunt, diffe-

differere; ample et luculenter expoſitae ipſae leguntur in Commentariis Academiae Pariſienſis ad An. 1735, et, quantum in poteſtate erat, eas acerrime obſeruaui; Id monuiſſe ſufficiat: Ad ſuſpendendum ponduſculum biconicum vſum me fuiſſe ſubtili filo aloes (*fil. de pite*), et forcipe, quali *Bouguerus* vſus eſt, ad ſuſtinendam autem virgam ferream, adhibuiſſe me machinam a *Griſchouio* excogitatam. Breuitati ſtudens, ex multis, quas cepi, obſeruationibus eas tantum hic apponam, quae ſub ſtatu Horologii facile deducendo ex ſupra iam memoratis altitudinibus Solis correſpondentibus, quas conſulto in obſeruationibus, longitudinem vrbis *Selenginsk* ſpectantibus, inſerui, inſtitutae ſunt.

EXPERIMENTVM I.

D. $\frac{7}{18}$. Iulii Thermometro Reaumuriano monſtrante 17°. ſupra 0. mercurio in barometro ad 27. 8. dig. menſ. Lond. haerente, Horologio Aſtronomico ſpatio diei Solaris medii 85849. 6. oſc. conficiente, incitabam ad motum pendulum ſimplex, cuius oſcillationes, licet initio tantillum diſcordarent ab oſcillationibus Horologii Aſtronomici, perfecte tamen concordantes erant Horologio monſtrante

	Obſ.	Num. oſc. ſpat. diei Sol. med. confectarum
$11^h. 33'. 12''.$	I	I et II 86460. 6.
Poſtea vero pendula denuo ad eandem partem concurrebant et pend. ſimplex lucratum erat		I et VI 86462. 2.
II oſc. $11^h.$ 37. 53.	II	II et VI 86462. 1.
IV - 11. 42. 31.	III	I et III 86463. 7.
VIII - 11. 51. 59.	IV	I et IV 86459. 0.
XIV - 12. 5. 55.	V	II et V 86462. 0.
XXII - 12. 24. 36.	VI	V et VI 86462. 0.

Ex prima itaque et ſecunda obſeruatione concluditur, pendulum ſimplex interuallo $4'. 41''.$ lucrari 2. oſc. ac die Solari medio, ſeu dum Horologium Aſtronomicum 85849. 6. oſc. conficit, pendulum ſimplex prae Horologio Aſtronomico lucraturum fore 611. oſc. Quare numerus oſcillationum, ſpatio diei Solaris medii a pendulo ſimplici confectarum, erit 86460. 6. Pari modo deducti ſunt reliqui numeri ad dextram in capite verba *num. oſcil ſpat.* etc. gerentes. Omnium vero medium eſt 86461. 6.

Per exactiſſima a Cel. *de la Caille* Pariſiis inſtituta experimenta conſtat, pendulum ſimplex in temperie aëris $12°.$ ſupra o. ſpatio diei Solaris medii conficere 86454. oſc. *Griſchouius* autem ex ſuis expe-

experimentis deduxit variationem trium graduum thermometri Reaumuriani, producere variationem vnius quam proxime oſcillationis in motu penduli ſimplicis. Hinc idem pendulum in eadem temperie eodem temporis ſpatio in vrbe *Selenginsk* conficiet 86463. 2. oſc.

EXPERIMENTVM II.

D. $\frac{8}{19}$. Iulii poſt meridiem thermometro Reaumuriano monſtrante 15°. ſupra o, mercurio in Barometro ad 27. 9. dig. Lond. haerente, ſtatu Horologii manente eodem, pendulum ſimplex cum Horologio Aſtronomico concordaſſe obſeruabam ad

		Obſ.	Num. oſc. ſpat. diei Sol. med confectarum.
	7^h.41'.36''.	I	I et II 86462. 8.
poſt modum pend. ſimplex lucratum eſſe			I et III 86461. 7.
II oſc.	7. 46. 16.	II	II et VI 86461. 8.
IV -	50. 57.	III	II et III 86460. 6.
VIII -	8. 0. 17.	IV	I et IV 86462. 2.
X -	8. 4. 58.	V	IV et V 86460. 6.
XII -	8 9. 38.	VI	I et VI 86462. 0.

Medium 86461. 6.

Quod pro rat. temp. vna oſc. augendo fit 86462. 6.

EXPERIMENTVM III.

D. $\frac{16}{27}$. Iulii Horologio Aſtronomico per diem $9'.9\frac{3}{4}''$. retardante, thermometro Reaumuriano monſtrante 17°. ſupra 0, barometro ad 28. 1. dig. Lond. haerente, incitabam ad motum pendulum ſimplex, ac oſcillationes eius cum oſcillationibus Horologii Aſtronomici concordaſſe obſeruabam Horologio monſtrante

	Obſ.	Num. oſc. ſpat. diei Sol. med. confectarum.
$5^h. 27'. 0''.$	I	I et VI 86459. 6.
Dein pend. ſimplex ad eandem partem concurrendo lucratum erat		I et V 86461. 3.
II oſc. 5. 31. 45.	II	II et VI 86460. 3.
IV - 5. 36. 25.	III	I et III 86458. 3.
VIII - 5. 45. 52.	IV	I et IV 86457. 0.
XII - 5. 55. 6.	V	V et VI 86457. 0.
XX - 6. 13. 58.	VI	III et VI 86459. 9.

Medium 86459. 1.

Quod pro rat. temp. 1. 6. oſc. auctum dat 86460. 7.

EXPERIMENTVM IV.

Calore in dies increſcente, die vero 23. Iulii Horologio per diem retardante $9'.12\frac{1}{2}''$. thermometro Reaumuriaoo $23\frac{1}{2}°$. monſtrante, mercurio in baro-

barometro ad 27. 8. dig. Lond. haerente, penduli ſimplicis oſcillationes cum oſcillationibus Horologii concordabant, Horologio monſtrante

	Obſ.	Num. oſc. ſpat. diei Sol. med. confectarum.
$2^h.21'.30''$.	I	I et V 86456. 8.
Dein pend. ſimplex ad eandem partem concurrendo lucratum erat		II et V 86457. 0.
II oſc. 2. 26. 12.	II	I et II 86456. 3.
IV - 2. 30. 53.	III	I et III 86457. 4.
VI - 35. 34.	IV	III et IV 86458. 5.
VIII - 40. 17.	V	IV et V 86454. 2.
		Medium 86456. 7.

Vlterius continuare ob filum ruptum non licuit; quodſi vero inuentus numerus oſcillationum pro temperie aëris augeatur 3. 8. oſc. prodit 86460. 5.

Eſt iam ex obſeruationibus,

d. 7. Iulii captis, numerus oſcillationum, ſpatio diei Solaris medii a pendulo ſimplici in temperie aëris 12°. ſupra o. in *Selenginsk* confectarum 86463. 2.
d. 8. Iulii - - - - - - 86462. 6.
d. 16. - - - - - - 86460. 7.
d. 23. - - - - - - 86460. 7.
Medium 86461. 7.

Idem

Idem autem pendulum Pariſiis, in eadem temperie aëris, ſpatio diei Solaris medii conficit 86454. oſc. ac longitudo penduli ſimplicis, ſingula minuta ſecunda oſcillantis, ibidem, vt ſupra monui, eſt 440. 55, Longitudo penduli ſimplicis, ſingula minuta ſecunda in vrbe *Selenginsk* oſcillantis, prodibit $\frac{440.55 \times (86461.7)^2}{(86454)^2} = 440.62$, quae a prius inuenta non niſi 0. 06. diſcrepat, media hinc longitudo quaeſita erit 440. 59. Quo certus euadam de ſtatu organorum, ad haec experimenta adhibitorum, in longitudinem penduli, Petropoli ſingula minuta ſecunda oſcillantis, inquirerecurabo.

OBSERVATIONES
Meteorologicae, in vrbe Selenginsk habitae.

Ad grauitatem aëris explorandam tubum barometri mercurio, quanta potui diligentia, replebam in aedibus meis 1 Apr. therm. De l'Isliano monſtrante 117°. Scalam tubo applicabam menſurae Londinenſis, quam Petropoli mecum adportaueram, et barometrum ſuſpendebam in loco, ſupra fluuii *Selenga* ſuperficiem 5 aut 6. perticas Ruſſicas eleuato. Ad menſurandam temperiem aëris diuerſa poſſidebam thermometra, bina, Reaumurianum nempe et Farenheitianum, Pariſiis, et bina De l'Isliana Petro-

Petropoli elaborata Thermometrum Reaumurianum in obſeruatorio iuxta Horologium Aſtronomicum ſuſpenſum, Farenheitianum et De l'Islianum extra aedes meas ſuſpenſa erant in loco vmbroſo, ad quae minimum bis quotidie notabam temperiem aëris. Non praetermittebam quoque ſimul annotare ſtatum barometri, atque ita a 1 Aprilis vsque ad menſem Octobrem ſeriem obſeruationum meteorologicarum obtinebam, quam integram hic communicare nullius fore vſus exiſtimo; ſatis erit, ſi pro quolibet Menſe maximam et minimam altitudinem barometri et thermometri apponam.

	Bar. menſ. Londinenſis.		Therm. De l'Islianum	
	Alt. maxima	Alt. minima	Calor max.	Frig. max.
April	d. XXIX. 28. 30.	d. XXIV. 27. 40.	d. XXVII. 124.	d. V. 165.
Maius	d. X. XI. XII. 28. 25.	d. XXI. 27. 50.	d. III. 103.	d. XVII. 149.
Iun.	d. VII. XIX. XX 28 00.	d. XIII. XXII. 27. 60.	d. XXIIX. XXIX. 92. 96.	d. III. 136.
Iul.	d. IV. V. XII. 28 00.	d. XIII. 27. 70.	d. XXI. XXII. 94	d. III. 124.
Aug.	d. XV. 28 15.	d. VII. 27. 65.	d. V. 108.	d. XXIX. 141.
Sept.	d. VII. 28. 40.	d. V. 28. 00.	d. IX. 115.	d. XXX 164

Die 29. Iunii circa horam quartam pomeridianam motus terrae a quibusdam eſt obſeruatus. Sub Solis occaſum coelum atrocibus tegebatur nubibus, ad mediam vsque noctem tonabat et fulgurabat, tandem larga decidebat pluuia.

Non obſtante ingenti caloris gradu d. 28 et 29. Iunii obſeruato, in omnibus puteis, qui ordinarie ad profunditatem 6 aut 7. perticarum Ruſſicarum effodiuntur, per integram aeſtatem glaciem conſeruari, ac habitatores frigida ex iis hauſta aqua cum delectatione ſitim reſtringuere, et vires ſuas reficere obſeruabam.

Omnium maxima altitudo barometri fuit d. 7. Sept. 28. 40. minima vero 27. 40. Apr. d. 24. ac limites variationum barometricarum a me obſeruarum continentur intra 1. dig. Lond. Cum Petropoli minima altitudo barometri obſeruata ſit 26. 41. poll. menſ. Pariſ. ſeu 28. 10. dig. Lond. patet, altitudinem mercurii maximam in vrbe *Selenginsk* vix ſuperare minimam Petropoli obſeruatam. Prona hinc eſt concluſio, vrbem *Selenginsk* magis elevatam eſſe ſupra ſuperficiem maris, quam Petropolin. Huius rei luculenta quoque praebebant mihi indicia vertices montium non admodum excelſorum vrbem *Selenginsk* cingentium, ac fluuii *Selengae* litora includentium. Vt taceam nempe de aliis anni tempeſtatibus, menſe Maio et Auguſto, interdum etiam Iunio, dum in vrbe plueret, in montibus

niuem

niuem obſernabam. Notatu digna quoque eſt magna variatio, quam thermemetrum, menſe Aprili et Maio praeſertim, interuallo vnius diei patiebatur, quam interdum ad 28°. therm. De l'Isl. aſcendere obſeruabam.

Miranda quoque eſt ibi locorum inconſtantia tempeſtatum atmoſphaerae. Coelum ſerenum in nubilum, et nubilum in ſerenum vna eademque die multoties et celerrime mutatur, nubes absque omni motu aëris generantur et euaneſcunt, venti turbidi ſubito e diuerſis regionibus exoriuntur, et vires ſuas rurſum deponunt. Ventorum ii, qui directionem ſuam pertinacius aliis ſeruant, ſunt S et SSW, hos excipiunt, qui inter NW et NO continentur, hanc etenim rapidiſſimus fluuius *Selenga* vrbem alluens habet directionem, et montes ſecundum ripas eius extenſi, quaſi alueum praebent aëri fluenti. Caeterum tanta eſt inconſtantia atmoſphaerae, vt, ſi omnes eius viciſſitudines accurate obſeruandae et notandae ſint, Obſeruator huic ſolum rei intentus ſit neceſſe eſt.

OBSERVATIONES
pro Latitudine vrbis Irkutsk.

Relicta vrbe *Selenginsk* in vrbem *Irkutsk* d. 16. Octobris perueni. Ibi ne fruſtra tempus expectando iter hiemale perderem, in Latitudinem et

 Lon-

Longitudinem inquirere apud me conſtitueram. Commode id facere poteram, de Obſeruatorio etenim exſtruendo cogitare, opus non habebam. Cl. *Popovius*, qui in hac vrbe tranſitum Veneris obſeruauerat, duo exſtrui curauerat Obſeruatoria, quorum vnum ſub aduentum meum vacuum erat. Quam ob rem transportabam eo quadrantem meum et Horologium Aſtronomicum, aliaque, quibus opus habebam, inſtrumenta. Primus, quem ſuſcipiebam, labor erat verificatio quadrantis ad horizontem, quam d. 26. Oct. inſtituebam. Obiectum, in quod tubum direxi, diſtabat ad 3000 circ. ped. Lond. cuius altitudinem in ſitu recto, ſumendo ex pluribus medium, reperi 90°.—0. Reu. 41¼. p. c. Dein quadrante inuerſo, ac in eadem, cuius ſupra mentionem feci, menſula collocato, eiusdem obiecti altitudinem reperiebam 90°.—0. Reu. 42¾. p. c. Vnde colligere facile erat, quadrantem in itinere, quod nauigando perfeceram, nullam mutationem eſſe paſſum. Poſt haec, ope altitudinum Solis correſpondentium inquirebam in ſtatum Horologii Aſtronomici, quo cognito d. 6/17. Nou. capiebam altitudinem Solis meridianam, limbique ſuperioris altitudinem reperiebam 19°.—1. Reu. 1. par. cent. ſc. 18°. 56′. 51″,5.

Refractio — parallaxi	—	2. 53, 5.
Altitudo refractione correcta	18°. 53. 58.	
Semidiameter Solis		16. 15.

Alti-

Altitudo centri Solis - -	18. 37. 43.
Declinatio Solis Auſtralis -	+ 19. 4. 17.
Complementum altitudinis Poli	37. 42. 0.
Altitudo Poli - - -	52. 18. 0.

D. $\frac{7}{18}$. Nou. altitudo limbi Solis inferioris erat 18°. + 3 Reu. 13½. p. c. ſcilicet 18°. 9′. 45″. 31‴. Poſita refractione — parallaxi 2′. 57″. 30‴. ac ſemidiametro Solis 16′. 16″. alt. Solis fit 18°. 23′. 4″.

Declinatio eius auſtralis -	19. 18. 47.
Complementum altitudinis Poli	37. 41. 51.
Altitudo Poli - - -	52. 18. 9.

Captae quoque ſunt diebus 8 et 9. Nou. altitudines Solis meridianae, quas, quia nihil diuerſas ab his praebent determinationes, et refractio in tam parua altitudine nimium eſt variabilis, hic praetermitto. Communicabo autem obſeruationes, quas ſuper Lucida Aquilae inſtitui, quasque pro exactis habere non dubito. Nam Lucida Aquilae ante occaſum Solis in tanta altitudine culminabat, in qua refractio non tantae variationi eſt obnoxia. D. $\frac{9}{23}$. Nou. altitudinem meridianam Lucidae Aquilae inueniebam 46°. — 0. R. 50$\frac{5}{8}$ p. c. 45°. 58′. 25″, poſita refractione 1′. 4″, altitudo refractione correcta erit 45°. 57′. 21″. Declinatio Lucidae Aquilae Borealis ineunte An. 1761. eſt 8°. 15′. 16″, Deuiatio + 5″. 2. Praeceſſio + 7″. 4. Aberratio + 7″. 7. Hinc declinatio eius apparens ad 9. Nou. erit 8°. 15′. 36″,

 ac

ac complementum altitudinis Poli 37°.41′.45″, altitudo vero Poli eſt 52°.18′.15″. Die ſequenti altitudinem meridianam Lucidae Aquilae prorſus eandem reperiebam, vnde altitudo Poli *Irkutsk* ſtatui poterit 52°.18′.15″.

Multis vicibus praeparaueram me ad Obſeruationes, Longitudinem ſpectantes. Verum vapores, a Sole occiduo per integram noctem ex *Angara* aſcendentes, conatus meos irritos reddidere, cumque ab expertis acceperim, hoc incommodi eo vsque duraturum, quoad fluuius glacie tegatur: compoſitis inſtrumentis in vrbem *Jeniſeisk* proficiſcebar; vbi diuerſis temporibus, diuerſarum ſtellarum capiebam, quadrante non verificato, altitudines meridianas, quae omnes dedere altitudinem Poli, non niſi aliquot ſecundis differentem, atque inde ſumendo medium, altitudinem Poli vrbis *Jeniſeisk* 58°.27′.17″. concludo.

INVESTI-

INVESTIGATIO
PARALLAXEOS SOLIS
EX OBSERVATIONE TRANSITVS VENERIS PER DISCVM SOLIS SELENGINSKI HABITA, COLLATA CVM OBSERVATIONIBVS ALIBI INSTITVTIS.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKY.

Tranſitus Veneris per diſcum Solis non raritate ſolum, verum etiam vtilitate ſua, omnium ſcientiae ſideralis cultorum animos in ſe conuertit: nobiliſſimi enim ac ſubtilitate ſua omnes ipſorum conatus hactenus eludentis elementi veram quantitatem ex obſeruatione hac eruere ſibi pollicebantur aſtronomi. Non vanam fuiſſe ipſorum ſpem, nec inutiliter collocatos in ſtrenue peragenda obſeruatione labores, euentus monſtrauit. Comparatis etenim inter ſe melioris notae obſeruationibus, ſumma cum certitudine nunc pronunciare valemus, parallaxin Solis duobus fere minutis ſecundis minorem eſſe ea, quam hucusque Aſtronomi ſtatuerunt.

Cum Academia Scientiarum Pariſienſis et Societas Londinenſis in remotiſſimas mundi partes diverſos

verſos ablegarent aſtronomos ad hoc phaenomenon obſeruandum, ab Academia Scientiarum Imperiali mandatum mihi dabatur, vt eodem fine in Sibiriam proficiſcerer. Inde redux communicaui cum publico, anno praeterito obſeruationes, quas hac occaſione in vrbe *Selenginsk* inſtitui. Nunc vero cum obſeruationes, in aliis locis habitae, praeſertim Africanae, in publicum prodierint, in vſum conuertere obſeruationes meas, et quantam cum aliis collatae praebeant Solis parallaxin, disquirere in poteſtate eſt.

Ad eam ex comparatione obſeruationum ſuper tranſitu Veneris per diſcum Solis inſtitutarum eruendam, ante omnia neceſſe eſt noſſe ſitum reſpectiuum locorum, in quibus obſeruationes peractae ſunt. Id circo Latitudo et Longitudo vrbis *Selenginsk* mihi ſtabiliendae erunt. Obſeruationes huc ſpectantes ample expoſitae ſunt in diſſertatione, quam poſt reditum ex Sibiria in publicum edidi, nexus tamen exigit, vt breuibus hic praecipua momenta Latitudinem ſpectantia ex diſſertatione mea repetam.

INQVISITIO
In Latitudinem Vrbis Selenginsk.

Ad determinandam Latitudinem quadrante radii duorum circiter pedum a perito artifice l'Anglois Pariſiis magna diligentia elaborato, captae ſunt

altitu-

altitudines meridianae Arcturi , Spicae Virginis et Solis , verificatione quadrantis ad horizontem aliquoties repetita. Valorem partium micrometri quadranti affixi , quanta potui diligentia determinaui Petropoli. Collocato nempe quadrante in meridiano ope micrometri menſuraui diametrum Solis , cumque d. $\frac{30.}{11.}$ $\frac{Sept.}{Oct.}$ Anno 1760. inueni aequalem eſſe 10 Reu. 33 part. cent d. $\frac{20}{31}$. Oct. 10 Reu. $36\frac{1}{2}$ part. cent. ac denique d. $\frac{21.}{1.}$ $\frac{Octob.}{Nov.}$ 10 Rev. 38 part. cent. micrometri Diametro Solis reſpondebant. Sunt autem Diametri pro his diebus , vti in Calendario Aſtronomico Pariſino exhibentur reſpectiue $32'.11'',3$: $32'.21'',5$: $32'.22''$: qui differentia refractionum diuerſis altitudinibus limborum Solis competente correcti , prodeunt $32'.9'',8$: $32'.14'',5$ t $32'.15''$. Quare ex obſeruatione prima valorem vnius partis centeſimae micrometri colligimus $1''.51''',9$ ex ſecunda $1''.51'''.9$ ex tertia $1''.51''',3$ et medius valor vnius partis centeſimae micrometri erit $1''.51'''.8$.

D. $\frac{21.}{2.}$ $\frac{April}{Maii}$ Altitudinem Spicae Virginis meridianam inueniebam $28°.50'+3$ Reu. part. cent. ſcilicet $29°.1'.8''$. Poſita refractione $1'.56''$ altitudo meridiana refractione correcta erit $58°.59'.12''$. Declinatio Spicae Virginis ineunte anno 1761. auſtralis eſt $9°.54'.20''.2$: adhibitis autem correctionibus ex deuiatione $+7''.9$ praeceſſione $+5''.3$ et aberratione $+7''.6$ oriundis, declinatio Spicae Vir-

Virginis apparens ad 21. Aprilis erit 9°.54′.41″. Vnde altitudo Poli prodit 51°.6′.6″.

Eadem die altitudinem Arcturi meridianam inueniebam 59°. 20′ + 0 Reu. 22. part. cent. ſcilicet 59°.20′.41″ quae refractione 38″ altitudini huic competente, correcta fit 59°.20′.3″. Declinatio Arcturi ineunte anno 1761 eſt 20°.26′.31″.2 bor. quae applicata correctione, ex deuiatione − 5″.2 praeceſſione − 5″.3 et aberratione − 11″.7 oriunda, fit 20°.26′.9″. Vnde altitudo Poli concluditur denuo 51°.6′.6″.

D. $\frac{26.}{7.}$ $\frac{April}{Maii}$ earundem ſtellarum capiebam altitudines meridianas, quarum Spicae Virginis altitudinem reperiebam 29° + 0 Reu. 36½. part. cent. = 29°.1′.8″. Arcturi vero 59°. 20′. + 0 Reu. 28 part. cent. = 59°.20′.52″. Vnde ex prima obſeruatione Latitudo Selenginsk colligitur 51°.6′.6″ ex altera vero 51°.5′.56″.

D. $\frac{1}{12}$. Iunii Altitudinem meridianam Arcturi inueniebam 59°.20′ − 2 Reu. 99½. part. cent. = 59°. 20′.41″. Vnde adhibitis ſimilibus correctionibus altitudo Poli eruitur 51°.6′.4″.

Parum ab his abludentem Latitudinem obſeruatorii mei, praebent altitudines Solis meridie captae. D. $\frac{22.}{2.}$ $\frac{Iulii}{Aug.}$ altitudinem meridianam limbi borealis inueniebam 57° − 0 Reu. 19 part. cent. = 56°. 56′.27″.40‴. Sumta ſemidiametro Solis 15°.50″.

10‴

10‴ ac refractione – parallaxi 32″.12‴, altitudo centri Solis fit 56°.40′.5″. Differentia meridianorum Pariſienſis et Selenginskenſis cum ſit 6^h.57′ quam proxime, declinatio Solis pro meridie Selenginskenſi reperitur 17°.46′ 16″ bor. ac altitudo Poli 51°.6′.11″.

D. $\frac{2}{13}$. Aug. Altitudinem meridianam eiusdem limbi reperiebam 54°. — 3 Reu. 10½ part. cent. = 53°.50′.20″.17‴. Poſita ſemidiametro Solis 15′.52″.15‴. refractione — parallaxi 38″.30‴ altitudo centri Solis prodit 53°.33′.49″. Declinatio autem Solis reperitur 14°.39′.56″. Vnde altitudo Poli reſultat 51°.6′.7″.

Omnium media altitudo Poli erit 51°.6′.6″.

INQVISITIO
In Longitudinem Vrbis Selenginsk.

Pro Longitudine vrbis Selenginsk inuenienda, octo in vniuerſum inſtitutae ſunt a me obſeruationes; primum inter eas locum tenet obſeruatio Eclipſeos Solaris, quae contigit d. $\frac{23.\ Maii}{3.\ Iun.}$, a qua, in ſtabilienda Longitudine, initium ducam.

Ob coelum nubilum non niſi finem ipſius obſeruare potui, qui ad meridianum Selenginskenſem euenit 20^h.23′.1″. t. v. Obſeruatio inſtituta eſt

 tubo,

tubo, cuius lens obiectiua diſtantiam focalem habet 15 ped. et ocularis 2. 52. dig. Lond.

Quantumuis obſeruatio haec certa mihi viſa fuerit, de exacte tamen definienda Longitudine obſeruatorii mei ſollicitus, rogaui Cel. *Wargentin* vt mihi copiam faceret obſeruationum in Suecia inſtitutarum. Vir humaniſſimus precibus meis morem gerens, transmiſit ad me obſeruationes eiusdem deliquii Torneae et Caianeburgi habitas, ex quibus Tabularum a coelo aberrationes eruere eo lubentius memet accinxi, quod eiusdem Eclipſeos finis Petropoli obſeruatus ſit. Verum facta comparatione harum obſeruationum, tum inter ſe, tum cum Petropolitana, intellexi eas vitio quodam laborare. Nam diuerſae comparationes diuerſos Tabularum errores, et tantos praebuerunt, qui cum exactitudine Tabularum *Maieri* alias cognita neutiquam conſiſtere poſſunt. Obſeruationem Petropoli habitam, ob vapores in horizonte pendulos et limbum Solis fluctuantem, ipſe obſeruator dubiam eſſe pronunciat; et cum ad momentum finis Eclipſeos Torneae et Caianeburgi, altitudo centri Lunae non maior fuerit 7°, credibile mihi videtur ſimiles circumſtantias in obſeruationes Suecicas ſe ſe implicuiſſe, easque incertas reddidiſſe. His perpenſis tutius eſſe duxi Tabulis *Maieri*, quas parum, praeſertim in Sizygiis aberrare a coelo, compertum eſt; computum Longitudinis ſuperſtruere.

Nego-

Negotium hoc aggreſſurus, inquiſiui in aequationem temporis ex Tabulis ſolaribus *de la Caille* — 2′.25″, ac tempus medium obſeruationis obtinui 20ʰ.20′.36″. Dein pro differentia meridianorum Pariſienſis et Selenginskenſis aſſumſi binas ſequentes hypotheſes.

	Hypoth. I	Hypoth. II.
	7ʰ. 0′.36″	6ʰ.50′.36″
Mom. obſ. ad mer. Par. red.	13. 20. 0	13. 30. 0

Ad haec bina momenta locum Solis verum ſecundum Tabulas *de la Caille* Lunae autem cum eius diametro horizontali et parallaxi aequatorea ſecundum Tabulas *Maieri*, quam accuratiſſime ſupputaui, ac inueni.

Longitud. Solis veram	72°.33′.18″.1	72°.33′.42″.6
Longit. Lunae veram	72. 19. 14. 8	72. 25. 30. 7
Latitudinem - -	1. 7. 36. 3	1. 8. 12. 3
Diametrum Lunae	33. 21. 5	
Parallaxin aequatoream	61. 9. 5	

Ad ſupputandas parallaxes Lunae in Longitudinem et Latitudinem, quales ſub hypotheſi figurae terrae ſphaeroidicae ſtatuere oportet, adhibui formulas a *Maiero* in Tomo II. Commentariorum Göttingenſium expoſitas. Sumta vero altitudine Poli Selenginskenſi 51°.6′.6″, qualem ſupra definiuimus, et obliquitate eclipticae 23°.28′.18″. ſecundum praecepta ibi tradita reperitur.

Nonageſimus Eclipticae	38°. 16′. 26″	38°. 16′. 35
Altitudo nonageſimi	50. 19. 42	50. 19. 52
Diſtantia Lunae a non.	34. 2. 48	34. 8. 35

Poſita parallaxi Solis 8″.5 et parallaxi Lunae a Sole 61′.1″, ad eadem momenta ſequentes numeros pro parallaxi Lunae in Longitudinem et Latitudinem obtinui.

Parallaxis Lunae in Longit.	+ 26′. 30″. 9	+ 26′. 34″. 2
Parallaxis in Latitudinem	— 38. 31. 2	— 38. 30. 9
Quare Long. Lunae apparens	72°. 45′. 45″. 8	72°. 52′. 4. 9
Latitudo eius apparens	29. 5. 1	29 41. 4
Differ. Long. Sol. et Lunae	12. 27. 7	18. 54. 8
Diſtantia Centrorum appar.	31. 38. 5	34. 54. 8

Altitudo Lunae apparens ſupra horizontem ad finem Eclipſeos reperitur $39\frac{1}{2}°$, vnde incrementum diametri Lunae emergit 22″.9, ac poſita diametro Solis 31′.34″, ſumma ſemidiametrorum Solis et Lunae prodit 32′.39″,2.

Ex hoc calculo perſpicimus Solem et Lunam ex Selenginsk ſpectatos interuallo 10′ per 3′.16″,3 a ſe ſe inuicem diſceſſiſſe; momento autem, quo finis eclipſeos accidere obſeruatus eſt, diſtantia centrorum aequare debuit ſummam ſemidiametrorum antea repertam. Vnde inuenitur vrbem Selenginsk occidentaliorem eſſe debere 3′.6″ ac in prima hypotheſi ſtatutum eſt. Proinde Longitudo vrbis Selen-

lenginsk a meridiano Pariſino verſus ortum numerata prodit $6^h.57'.30''$.

Secunda obſeruatio, quam pro definienda Longitudine Selenginski inſtitui, erat occultatio φ ſagittarii a Luna, quae contigit d. $\frac{4}{15}$. Iulii ad meridianum Selenginskenſem $11^h.24'.51''$ vel $53''$. t. v. Miſſa tamen ea, donec, quantus ſit Tabularum error, erutum fuerit, ad inueſtigandam Longitudinem ex obſeruationibus eclipſium Satellitum Iouis progredior.

D. $\frac{20}{31}$. Iulii Immerſio II. Satellitis tubo 15 pedum obſeruata - - - $14^h.48'.35''$. t. v.

D. $\frac{14}{25}$. Aug. Immerſio I. Satellitis eodem tubo obſeruata - - - 10. 46. 24
- - - - Imm. II. Sat. 12. 15. 4.

Immerſio ſecundi Satellitis capta eſt exquiſitiſſimo tubo octo pedum cum dimidio, et admodum certa mihi viſa eſt.

D. $\frac{21.}{1.}$ $\frac{Aug.}{Sept.}$ Imm. I. Sat. tubo 15 ped. obſ. $12^h.43'.9''$.
- - - Imm. II. Sat. eodem tubo obſ. 14. 53. 50.

De binis vltimis obſeruationibus monui, in expoſitione obſeruationum mearum, eas eſſe ſubdubias, ob rorem, qui lenti obiectiuae tempore obſeruationis adhaeſerat; aſt cum tubus ad Immerſionem primi ſatellitis per aliquot ſolum minuta prima, ad Immerſionem autem ſecundi per bihorium fere

ſere aëri libero expoſitus fuiſſet, prior non nonniſi paucis ſecundis a vera Immerſione diſcedere, aſt vltima pro dubia aut erronea habenda eſt.

Cel. *Wargentin* promouendis rebus aſtronomicis ſtudens, communicauit mecum ſeriem obſeruationum in diuerſis locis ſuper Eclipſes Satellitum Iouis menſibus Iunio, Iulio, Auguſto et Septembri habitarum, ex quibus maximum fructum in praeſenti negotio percepiſſe me fateor. Nam eae non tantum binis vltimis correſpondentes continebant, verum etiam diſſenſum Tabularum Cel. Viri a caelo, patefaciebant, ſic vt omnes reliquas ſecure ad definiendam Longitudinem obſeruatorii mei adhibere potuerim. Ex iis de primo Satellite conſtitit, Immerſiones eius menſe Auguſto, vt plurimum contigiſſe 40″ citius, quam calculus indicat, de ſecundo autem momenta Immerſionum non niſi paucis ſecundis vtrinque a calculo diſceſſiſſe, ſic vt in eruenda differentia meridianorum, momenta Immerſionum ſecundi Satellitis e tabulis depromta, pro veris cum ipſo *Wargentino* ſtatuere non dubitem.

$\frac{20}{31}$. Iulii Imm. II. Sat ex Tab. ad mer. Par.		8^h.	$1'$.	$53''$.
Imm. eiusdem Selenginski obſ.		14.	58.	35.
Differentia meridian. prodit	I.	6,	56.	42.
$\frac{14}{25}$. Aug. Imm. I. Sat. ad Merid. Pariſ.		3^h.	$50'$.	$25''$.
Error Tabularum				−40.

Immer.

	Immer. vera ad Merid. Pariſ.	3. 49. 45.
	Eadem Selenginski obſeruata	10. 46. 24.
	Differentia meridianorum II.	6 56. 39.
- -	Imm. II. Sat. ad. mer. Par. ex Tab.	$5^h. 18'. 8''.$
	Eadem Selenginski obſeruata	12. 15. 4.
	Differentia meridianorum III.	6. 56. 56.
21. Aug. / 1. Sept.	Imm. I. Sat. ex Tab. deducta	$5^h. 46'. 38''.$
	Error Tabularum	— 40.
	Imm. vera ad merid. Pariſ	5. 45. 58.
	Eadem Selenginski obſeruata	12. 43. 9.
	Differentia meridianorum IV.	6. 57. 11.
- -	Imm. II. Sat. ad merid. Pariſ.	7. 58. 11.
	Selenginski obſeruata	14. 53. 50.
	Differentia meridianorum V.	6. 55. 39.

Reiecta vltima vtpote dubia ob rationem ſupra allatam, mediam meridianorum differentiam ſtatuerem $6^h. 56'. 52''$, niſi diuerſitatis tuborum, quibus obſeruationes in aliis locis peractae ſunt, ratio habenda eſſet. Obſeruationes nempe, ex quibus correctiones momentis Immerſionum tabularibus adhibendas deduxi, vt plurimum peractae ſunt Teleſcopiis 80-100 vicibus obiecta amplificantibus. Quam ob rem quaelibet mearum determinationum $10''$. aut $15''$. augenda erit, atque ſic differentiam meridianorum Pariſienſis et Selenginskenſis dabit

I. obſeruatio - - -	$6^h.56'.52''$.
II. - - - - - - - -	6. 56 49.
III. - - - - - - - -	6. 57. 11.
IV. - - - - - - - -	6. 57. 21.
Supra vero inuenimus -	6. 57. 30.
Hinc media omnium reſultat	6. 57. 8.

D. $\frac{21.}{1.}$ $\frac{Aug.}{Sept.}$ Dominus *Pingre* in inſula Rodrigues Immerſionem I. Satellitis Iouis tubo 18 pedes longo obſeruauit $9^h.49'.40''$. Hinc differentia meridianorum inſulae Rodrigues et Selenginski eruitur $2^h.53'.29''$. At aliae in inſula Rodrigues factae obſeruationes euincunt Longitudinem eius a meridiano Pariſino verſus ortum numeratam eſſe $4^h.3'.40''$. circiter. Vnde differentiam meridianorum Pariſienſis et Selenginskenſis denuo nanciſcimur $6^h.57'.9''$. non habita ratione diuerſitatis tuborum.

Eadem die Immerſio II. Satellitis Stockholmiae, Vpſaliae et ad Caput Bonae Spei obſeruata eſt, verum cum Selenginskenſis ſit dubia, definiendae hinc differentiae meridianorum ſuperſedeo, contentus ſupra allatis determinationibus.

INQVISITIO
In Parallaxin Solis.

Antequam ipſam inueſtigationem aggrediar, paucis enarrabo circumſtantias, ſub quibus obſeruationem

tionem tranſitus Veneris per diſcum Solis inſtitui. De vniformi motu horologii, ad quod obſeruationem hanc peregi, a longo tempore conuictus eram, proximis tamen ante et poſt obſeruationem diebus, quotiescunque coelum fauit, non praetermiſi capere altitudines Solis correſpondentes, ex quibus aeque ac ex praecedentibus compertum habui, horologium ſpatio diei Solaris medii conſtanter accelerare 23″.

D. 24. Maii / 4. Iunii Quadrante meo bipedali cepi altitudines Solis correſpondentes.

		Ante merid.	Alt. Solis.	Poſt merid.	Mer. ad hor.
fil. mob.	m. ſup.	$10^{h}.14'.27''$	41°	$5^{h}.15'.43''$	$1^{h}.45'.5''$
	m. inf.	17. $57\frac{1}{2}$		12. $12\frac{1}{2}$	1. 45. 5
imm.	m. ſup.	15. $53\frac{1}{2}$		14. 18	1. 45. $5\frac{3}{4}$
	m. inf.	19. 23		10. 48	1. 45. $5\frac{1}{2}$
fil. mob.	m. ſup.	10. 21. 5	42°	5. 9. 5	1. 45. 5
	m. inf.	24. 36		5. 33	1. 45. $4\frac{1}{2}$
imm.	m. ſup.	22. 30		7. 39	1. 45 $4\frac{1}{2}$
	m. inf.	26. 2		4. $6\frac{1}{2}$	1. 45. $4\frac{1}{4}$

Medius itaque meridies ad horologium erit $1^{h}.45'.4''.56'''$, vnde ſubtractis $4''.43'''$ ob variatam Solis declinationem meridies verus proueniet $1^{h}.45'.0''.12'''$.

D. 26. Maii ab ipſo ortu Solis vltra meridiem coelum, varias ſubiens mutationes, tam denſis nubibus erat obuolutum, vt omnem ſpem videndae

 Vene-

Veneris in Sole perderem. Tandem circa horam tertiam cum Venus emerſioni propinqua eſſet, vehementi vento diſcuſſis nubibus, Sol intra hiatus eorum ſubinde in conſpectum prodire inciepiebat. Spes proinde affulgebat contactus limborum ſaltem in exitu obſeruandi, idcirco miſſis aliis, quas inſtituere animus fuerat obſeruationibus, ad Venerem proſequendam tubo quindecim pedes longo memet accingebam. Appropinquantibus ad ſeſe inuicem limborum extremitatibus, cum adhuc inter eas lucidum filum ſatis ſenſibile conſpiceretur, ſubito e Venere quaſi guttulam nigram horologio monſtrante $5^h.7'.49''$ procedere, et limbum Solis limbo Veneris iungere obſeruabam. Hebeſcenti oculo, et nubeculae tenui, qua Sol tunc fuerat obductus, phaenomenon hoc adſcribendum eſſe exiſtimabam: verum cum multos alios obſeruatores coelo ſereno eandem apparentiam vidiſſe poſtea didiciſſem, aliam eius rationem quaerendam eſſe exiſtimo.

Sub iisdem imo deterioribus circumſtantiis limbum Veneris derelinquere limbum Solis iudicabam, cum horologium indicaret $5^h\ 25'.55''$, ita vt mora Veneris in limbo Solis per obſeruationem meam ſit $18'.6''$.

Binis ſequentibus diebus capiebam ante meridiem altitudines Solis, verum poſt meridiem iis correſpon-

reſpondentes non obtinebam. Tandem d. 29. Maii ſequentes capiebantur:

		Ante merid.	Alt. Solis.	Poſt merid.	Mer. ad hor.
fil. mob.	m. ſup.	$10^h.18'.9''$		$5^h.17'.45''\frac{1}{2}$	$1^h.47'.57''\frac{1}{4}$
	m inf.	21. 40	40°. 30′.	14. 14	1. 47. 57
immob.	m. inf.	23. 4½		5. 12. 50	1. 47. 57¼
fil. mob.	m. ſup.	10. 54. 8		4. 41. 46	1. 47. 57
	m. inf.	57. 51	44°	38. 4	1. 47. 57½
immob.	m. ſup.	55. 38		40. 17	1. 47. 57½

Meridies medius hinc deducitur $1^h.47'.57''.15'''$. Applicata autem debita correctione $-3''.35'''$, meridies verus ad horologium prodit $1^h.47'.53''.40'''$, vnde acceleratio horologii ſpatio diei ſolaris medii colligitur $23''\frac{1}{2}$, ac ſubducto calculo tempus verum contactus interni prodit $3^h.21'.36''$, et contactus externi $3^h.39'.42''$.

Ex deſcriptione circumſtantiarum, ſub quibus obſeruationem Veneris ſub Sole inſtitui, iudicabunt lectores, non in poteſtate mea fuiſſe, ſemitam Veneris apparentem definire, quam ob rem mutuanda mihi ſunt elementa eo ſpectantia ab aliis Aſtronomis. Commendat ſe, non minus exactitudine ſua quam conſenſu cum aliis, habita Grenouici ab Aſtronomo Regio *Bliss* obſeruatio: idcirco liceat mihi in eruenda parallaxi Solis ab ipſo ſtatuta elementa ex Transactionibus Anglicanis Vol. LII deſumere.

 Temp.

Temp. Coniunct. app. ad mer. Grenou. $17^h.45'.\ 3''$ t.v.
Latitudo Veneris app. temp. coniunct. 9. 56. 3 Auſtr.

Porro ex Tabulis *Halleianis* deducitur motus horarius Solis $2'.23''.45$. Motus horarius Veneris a Sole ſit $3'.57''.13$, motus horarius Veneris in Latitudinem $35''.46$, et denique motus horarius in orbita $3'.59''.77$.

Ex iisdem Tabulis ad momentum coniunctionis diſtantia Telluris a Sole elicitur 101552. 1, diſtantia Veneris a Sole 72643. 5. Quare poſita parallaxi Solis horizontali $8''.5$ parallaxis Veneris prodit $29''.83$ et parallaxis Veneris a Sole $21''.33$.

Parallaxi Solis $8''.5$ aſſumta tanquam vera, conatus ſum ſemitam apparentem Veneris reducere ad centrum Telluris, ſupputando parallaxin Veneris in Longitudinem et Latitudinem ad momentum coniunctionis apparentis Grenouici obſeruatum. Peracto calculo inueni parallaxin Veneris in Longitudinem $11''.49$, qua Longitudo Veneris tunc aucta apparere debuit, parallaxin autem in Latitudinem $-17''.09$. Parallaxin Veneris in Longitudinem conuertendo in tempus ope motus horarii Veneris a Sole, obtinui tempus coniunctionis verae e centro Telluris ſpectatae ad meridianum Grenouicenſem $17^h.42'.8''$, pro quo momento Longitudo Solis vera ex Tabulis de la *Caille*, eademque et Veneris repe-

reperitur 75°.36′.14″.33, Latitudo Veneris vera 9′.37″.49 auſtr.

Ad determinandum momentum contactus interni veri opus erat quantitate diametrorum Solis et Veneris, quos tales aſſumſi, quales pleraeque obſeruationes in Europa a Cel. Aſtronomis peractae ſuppeditant. Semidiameter Solis inpoſterum mihi erit 15′.46″, et ſemidiameter Veneris 29″.5. His datis, nec non inclinatione orbitae Veneris apparentis ad Eclipticam aſſumta 8°.30′.10″, diſtantia minima centrorum deducitur 9′.31″.14. Tempus contactus interni veri in exitu ad meridianum Grenouicenſem reperio 20^h.20′.8″, pro quo diſtantia Veneris a Sole ſecundum Longitudinem reperitur 10′.24″.45, et Latitudo eius 11′.10″.84.

Reducta ſic orbita Veneris ex ſuperficie Telluris viſa ad centrum Telluris, ſi detur differentia meridianorum Grenouicenſis et loci cuiusdam, facili negotio reperitur momentum contactus interni veri ad meridianum eius loci. Sequens Tabula ſiſtit Longitudinem a meridiano Pariſino numeratam, et Latitudinem eorum locorum, in quibus peractae ſunt obſeruationes, quas ad parallaxin Solis inueſtigandam adhibui.

Nomi-

Nomina Locor.	Obſeruat.	Latitudo	Longitudo	cont. inter.	cont. exter.
Pariſiis	De la Lande	48°. 15'. 14"	0h. 0'. 0"	8h. 28'. 26"	8h. 46'. 54"
	Clouet	- - -	- - - -	8. 28. 27	8. 46. 55
	Fouchy	- - -	- - - -	8. 28. 27	8. 46. 41
	Meſſier	- - -	- - - -	8. 28. 29	8. 46. 43
	De la Caille	- - -	- - - -	8. 28. 37	8. 46. 49
	Maraldi	- - -	- - - -	8. 28. 42	8. 46. 54
Grenouici	Bliſſ	51. 28. 30	0h. 9'. 10" oc.	8. 19. 0	8. 37. 9
	Bird			8. 19. 0	8. 37. 9
	Green			8. 19. 0	8. 37. 10
Göttingae	Maier	54. 31. 54	0. 30. 11 or.	8. 58. 26	9. 16. 54
Bononiae	Friſius	44. 29. 30	0. 36. 5. or.	9. 4. 56	9. 22. 59
	Marinus			9. 4. 58	9. 23. 0
	Matheucius			9. 4. 58	9. 23. 7
Romae	PP. Domin.	41. 53. 54	0. 40. 30	9. 9. 36	9. 28. 7
Vpſaliae	Stroemer	59. 51. 50	1. 1. 12	9. 28. 0	- - -
	Mallet			9. 28. 2	9. 46. 29
	Bergman			9. 28. 9	9. 46. 30
Stockholmiae	Wargentia	59. 29. 30	1. 2. 52	9. 30. 8	9. 48. 9
	Klingenſt.	- - -	- - - -	9. 30. 11	9. 48. 8
ad C. B. Spei	Maſon	33. 55. 42. A	1. 4. 24	9. 39. 52	9. 57. 21
	Dixon			9. 39. 48	9. 57. 21
Torneae	Hellant	65. 50. 50	1. 27. 37	9. 54. 8	10. 12. 22
	Lagerbohm			9. 54. 22	10. 12. 14
Caianeburg	Planman	64. 13. 13	1. 41. 30	10. 7. 59	10. 26. 22
Tobolsk	Chappe	58. 22. 12	4. 23. 45	12. 49. 23	13. 7. 42
Selenginsk	Rumowski	51. 6. 6	6. 57. 8	13. 21. 46	15. 39. 42

Inuento ope huius laterculi pro meridiano cuiusuis loci momenta contactus veri ſiue ex centro Telluris ſpectati, et computatis pro eodem momenmento parallaxibus in Longitudinem et Latitudinem, patet, quantum diſtantia centrorum ex dato loco viſa

viſa differentiam ſemidiametrorum Solis et Veneris ſuperet, vel ab ea deficiat. In priori caſu aſſumto alio momento praecedente, in ſecundo autem ſequente, computo denuo parallaxin Veneris in Longitudinem et Latitudinem, ac denuo diſtantiam centrorum apparentem obtineo. Vnde interpolando tempus contactus apparentis eruitur, quod collatum cum momento contactus ex centro Telluris ſpectati effectum parallaxeos patefacit.

Cum obſeruationes ad Caput Bonae Spei et Selenginski habitae prae reliquis omnibus maximi ſint momenti, quippe quae inter ſe collatae effectum parallaxeos maiorem ſiſtunt, quam reliquae obſeruationes, pro iſtis binis locis praecipua elementa, prout a me ſunt computata, apponere hic liceat.

Tempus contactus interni ad meridianum Grenouicenſem eſt $20^h.20'8''$, idem ad meridianum Capitis Bonae Spei erit $21^h.33'.43''$ t. v. Differentia Longitudinum Solis et Veneris, cum eiusdem Latitudine vera, huic tempori competentes, ſupra iam ſunt exhibitae. Eodem temporis momento per aequationem temporis $-1'.51''$ in medium conuerſo, quaeſiui punctum aequatoris, quod tunc meridiano Capitis Bonae Spei reſpondebat. Dein poſita obliquitate Eclipticae $23°.28'.18''$, inueſtigaui neceſſaria elementa ad parallaxin Veneris in Longitudinem et Latitudinem eliciendam, et tandem

 per

per cognitas formulas parallaxium reperi parallaxin Veneris in Longitudinem + 12″.01, parallaxin in Latitudinem − 15″.67. Vnde differentia Longitudinum apparens 10′.12″.44, Latitudo Veneris apparens 10′.55″.17 ac diſtantia centrorum 896″.84. Ex quo apparet obſeruatori ad Caput Bonae Spei locato, diſtantiam centrorum nondum differentiae ſemidiametrorum aequalem apparuiſſe. Quaeſiui ergo ſitum Veneris apparentem reſpectu Solis ad 21^h. 43′.43″. t. v. pro quo momento primum reperi differentiam Longitudinum Solis et Veneris veram 11′.3″.97, et Latitudinem Veneris 11′.16″.75. Calculo parallaxium expedito, parallaxin Veneris in Longitudinem pro hoc momento obtinui + 11″.42 in Latitudinem − 15″.90 pro conuentendis Longitudine et Latitudine veris in apparentes, et diſtantiam centrorum apparentem 928″.81. Vnde tempus contactus pro obſeruatore ad Caput Bonae Spei conſtituto prodit 21^h.39′.51″.9, effectu parallaxeos exiſtente 6′.8″.9, tot ſcilicet minutis temporis obſeruator ad Caput Bonae Spei locatus, tardius videret contactum, ac idem ex centro Telluris ſpectaretur, ſi parallaxis Solis foret 8″.5.

Similem in modum indagaui effectum parallaxeos pro obſeruatore Selenginskenſi. Tempus contactus veri ad meridianum Selenginskenſem reductum 3^h.26′.26″. Computo parallaxium peracto, parallaxin Veneris in Longitudinem inueni − 11″.76, in

in Latitudinem + 10′.95. Quare differentia Longitudinum apparens fit 10′.36″.21. Latitudo apparens 11′.21″.79, ac diſtantia centrorum 932″.52. Contactum itaque ſpectatori Selenginskenſi iam contigiſſe apparuit. Pro momento ergo anteriori, quale eſt $3^h.16'.35''$, quaeſiui denuo ſitum Veneris apparentem reſpectu Solis, pro quo primum inueni differentiam Longitudinum Solis et Veneris veram 9′ 44″.93 et Latitudinem eius 11′.4″.94, ac porro parallaxin Veneris in Longitudinem — 11″.36 in Latitudinem + 10″.82; vnde diſtantia centrorum apparens 901″.22 ac momentum contactus ex Selenginsko ſpectati $3^h.21'.19''.3$ ſc. obſeruator Selenginskenſis videre deberet 5′.6″.7 citius quam ſi idem ex centro telluris ſpectaretur. Vnde colligimus, poſita parallaxi Solis 8″.5 obſeruatorem ad Caput Bonae Spei tardius contactum internum videre debuiſſe 11′.15″.6, quam obſeruator Selenginskenſis.

Cum momentum contactus interni ad Caput Bonae Spei obſeruatum fuerit $9^h.39'.50''$, idem Selenginski obſeruari debuiſſet 3^h 32′.33″ poſt meridiem, ſi Venus nullam haberet parallaxin. Verum per obſeruationem habemus momentum contactus interni Selenginski $3^h.21'.36''$, vnde effectus parallaxeos erit per obſeruationem 10′.57″. Poſita vero parallaxi Solis 8″.5 effectus parallaxeos inuentus eſt 11′.15″.6: quare inferendo 11′.15″.6:

8″.5 = 10′.57″ ad quartum proportionalem, obtinetur vera quantitas parallaxeos Solis 8″.26.

Simili ratione obſeruationis Selenginski habitae comparationem inſtitui cum aliis, et iis praecipue, in quibus differentia effectuum a parallaxi proficiſcentium non minor eſt quatuor minutis primis, ne ſcilicet ineuitabiles obſeruationum errores valde ſenſibilem in parallaxi Solis differentiam producere valeant. Tabula hic ſubiuncta exhibet quantitatem parallaxeos Solis, quae ex his comparationibus reſultat.

9ʰ. 39′. 50″	Cap. B. S.	+ 0′. 8″ 9	8ʰ. 19′. 0″	Gren.	— 1′. 9″.5
5. 52. 43	Diff. mer.	+ 5. 6. 7	7. 6. 18	Diff. mer.	5. 6. 7
15. 32. 33		11. 15. 6	15. 25. 18		3. 57. 1
15. 21. 36	Seleng.	— 18″.6	15. 21. 36	Seleng.	— 15″.2
10. 57	Parall. Solis	8″ 26	3. 42	Parall. Solis	7″.96
8. 28. 31	Paris.	— 0′.53″.5	9. 4. 58	Bon.	— 0′.29″.4
6. 57. 8	Diff. mer	+ 5. 6. 7	6. 21. 3	Diff. mer	5. 6. 7
15. 25. 39		4. 13. 2	15. 26. 1		4. 37. 3
15. 21. 36	Seleng.	— 10″.2	15. 21. 36	Seleng.	— 12″.3
4. 3	Parall. Solis	8″.11	4. 25	Parall. Solis	8″.13
8. 58. 26	Götting.	— 1′.16″.3	9. 9. 36	Rom.	— 0′.14″.8
6. 26. 57	Diff. mer.	+ 5. 6. 7	6 16. 38	Diff. mer.	+ 5. 6. 7
15. 25. 23		3. 50. 4	15. 26. 14		4. 51. 9
15. 21. 36	Seleng.	— 3″.4	15. 21. 36	Seleng.	— 13″.9
3. 47	Parall. Solis	8″.45	4. 38	Parall. Solis	8″.09

Parallaxis Solis ex comparatione obſeruationis Grenouicenſis reſultans non nihil diſſentit a reliquis; verum ſi differentiam Meridianorum Pariſienſis et Grenouicenſis ponamus 9′.17″, prout a quibusdam ſtatuitur, parallaxis Solis prodibit 8″.20.

Cum

Cum obſeruatio ad Caput Bonae Spei habita ea gaudeat commoditate, quod, comparata cum obſeruationibus Europaeis, maiorem ſiſtat parallaxeos effectum ac mea Selenginskenſis: non ingratum fore puto, ſi, quanta ex his comparationibus prodeat parallaxis Solis, ſequenti Tabula indicem.

9^{h}.39′.50″	Cap. B. S.	+ 6′. 8″.9	9^{h}.39′.50″	Cap. B. S.	+ 6′. 8″.9
3. 10. 20	Diff. mer.	+ 3. 45. 7	0. 23. 12	Diff. mer.	+ 3. 4″.4
0. 59. 10		9. 54. 0	10. 3. 2		9. 13. 3
0. 49. 23	Tobolsk	— 7″.6	9. 54. 8	Torn.	— 19″.3
9. 47	Parall. Solis	8″.39	8. 54	Parall. Solis	8″.2^{0}
9^{h}.39′.50″	Cap. B. S.	+ 6′. 8″.9	9^{h}.39′.50	Cap. B. S.	+ 6′. 8″.9
0. 37. 5	Diff. mer.	+ 2. 58. 0	0. 3. 13	Diff. mer.	+ 2. 22.0
10. 16. 55		9. 6. 9	9. 36. 37		8. 30 9
10. 7. 59	Caian.	— 10″.9	9. 28. 9	Vpſal.	— 2″.9
8. 56	Parall. Solis	8″. 36	8. 28	Parall. Solis	8″. 45
9^{h}.39′.50″	Cap. B. S.	+ 6′. 8″.9	9^{h}.39′.50″	Cap. B. S.	+ 6′. 8″.9
0. 1. 33	Diff. mer.	+ 2. 16. 9	0. 34. 14	Diff. mer.	+ 1. 16. 3
9. 38. 17		3. 25. 8	9. 5. 30		7. 25. 2
9. 30. 9	Stockholm	— 17″.8	8. 58. 26	Götting.	— 15″. 2
8. 8	Parall. Solis	8″. 20	7. 10	Parall. Solis	8″. 23
9^{h}.39′.50″	Cap B. S.	+ 6′. 8″.9	9^{h}.39′.50″	Cap. B. S.	+ 6′. 8″.9
1. 13. 35	Diff. mer.	+ 1. 9. 5	1. 4. 25	Diff. mer.	+ 0. 53. 5
8. 26. 15		7. 18. 4	8. 35. 25		7. 2. 4
8. 19. 0	Grenou.	+ 3″.4	8. 28. 31	Paris.	— 8″.4
7. 15	Parall Solis	8″.43	6. 54	Parall. Solis	8″.33
9^{h}.39′.50″	Cap. B. S.	+ 6′. 8″.9	9^{h}.39′.50″	Cap. B. S.	+ 6′. 8″.9
0. 28. 20	Diff. mer.	+ 0. 29. 4	0. 23. 55	Diff. mer.	+ 0. 14. 8
9. 11. 30		6. 38. 3	9. 15. 55		6. 23. 7
9 4. 58	Bonon.	— 6″.3	9 9. 36	Rom.	— 4″.7
6. 32	Parall. Solis	8″.36	6. 19	Parall. Solis	8″.39

Omnes itaque obſeruationes a me in computum ductae, eo gradu in ſtatuenda Solis parallaxi conſentiunt, vt pleraeque non niſi in centeſimis minuti ſecundi partibus diſcrepent, atque minima a maxima non niſi 0″.36 i. e. tertia circiter minuti ſecundi parte ſuperetur. Mediam itaque ex his determinationibus quantitatem 8″.33 pro vera magnitudine parallaxeos aſſumere iure poſſumus: atque cum nullum ſit in tota Aſtronomia elementum, de cuius quantitate vel ad vnum minutum ſecundum certo conſtet, gratulari nobis debemus, quod, in tam ardua re, ad tam incredibilem exactitudinem noſtris temporibus eniti licuerit.

ADDITAMENTVM.

Praeter obſeruationem tranſitus Veneris per diſcum Solis, ab aſtronomis Anglis ad Caput Bonae Spei peractam, datur adhuc alia in parte Telluris auſtrali a Cel. *Pingre* in inſula Rodrigues inſtituta: comparationem cuius cum Europaeis aliisque in parte Telluris boreali peractis in inueſtigatione mea parallaxeos Solis, anno praeterito Academiae tradita, ideo potiſſimum non inſtitui, quod Longitudo inſulae huius tunc liquido non conſtabat. Perlecta vero erudita diſſertatione Cel. *Pingre*, quae comparet in Commentariis Academiae Regiae Scientiarum Pariſinae in annum 1761 editis, non Longitudinem ſolum

ſolum veram inſulae Rodrigues, verum etiam, quantum Tabulae *Maieri* d. $\frac{4}{15}$. Iulii a coelo aberrauerint, didici. Secure igitur nunc obſeruationem iſtam cum aliis conferre, et Longitudinem vrbis Selenginsk ex occultatione ſtellae φ ſagittarii a Luna eruere poterimus.

Latitudo inſulae Rodrigues, media ex pluribus ſumta, prodit 19°. 40′. 40″. auſtr. Longitudo eiusdem a meridiano Pariſino verſus ortum numerata, e diuerſis obſeruationibus, optimae inter ſe conſentientibus, deducta a Cel. *Pingre* ſtatuitur 4^h. 3′. 26″.

Coelum nubilum impediit, quominus in introitu contactus limborum Solis et Veneris obſeruare potuerit Vir Celeberrimus: durante vero tranſitu, quam plurimas eorundem diſtantias menſurauit. Referendis iis, vtpote ad inſtitutum meum nihil facientibus, ſuperſedeo: contactus autem in exitu, in diſſertatione memorata pag. 443., ſequentem in modum relatos legimus:

Temps de la pendule	*Temps vrai*	*Remarques ſur les obſeruations*
0^h.35′.44″	0^h.36′.49″	*Attouchement certain et inſtantanée des bords*
0. 53. 3	0. 54. 9	*Venus presque ſortie, eſt couverte d'une nuage*
0. 53. 21	54. 27½	*Je la vois encore, mais bien prete de quitter.*

Vt obſeruationem hanc in vſum conuerterem, aſſumtis iisdem, quibus ſupra vſus ſum elementis, compu-

computaui effectum parallaxeos pro obſeruatore in Rodrigues locato, qui prodiit 2′.57″.6: tot ſcilicet minutis temporis contactus internus tardius euenire debuit, quam ſi idem ex centro Telluris ſpectaretur. Vnde obſeruationem Rodriguenſem conferendo cum aliis ſequentem nanciſcimur Solis parallaxin:

Nomina Locorum	Differentia Meridian	Sum. effect. computata	Sum. effect. ex obſ. reſ.	Parallaxis Sol. horiz.
Selenginsk	2ʰ. 53′. 42″	8′. 4″. 3	8′. 55″	9″. 38
Tobolsk	0. 20. 19	6. 43. 3	7. 45	9. 80
Tornea	2. 35. 48	6. 2. 0	6. 53	9. 97
Caianeburg	2. 21. 56	5. 55. 6	6. 54	9. 89
Vpſala	3. 2. 14	5. 19. 6	6. 26	10. 26
Stockholm	3. 0. 34	5. 14. 5	6. 6	9. 89
Göttinga	3. 3. 15	4. 13. 9	5. 8	10. 31
Grenouicum	4. 12 36	4. 7. 1	5. 13	10. 76
Pariſiis	4. 3. 36	3. 51. 1	4. 52	10. 73
Bononia	3: 27. 21	3. 27. 0	4. 28	11. 00
Roma	3. 22. 56	3. 12. 4	4. 17	11. 35.

Cel. *Pingre* miratur conſenſum, qui cernitur in parallaxi Solis ex combinatione diuerſarum obſeruationum cum obſeruatione Capitis Bonae-Spei reſultante, atque vt ſimilem ex comparatione ſuae cum aliis obtineat, ex contactu interno Veneris in introitu, ſtabilita iam antea Longitudine Tobolii, Torneae, Caianeburgi et Vpſaliae, a meridiano Stock-

Stockholmiae numerata, auget Longitudinem Stockholmiae 21″, fultus auctoritate abbatis *de la Caille*. Poſita iam Longitudine Stockholmiae $1^h.3'.13''$, immutat quoque omnium locorum a Longitudine Stockholmiae pendentium, ſc. Longitudinem Tobolii a meridiano Pariſino numeratam ſtatuit $4^h.24'.14''$, Caianeburgi $1^h.42'.1\frac{1}{4}''$. Torneae $1^h.28'.11\frac{1}{2}''$ et Vpſaliae $1^h.1'.30''$. Vnde per computum meum parallaxis Solis prodit ex obſeruatione Rodriguenſi collata cum

Toboliensi - - - - -	10″.41
Tornenſi - - - - -	10. 47
Caianeburgenſi - - - -	10. 63
Vpſalienſi - - - - -	10. 74
Stockholmienſi - - - - -	10. 45.

Reductis hunc in modum ad mutuum conſenſum omnibus fere grauioris momenti obſeruationibus, quae a reliquis diſſentiebant, Cel. *Pingre* parallaxin Solis horizontalem 10″.42 ſtatuendam eſſe pronunciat.

Ex obſeruationibus itaque in parte Telluris boreali captis reſtat vnica Selenginskenſis, quae concluſioni Pingreanae aduerſatur; Bononienſem enim et praeſertim Romanam inter dubias referre videtur. Studio veritatis ductus cuperem equidem, vt et mea aeque facile ac aliae cum obſeruatione Cel.

 Pingre

Pingre conciliari queat; verum id nulla ratione praeſtari poſſe, ex ſequentibus colligere poterimus.

EXAMEN
obſeruationis Selenginskenſis.

Vt ex comparatione obſeruationis meae cum Rodriguenſi parallaxis Solis prodeat 10″.42, neceſſe eſt, vel momentum contactus interni integro fere minuto primo diminuere, vel Longitudinem obſeruatorii eadem quantitate augere. Videamus ergo, vtrum tantus error vel in ipſam meam obſeruationem, vel in differentiam Meridianorum obſeruatorii Selenginskenſis, cadere poſſit.

In obſeruatione ipſa error, ſi quis eſt, vel ex motu horologii, vel ex ipſo momento male obſeruato, originem trahat neceſſe eſt. Quod ad primum fontem, errorem ex eo non vltra 2″ aſcendere poſſe, facile conuincimur, ſi tam multiplices obſeruationes ad motum horologii cognoſcendum inſtitutas perpendimus. Veroſimilius dixerit quis, inclementiam tempeſtatis obſeruationem meam erroneam rediddiſſe. Neque ego ſuſtinere audeo, hac ex parte obſeruationem Selenginskenſem ab omni errore eſſe liberam: aſt vno minuto primo eum longe minorem exiſtere debuiſſe, contactus limborum repentinus et inexſpectatus certiſſimo indicio eſt. Quantuscun-

tuscunque ille demum ſit, iure quaeſtionem hanc mouere poſſe mihi videor: vtrum error ex nubila coeli facie originem trahens ad accelerandum, an vero ad retardandum contactum fecerit?

Credo ego, et rei natura id ſuadere videtur, inclementiam tempeſtatis contactum internum accelerare potius, minime vero retardare potuiſſe, atque idcirco momentum contactus interni Selenginski obſeruatum hac ex parte non minuendum, verum augendum eſſe aliquot ſecundis, palam eſt. Si itaque obſeruationem Selenginskenſem errore quodam laborare ſtatuere velimus, cum ita comparatum eſſe oportet, vt correctione inducenda parallaxis Solis, ex combinatione obſeruationum Rodriguenſis et Selenginskenſis reſultans, non incrementum, verum decrementum captura ſit.

Terminum autem, vltra quem momentum contactus interni augeri nequit, figit nobis phaenomenon illud, quod poſt celebratum iam limborum contactum obſeruaui. Sole pleno fulgore radiante, et horologio $5^h. 8'. 8''$ monſtrante, limbi Veneris minima pars, vltra limbum Solis iam promota, lucida annulo cincta mihi apparuit. Cum itaque interuallum temporis, quod contactum limborum inter, ac apparentiam hanc intercedit, non maius ſit $19''$: certiſſime hinc coniectamur, momentum contactus interni a me obſeruati plus quam $10''$

augeri non poſſe. Sed cum hoc augmentum in mera coniectura fundetur, et omnis obſeruatio coniecturae ſit praeferenda, in numero minutorum ſecundorum a me obſeruato merito acquieſcimus.

Quanquam momentum contactus exterioris in exitu minus certum ſit ac interioris, verum incertitudo haec non de minutis primis, verum de ſecundis tantum intelligenda eſt. Et cum mora Veneris in limbo Solis a me obſeruata 18′.6″ parum aut nihil differat a reliquis, quaecunque in lucem prodiere, obſeruationibus, errorem in minutis primis ſtatuere, idem eſt, ac ius nobis arrogare, omnes obſeruationes impune et pro lubitu noſtro immutandi.

Euicta itaque certitudine momenti contactus a me Selenginski obſeruati, excutiamus diligentius; num forte differentia meridianorum ſupra a me ſtabilita, mutationis alicuius et quantae capax ſit?

EXAMEN
Longitudinis Vrbis Selenginsk.

Ex quatuor Immerſionibus Satellitum Iouis, et fine Eclipſeos Solaris, Selenginski obſeruatis, Longitudinem obſeruatorii mei deduxeram. Momentis Immerſionum primi Satellitis Iouis ex Tabulis Cel. *Wargentini* deductis, applicui correctionem −40″,

— 40″, ſecundi autem nullam, atque ita directe ex quauis obſeruatione, differentiam meridianorum inveſtigans, mediam tandem obtinui $6^h. 57'. 8''$. Verum cum Longitudo vrbis Seleginsk indirecte quoque, et forte certius, ex obſeruationibus Satellitum Iouis, circa idem tempus in aliis locis peractis, deduci queat: conſtitui hic ad rei veritatem probandam, ſimulque vt pateat, quousque Longitudo obſeruatorii mei augeri poſſit, eam poſteriori hac methodo inquirere.

Iulii d. $\frac{20}{31}$. Immerſio ſecundi Satellitis Iouis Selenginski tubo 15 pedes longo obſeruata eſt $14^h. 58'. 35''$ t. v. Immerſiones eiusdem Satellitis huic proximae obſeruatae ſunt Pariſiis d. $\frac{9}{25}$. Iulii $16^h. 15'. 1''$, et Stockholmiae $\frac{27.\ Iul.}{7.\ Aug.}$ $11^h. 43'. 1''$ tubo *Dollondiano* 120 vicibus obiecta amplificante.

Immerſio ad meridianum Pariſinum Selenginskenſi homologa prodit, ſi iuxta Tabulas Cel. *Wargentini* ad Immerſionem d. 9. Iulii addantur $10^d. 15^h. 56'. 17''$. Pariſiis itaque die 20. Iulii Immerſio euenire dabuit $8^h. 1'. 18''$. Vnde differentia meridianorum quaeſita prodit $6^h. 57'. 17''$.

Quodſi obſeruatione Stockholmienſi in praeſente negotio vti velimus, a momento Immerſionis $11^h. 43'. 1''$, ſubtrahendo $7^d. 1^h. 38'. 23''$, prout Tabulae iubent, nanciſcimur momentum Immerſionis ad meridianum Stockholmiae d. 20. Iulii $9^h. 4'. 38''$.

 Quare

Quare Longitudo Vrbis Selenginsk a meridiano Stockholmiae verſus ortum numerata prodit $5^h.53'.57''$, quam ſi pro diuerſa vi tuborum $15''$ augeamus, obtinebimus $5^h.54'.12''$.

D. $\frac{14}{25}$. Aug. Selenginski obſeruata eſt Immerſio primi Satellitis Iouis $10^h.46'\ 24''$. t. v. Omnium circa idem tempus in aliis locis viſarum proxima eſt Pariſiis die $\frac{12}{23}$. Aug. obſeruata $9^h.20'.49''$, intercedente inter vtramque vna tantum reuolutione; additis itaque $1^d.17^h.28'.56''$ prodit momentum Immerſionis primi Satellitis d. 14. Aug. Pariſiis $3^h.49'.45''$ et differentia meridianorum $6^h.56'.39''$.

Eadem die obſeruata eſt Selenginski Immerſio ſecundi Satellitis Iouis $12^h\ 15'.4''$ t. v. tubo exquiſitiſſimo octo pedes cum dimidio longo. Longitudo obſeruatorii mei deduci potuiſſet ex Immerſione eiusdem Satellitis Stockholmiae $\frac{21.}{1.}$ $\frac{Aug.}{Sept.}$ tubo 120 vicibus amplificante a Cel. *Wargentino* obſeruata $9^h.1'.6''$, ac porro ex Immerſione ibidem eodemque tubo $\frac{3}{14}$. Aug. obſeruata $14^h.21'.37''$: verum ne vlla ratio dubitandi ſuperſit, malo potius Longitudinem obſeruatorii mei ex obſeruatione Pariſina eadem die inſtituta deducere.

D. $\frac{3}{14}$. Aug. Immerſio ſecundi Satellitis Iouis Pariſiis obſeruata eſt, $13^h.18'.39''$. Inter hanc Immerſionem et eam, quae Selenginski obſeruata eſt, iuxta Tabulas Cel. *Wargentini* effluere debebant

10^d.

10^{d}.15^{h} 59′.4″, Immerſio itaque Selenginski obſeruata Pariſiis videri debuiſſet 5^{h} 17′.43″. Vnde differentia meridianorum prodit 6^{h}.57′.21″.

Interea ſi Longitudinem Stockholmiae ponamus 1^{h}.2′.52″, atque ex obſeruationibus Cel. *Wargentini* Longitudinem vrbis Selenginsk inueſtigemus; obtinebimus ex priori 6^{h}.56′.51″ ex poſteriori 6^{h}.57′.13″, nulla habita ratione diuerſitatis tuborum, quam omitti hic non poſſe quisque perſpicit; mediam tamen hinc reſultantem pluribus quam 20″ augere non auſerim.

Supereſt Immerſio primi Satellitis Iouis $\frac{21.\ Aug.}{1.\ Sept.}$ Selenginski obſeruata tubo 15 pedes longo 12^{h}.43′.10″. Immerſio eiusdem ex obſeruatione Cel. *Pingre* in inſula Rodrigues tubo 18 pedum peracta, eſt 9^{h}.49′.40″. Vnde differentia meridianorum Selenginskenſis et Rodriguenſis prodit 2^{h}.53′.30″; quae ob diuerſitatem tuborum, memoratasque ſupra circumſtantiis 10″ augeri poterit. Eſt autem ſecundum accuratiſſimas Cel. *Pingre* determinationes Longitudo inſulae Rodrigues 4^{h}.3′.26″, vnde Longitudinem vrbis Selenginsk nanciſcimur 6^{h}.57′.6″.

Ignoro, cuiusmodi tubis Pariſiis obſeruationes peractae fuere, idcirco Longitudini Selenginsk ex obſeruationibus Pariſinis deductae, correctionem ex diuerſitate tuborum oriundam inducere non audeo.

Ex

Ex his quatuor determinationibus ſecunda diſſidet iuſto plus a reliquis; verum vtrum eius ratio in praeſente negotio habenda ſit, monſtrabit occultatio φ ſagittarii a Luna, ex qua nunc ad Longitudinem obſeruatorii mei deducendam progredior.

Immerſio φ ſagittarii ſub Luna die $\frac{4}{15}$. Iul. obſeruata eſt ad meridianum Selenginskenſem $11^h.24'.51''$ t. v. ſiue $11^h.30'.16''$. t. m. Longitudo φ ſagittarii ex Fundamentis Aſtronomiae de la *Caille* ad initium anni 1750. eſt $276°.41'.21''.6$, et Latitudo auſtralis $3°.55'.19''$. Longitudo ergo ad tempus obſeruationis reducta erit $276°.41'.21''.6 + 9'.36''.5$ Praec. $- 15''.2$, Nutat. $+ 19''.2$, Aberr. $= 276°.51'.2''.1$ et Latitudo $3°.55'.19''.3$ auſtralis.

Aſſumta differentia meridianorum Pariſienſis et Selenginskenſis $7^h.0'.0''$, eo momento, quo Luna Selenginski ſtellam tegere viſa eſt, Pariſiis numerari debebant $4^h.30'.16''$ t. m. Ad hoc tempus ex Tabulis *Maieri* Longitudinem Lunae ab aequinoctio medio computatam reperio $276°.43'.3''.2$ et Latitudinem Lunae auſtralem $3°.8'.34''.7$. Cum vero Tabulae iuxta computum Cel. *Pingre* Longitudinem dent iuſto minorem $33''.2$, et Latitudinem iuſto maiorem $49''.5$ (*Memoires de l'Academie de Paris pour l'année* 1761. *pag.* 432.) Longitudo Lunae correcta reperitur $276°.43'.36''.4$ et Latitudo $3°.7'.45''.2$.

Ex

Ex iisdem Tabulis parallaxin Lunae aequatoream nactus ſum 54′.1″ et diametrum Lunae horizontalem 29′.30″. Vnde ratione habita figurae Telluris ſphaeroidicae, parallaxin Lunae in Longitudinem obtinui −7′.57″.3 et parallaxin in Latitudinem +52′.11″.9 atque Longitudinem Lunae apparentem 276°.35′.39″.1, Latitudinem 3°.59′.57″.1. Longitudo itaque ſtellae ſuperare videbatur Longitudinem Lunae 15′.23″.1 et contra Latitudo illius deficere a Latitudine Lunae 4′.37″.8. Differentia longitudinum ducta in coſ. Latitudinis dat 15′.20″,8. Hinc diſtantia ſtellae a centro Lunae reperitur 961″.8, quae ſemidiametro Lunae 14′.47″.5 pro altitudine ſupra horizontem 2″.5 auctae aequalis eſſe deberet, ſi poſitio aſſumta veram differentiam meridianorum oſtenderet. Eſt autem illa maior ſemidiametro 74″.3, idcirco alia hypotheſis pro differentia meridianorum ſtatuenda eſt.

Sumamus itaque differentiam meridianorum 6^h.50′.0″, atque ita eo momento, quo Luna ſtellam Selenginski occultare viſa eſt, Pariſiis numerari debebant 4^h.40′.16″. t. m. pro quo locus Lunae ex iisdem Tabulis deductus ita ſe habet. Longitudo Lunae ab aequinoctio medio numerata 276°.47′.57″.4 et Latitudo auſtralis 3°.8′.56″; additis iam ad Longitudinem tabularem 33″.2 et a Latitudine ſubtractis 49″.5, nanciſcimur Longitudinem Lunae correctam 276°.48′.30″.6 et ſimilem Latitudinem

eiusdem 3°. 8′. 6″. 5. Longitudine Lunae vera, parallaxi − 7′. 56″. 6 et Latitudine eius parallaxi + 52′. 11″. 8 in apparentem conuerſa, obtinemus differentiam Longitudinum ſtellae et centri Lunae 10′. 28″. 1, quae in coſ. Latitudinis ducta dat 10′. 26″, 5 et differentiam Latitudinum 4′. 59″. Quare diſtantia ſtellae a centro Lunae reperitur 694″, 2 minor ſemidiametro Lunae apparente.

Cum Luna e Selenginsk ſpectata interuallo 10 minutorum ad ſtellam acceſſiſſet 267″, 6 et momento occultationis centrum Lunae a ſtella diſtare debuerat 887″. 5 interpolando reperitur vrbem Selenginsk occidentalius ſitam eſſe 2′. 47″ ac in prima hypotheſi ſtatutum eſt. Quare differentia meridianorum prodit 6^h. 57′. 13″ vel 15″.

In computo Longitudinis Lunae neglexi correctionem ex nutatione oriundam, ideo potiſſimum, quod Cel. *Pingre* in errore Tabularum inueſtigando nullam eiusdem rationem habuerit. Quodſi nutationis quoque rationem habere velimus, Longitudo Lunae minuenda foret 15″. 2: aſt error in Longitudinem totidem ſecundis increſceret; differentia ergo meridianorum nunc deducta nullatenus erronea hac ex parte eſt exiſtimanda.

Cum in definienda Longitudine ex obſeruatione Φ ſagittarii, vſus fuerim numeris Tabularum correctis, ea merito ſpectari poteſt, tanquam lapis Lydius, ad quem omnes determinationes exigi debebunt.

bebunt. Tuto igitur determinationem ex Immerſione d. $\frac{14}{25}$ Aug. depromtam, vtpote ab omnibus reliquis et ab hac iuſto plus diſſentientem, reiicere poterimus, atque ita pro Longitudine vrbis Selenginsk ſequentes remanebunt determinationes:

I.	- - - - -	$6^h. 57'. 17''$
II.	- - - - -	6. 57. 21
III.	- - - - -	6. 57. 6
IV.	- - - - -	6. 57. 13.

Quarum ſi mediam $6^h. 57'. 14''$ pro vera ſpectare nolimus, perſpicuum tamen eſt, differentiam meridianorum Pariſienſis et Selenginskenſis maiorem $6^h. 57'. 21''$ ſtatui non poſſe, niſi omnes obſeruationes fallere nos exiſtimemus. Illa vero etiamnum tanquam vera aſſumta, longe adhuc aberimus, vt obſeruatio Selenginskenſis, collata cum Rodriguenſi, eandem ac aliae ſiſtat parallaxin.

Ad conciliandum concluſioni meae maiorem gradum certitudinis, conſtitueram apud me ex obſeruatione Eclipſeos Tobolii a Domino Abbate *Chappe* peracta, errorem Tabularum Lunarium inquirere, ac ex fine Eclipſeos Selenginski obſeruato Longitudinem obſeruatorii mei elicere. Verum antequam calculos hos ad finem perducerem, accepimus hic obſeruationem Tranſitus Veneris per diſcum Solis Pekini peractam. Idcirco miſſis iis, omne ſtudium in id potius collocandum cenſui, vt quae-

rerem, quantam obſeruatio iſta, omnibus in parte Telluris boreali peractis pretioſior, cum aliis collata ſiſtat Solis parallaxin, exiſtimans maius pondus obſeruationi Capitis Bonae Spei et Selenginskenſi acceſſurum, ſi et Pekinenſis collata cum aliis, eandem quam illae binae praebuerit parallaxin.

OBSERVATIO
Tranſitus Veneris per diſcum Solis Pekini a R. P. Dolliero peracta.

R. P. *Dollierus* refert, obſeruationem peractam eſſe tubo 14 pedes longo ad horologium bonae notae, cuius motum licet praecedentibus ante obſeruationem diebus ad examen reuocare ei non licuerit, didiciſſe tamen ſe ait a R. P. *Benoit* ſtatum horologii talem fuiſſe, vt ſpatio diei Solaris retardaret $16''.44'''$, id quod R. P. ex appulſibus Sirii concluſiſſe ſe aſſeuerauerat. Illa ipſa die, qua Venus diſcum Solis peragrabat, non obſtantibus nubibus, ventoque vehementi, ſumſit ante ingreſſum altitudines Solis, iisque poſt egreſſum correſpondentes, ex quibus meridies correctus ad horologium prodiit $11^h.56'.7''.43'''$.

Quoniam obſeruatio Pekinenſis fortaſſe nunc primum in lucem prodit, conſultum eſſe duxi eam verbis ipſius auctoris referre.

- - je

- - - - *je vis la veritable Venus, qui venoit d'entrer, c'étoit à tres peu pres a* $9^h.51'.25''$ *ou* $30''$. *de tems vrai*

Entrée totale de Venus - - horloge	10^h.	$6'$.	$35''$.	$0'''$
pour defaut du midi - - - +		3.	52.	17
pour retard et equat. - - —		0.	0.	27
Tems vrai	10.	10.	26.	50
Commencement de ſortie - - borolge	3.	56.	6.	0
pour defaut du midi +		3.	52.	17
pour retard. et equat. +		0.	0.	59
Tems vrai -	3.	59.	59.	16
Sortie totale de Venus - - borolge	4.	14.	4.	0
pour defaut du midi +		4.	52.	17
pour retard. et equat. +		0	1.	4
Tems vrai -	4.	17.	57.	21

INVESTIGATIO
Longitudinis Pekini.

Longitudo Pekini, cuius in praeſenti negotio exactiſſima requiritur cognitio, diuerſa a diuerſis ſtatuitur. Tria ibi ſunt obſeruatoria: primum eſt publicum Imperiale, alterum Collegii Ieſuitarum Luſitanorum, et tertium in aedibus Ieſuitarum Gallorum, vbi procul dubio obſeruatio Veneris peracta eſt, et cuius Latitudo a Patre *Gaubil* in Comm.

 Acad.

Acad. Scientiarum Imperialis Tomo V. ſtatuitur 39°. 55′. 15″. Proſtant ibidem obſeruationes definiendae Longitudini illius idoneae; verum non deſunt mihi rationes inquirendi prius in Longitudinem Collegii Ieſuitarum Luſitanorum, ac tandem ex Ichnographia vrbis Pekin *Gaubiliana*, quam ſeruat Academia noſtra, Longitudinem obſeruatorii, vbi obſeruatio Veneris peracta eſt, eruendi.

Communiter Longitudo Pekini, at Rev. autem Patre *Hallerſtein*, Longitudo Collegii Ieſuitarum Luſitanorum a Meridiano Pariſino numerata ſtatuitur $7^h. 36'. 10''$ quam proxime. Si numerum obſeruationum, quibus determinatio Rev. Pat. innititur, ſpectes, nulla ratio de certitudine eius dubitandi ſubnaſci poterit; nam ex innumeris ab anno 1726 ad 1740 ſuper Satellitibus Iouis Pekini habitis obſeruationibus, collatis cum obſeruationibus in obſervatorio Imperiali Petropoli inſtitutis, ſumendo medium, differentiam Meridianorum Petropolitani, et Collegii, eruit $5^h. 44'. 15''$. Verum ſi diſſenſum earum et inſtrumenta, praeſertim horologium, ad quod obſeruationes interea temporis Pekini peractae ſunt, conſideres, vlteriori huius elementi indagatione nouiſſimis obſeruationibus ſuperſtruenda opus nos habere, rerum aſtronomicarum periti inficias non ibunt. Praeſtari autem id poterit ope ſequentium obſeruationum.

Obſer-

Obſeruationes Satellitum Iouis

In Collegio Ieſuitarum Luſitanorum Pekini habitae.

Anno 1751.

Sept.	9. 16^h.	21′.	38″	Im.	I. Sat.	tubo 13. ped. obſ.	bona
	18. 12.	46.	48	- -	I.	- - - 13. - - -	bona
Oct.	3. 11.	7.	58	Im.	I. Sat	tubo 13 ped. obſ.	bona
	17. 14.	59.	49	- -	I.	- - - 13. - - -	bona
	19. 9.	29.	2	- -	I.	- - - 13. - - -	bona
	24. 16.	54.	24	- -	I.	- - - 13. - -	bona
	26. 11.	23.	20	- -	I.	- - - 13. - - -	bona
Dec.	20. 10.	2.	56	Em.	I. Sat.	tubo 13. ped. obſ.	bona
	27. 11.	54.	37.	- -	I.	- - - 13. ped. obſ.	bona

Anno 1752.

Ian.	3. 13^h.	45′.	34″	Em.	I. Sat.	tubo 13. ped. obſ.	bona
	5. 8.	13.	37	- -	I.	- - - 13. ped. -	bona
	19. 11.	58.	42	- -	I.	- - - 13. - - -	bona
	21. 6.	26.	45	- -	I.	- - - 13. - - -	bona

His correſpondentes, ex quibus indirecte vt plurimum, praeciſe tamen Longitudo Collegii Ieſuitarum Luſitanorum deduci poterit, in Commentariis Academiae Scientiarum Pariſinae ſequentes reperio.

Anno

Anno 1751.

Sept.	7. 14^h. 16′ 33″	Imm. I Sat.	tub. 14. ped.	*Par.*	*Maraldi*
	14. 16 12. 40	Imm. I. Sat.	- 18. -	-	de *Thuri*
Oct.	8. 10. 59. 8	Imm. I. Sat.	tub. 14. ped.	-	*Maraldi*
	24. 9. 18. 19	- - I.	- - 18. -	-	de *Thuri*
	22. 15. 53. 43	- - I.	- - 14.	*Cap. B. S.*	la *Caille*
Dec.	25. 10. 56. 7	Em. I. Sat.	- 14. -	- -	la *Caille*

Anno 1752.

Ian.	8. 13^h. 33′. 41″	Em. I. Sat.	tub. 18. ped.	*Par.*	*Maraldi*
	10. 9. 6. 52	- - I.	- - - 14. ped.	*Cap. B. S.*	la *Caille*

Pro certitudine harum obſeruationum nomina obſeruatorum militant. Iam vero ex Immerſionibus diebus 7 et 14 Pariſiis obſeruatis, nec non Pekini diebus 9 et 18, tempus reuolutionis primi Satellitis colligitur $1^d. 18^h. 29'. 2''$, quae, ad Immerſionem die 7. Pariſiis obſeruatam addita, dat momentum Immerſionis ad Meridianum Pariſinum d. 9. Sept. $8^h. 45'. 35''$, et cum Pekini eadem obſeruata fuerit $16^h\ 21'. 38''$. Differentia Meridianorum prodit $7^h. 36'. 3''$.

Ad Immerſionem d. 14. Sept. Pariſiis obſeruatam addendo duas Satellitis reuolutiones $3^d. 12'. 58'. 4''$. Immerſio die 18. Sept. obſeruanda obtinetur $5^h. 10'. 44''$, quae collata cum momento Pekini obſeruato, dat Meridianorum differentiam $7^h. 36'. 4''$, et habita ratione diuerſitatis tuborum $7^h. 36'. 14''$.

Oct.

Oct. 8. Pariſiis Immerſio Satellitis obſeruata eſt $10^h.59'.8''$; ſubtractis inde tribus reuolutionibus ſc. $5^d.7^h.27'.6''$ prodit immerſio ad diem 3 Octobris $3^h.32'.2''$: vnde differentiam Meridianorum obtinebimus $7^h.35'.56''$. Quodſi ad eandem ipſam addamus quinque Satellitis reuolutiones $8^d.20^h.25''.10''$, prodit Immerſio Satellitis Pariſiis d. 17. Octobr. $7^h.24'.18''$, quae collata cum Immerſione Pekini obſeruata differentiam Meridianorum praebet $7^h.35'.31''$.

Vlterius procedens aſſumo reuolutionem primi Satellitis tantam, quantam praebet medium obſervationum Pekinenſium d. 17 et 19 nec non 24 et 26. Oct. ſcilicet $1^d.18^h.29'.5''$. Iamque ad Immerſionem Pariſiis die 7. Oct. obſeruatam addendo ſex reuolutiones, ſiue $10^d.14^h.54'.30''$, prodit Immerſio d. 19. Pariſis $1^h.53'.38''$, vnde differentia Meridianorum reſultat $7^h.35'.34''$.

Oct. die 24. Pekini Immerſio obſeruata eſt $16^h.54'.24''$, eadem vero Pariſiis $9^h.18'.19''$. Quare differentia Meridianorum pro diuerſitate tuborum $10''$ aucta prodit $7^h.36'.15''$. Quodſi ad Immerſionem Pariſinam addamus vnam reuolutionem, vt prodeat Immerſio Pariſiis ad diem 26, differentiam Meridianorum nanciſcemur 7^h $35'.56''$, vel ob diuerſitatem tuborum augendo $10''$,$7^h.36'.6''$.

Cum die 24. Oct. Immerſio primi Satellitis Pekini obſeruata fuerit $16^h.54'.24''$, ſubtrahendo inde vnam Satellitis reuolutionem habebimus proxi-

 mam

mam Immerſionem praecedentem die 22. Pekini $22^{h}.25'.9''$; obſeruata vero illa eſt ad Caput Bonae Spei $15^{h}.53'.43''$: vnde differentia Meridianorum eſt $6^{h}.31'.26''$, atque Longitudo Pekini a Meridiano Pariſino numerata, $7^{h}.35'.51''$.

Obſeruationes Pekini diebus 20 et 27. Decembris habitae indigitant, reuolutionem Satellitis fuiſſe tunc $1^{d}.18^{h}.27'.55''$: quam ob rem additis ad Emerſionem die 20. Decembr. Pekini obſeruatam tribus reuolutionibus, vel ab Emerſione diei 27 demtis duabus reuolutionibus, obtinetur Emerſio ibidem die 25 obſeruanda $17^{h}.26'.42''$, quae collata cum obſeruatione Capitis Bonae Spei Longitudinem Collegii a Meridiano Pariſino computatam dabit $7^{h}.35'.0''$. Aſt cum obſeruatio in Capite Bonae Spei peracta ſubdubia ſit, determinationis huius non habendam eſſe rationem exiſtimo.

Emerſiones Satellitum Iouis anno 1752. menſe Ianuario Pekini peractae tempus reuolutionis Satellitis dant $1^{d}.18^{h}.28'.3''$. Quare ad Emerſionem Pekini die 3 obſeruatam additis tribus reuolutionibus, vel ad Emerſionem diei 5 duabus, prodit Emerſio Pekini die 8. Ian. obſeruanda $21^{h}.9'.43''$, quae collata cum Emerſione Pariſiis notata, differentia Meridianorum prodit $7^{h}.36'.2''$, vel ob diverſitatem tuborum minuta $10''$, $7^{h}.35'.52''$.

Quodſi ad earundem Emerſionum primam addamus quatuor reuolutiones, ſiue tres ad ſecundam; nan-

nanciſcimur momentum Emerſionis Pekini d 10. Ian. $15^h.37'.46''$. Eadem vero ad Caput Bonae Spei obſeruata eſt $9^h.6'.52''$, vnde Pekini Longitudo a Capite Bonae Spei computata ſit $6^h.30'.54''$, et a meridiano Pariſino $7^h\ 35'.19''$.

Ex Emerſionibus diebus 5 et 19. Ian Pekini obſeruatis, tempus reuolutionis Satellitis eſt $1^d.18^h.28'.8''$: ſubtractis itaque ab vltima quinque reuolutionibus, prodit Emerſio Pekini die 10 obſeruanda $15^h.38'.2''$. Vnde differentia Meridianorum Pekinum inter et Caput Bonae Spei eruitur $6^h.31'.10''$, et Longitudo Pekini ad Meridianum Pariſinum relata $7^h.35'.35''$.

Denique ab Emerſione diei 21. Ian. Pekini obſeruata demtis ſex reuolutionibus, nanciſcimur momentum Emerſionis homologae ad Caput Bonae Spei obſeruatae, ac tandem differentiam Meridianorum Pariſienſis et Collegii $7^h.35'.30''$.

Harum duodecim determinationum ſi ſumamus medium, Longitudo Collegii Ieſuitarum Luſitanorum a Meridiano Pariſino numerata prodit $7^h.35'\ 48''$. Aedes autem Ieſuitarum Gallorum, vt videre eſt ex Ichnographia Pekini, non niſi $2''$ temporis orientaliores ſunt Collegio; quare Longitudo Obſeruatorii, vbi tranſitus Veneris obſeruatus eſt, non maior ſtatui poterit quam $7^h.35'.50''$.

Ne vero Longitudinem hanc dubiis rationibus motus aſſumere videar, quaeſiui eam directe ex ob-

ſeruatione Mercurii in Sole anno 1753. $\frac{25.\ Apr.}{5.\ Maii}$ a P. *Gaubil* Pekini in aedibus ſuis inſtituta. Contactus internus limborum in exitu eueniſſe illi apparuit $5^h.52'.55''$ t. v. poſt. merid. Eidem phaenomeno Pariſiis Celeberrimi Aſtronomi inuigilantes diuerſi diuerſo tempore contactum eueniſſe obſeruarunt. Obſeruatio Domini *Caſſini de Thury* ab omnibus reliquis diſcedit, et ſi verum eſt, quod diſcrimen hoc pendeat a diuerſitate tuborum, eo tutius medium e reliquis amplectimur, quod Pekini tubo 15 pedum obſeruatio fuit inſtituta.

Momentum contactus interni in exitu ad Meridianum obſeruatorii Regii Pariſini eſt ex obſeruatione

La Landi	- - -	$10^h.18'.41''$. ante mer.
De l'Islii	- - -	10. 18. 41
Bougueri	- - -	10. 18. 44
P. Merville	- - -	10. 18. 37
Libouri	- - - -	10. 18. 36
Medium		10. 18. 40.

Ad computandam hinc Longitudinem Domus Ieſuitarum Gallorum, aſſumſi ſequentia elementa ab Aſtronomis Pariſinis ex obſeruationibus deducta: Momentum coniunctionis apparentis ante meridiem $6^h.36'.15''$ t. v. Latitudinem Mercurii apparentem tempore coniunctionis $2'.33''.5$ auſtr. Motum horarium

rarium Mercurii a Sole in Ecliptica 3′. 58″. 2, Motum horarium in orbita apparente 4′. 2″. 2. Et cum diſtantia Mercurii a Sole ad diſtantiam eius a terra ſecundum Tabulas *Halleianas* tunc fuerit = 45327 : 55679; poſita parallaxi Solis 8″. 5 parallaxin Mercurii a Sole obtinui 6″. 92. Momentum coniunctionis ex centro Telluris ſpectatum 6^h. 35′. 55″ cum Latitudine vera 2′. 27″. 22. Porro aſſumto diametro Solis 31′. 46″, diametro Mercurii 12″, nec non inclinatione orbitae Mercurii apparentis 10°. 25′. 12″, calculoque peracto inueni contactum internum Pariſiis ob parallaxin 11″, et Pekini 1′. 38″ quam proxime accelerari debuiſſe. Quare contactus internus verus ad Meridianum obſeruatorii Ieſuitarum Gallorum prodit 5^h. 54′. 33″ poſt mer. et ad Meridianum Pariſinum 10^h. 18′. 51″, vnde differentia Meridianorum eſt 7′. 35′. 42″.

Pro vltima hac determinatione pugnat praeciſio, cuius capax eſt ipſa obſeruatio, pro illa vero multitudo obſeruationum. Mediam hinc reſultandem 7^h. 35′. 46″, eo tutius pro vera Longitudine Domus Ieſuitarum Gallorum aſſumere licebit, quod obſeruationes Satellitum Iouis ibi habitae eandem quam proxime praebent Meridianorum differentiam. In Tomo V. Comment. Academiae Scientiarum Petropolitanae obſeruationes Pekinenſes ſequentem in modum referuntur: Anno 1756.

Febr.	24. 16^h^. 28′. 53″	Imm. I. Sat.	tub. 13. ped.
	26. 10. 57. 59	- - - I.	- - - -
Martii	3. 14. 17. 54	Imm. II. Sat.	13 ped.
	10. 16. 52. 49	- - - II. - -	13. ped.

Innumeras eodem anno obſeruationes ſuper Satellitibus Iouis in aliis locis peractas beneuole communicauit mecum Vir Cel. *Wargentinus*, ex quibus eas tantum hic ſubiungo, quae magis ad inſtitutum noſtrum conducunt.

Febr.	22. 17^h^. 24′. 30″	Imm. I. Sat.	Par obſeruata
	29 16. 19. 53	- - - I. -	Par. - - -
Febr.	28. 17. 24. 53	Imm. II. Sat.	Par. obſeruata
Martii	10. 10. 20. 25	- - - II. Sat.	Stockh obſeru.

Ex obſeruationibus Pariſiis habitis tempus vnius reuolutionis Satellitis primi colligitur $1^d. 18^h. 28'. 51''$, Tabulae vero Cel. *Wargentini* correctae praebent $1^d. 18^h. 28'. 44''$. Tabularem reuolutionem tanquam veram ſpectabimus, vt plures determinationes Longitudinis Domus Ieſuitarum Gallorum obtineamus. Ad Immerſionem Febr die 22. Pariſiis obſeruatam addita vna reuolutione, prodit Immerſio die 24. Pariſiis obſeruanda $8^h. 53'. 14''$, quae collata cum Pekinenſi differentiam Meridianorum praebet $7^h. 35'. 39''$, additis vero duabus reuolutionibus prodit Immerſio die 26. ad Meridianum Pariſinum $3^h. 22'. 25''$, vnde differentiam Meridianorum quaeſitam obtinemus $7^h. 35'. 34''$.

Ex

Ex Immerſione die 29. Pariſiis obſeruata, demtis duabus reuolutionbus, Immerſio die 26 ibidem obſeruanda prodit $3^h.22'.25''$, vnde denuo differentia Meridianorum reſultat $7^h.35'.34''$. Ab eadem vero Immerſione ſubtractis tribus reuolutionibus nanciſcimur momentum Immerſionis d. 24. ad Meridianum Pariſinum $8^h.53'.41''$, quod collatum cum Pekinenſi differentiam Meridianorum dat $7^h.35'.12''$.

Obſeruationes ſecundi Satellitis Pekini habitae aeque ac Tabulae correctae Cel. *Wargentini*, tempus reuolutionis Satellitis dant $3^d.13^h.17'.27''$: addita itaque ad Immerſionem Febr. die 28. Pariſiis viſam vna reuolutione, prodit Immerſio Martii die 3 ibidem obſeruanda $6^h.42'.20''$, vnde differentia Meridianorum reſultat $7^h.35'.34''$. Ad eandem Immerſionem additis tribus reuolutionibus, et Immerſione reſultante collata cum Pekinenſi, obſeruata die 10. Martii, differentia Meridianorum prodit $7^h.35'.36''$. Ducta vero in computum Immerſione Stockholmiae et Pekini die 10. Martii obſeruatis, differentia Meridianorum quaeſita prodit $7^h.35'.16''$, ſi ponas Longitudinem Stockholmiae $1^h.2'.52''$ a Meridiano Pariſino numeratam.

Obſeruationes Pekinenſes peractae ſunt tubo 13 pedum, Pariſinenſes autem vtplurimum teleſcopio Gregoriano 4 pedum, et Stockholmienſis tubo 18 aut 20 pedum; quam ob rem mediam ex his

ſeptem

ſeptem determinationibus $7^h. 35'. 30''$ reſultantem $10''$ imo et pluribus augendam, et Longitudinem Domus Ieſuitarum Gallorum a Meridiano Pariſino numeratam, non minorem $7^h. 35'. 46''$ ſtatuendam eſſe, palam eſt.

INVESTIGATIO

Parallaxeos Solis ex obſeruatione Pekini habita, cum aliis collata.

Obſeruatorii, vbi obſeruatio Veneris peracta eſt, ſtabilita Longitudine, quam fieri poteſt accuratiſſime, computandus imprimis erat effectus parallaxeos pro obſeruatore Pekini locato, quem aſſumtis iisdem, quibus ſupra vſus ſum elementis, reperi $5'. 12''. 3$: tot nempe minutis temporis obſeruatori Pekinenſi citius contactus internus apparere debuit, prae contactu ex centro Telluris ſpectato. Et cum pro obſeruatore Selenginskenſi effectus parallaxeos inuentus fuerit $5'. 6''. 7$: differentia Meridianorum obſeruatorii Pekinenſis et Selenginskenſis ex ipſa obſeruatione Veneris prodit $38'. 28''$. Obſeruatio ergo Veneris poſtulat, vt vel Longitudo Domus Ieſuitarum Gallorum ſtatuatur $7^h. 35'. 43''$, vel Longitudo Vrbis Selenginsk ſupra inuenta $7^h. 57'. 14''$ augeatur $4''$ temporis.

Inte-

Interea ſpectatis Longitudinibus Pekini $7^h. 35'. 46''$ et Selenginski $6^h. 57'. 14''$ vt veris, vel ſaltem vero proximis, Vpſaliae $1^h. 1'. 12''$, Stockholmiae $1^h. 2'. 52''$, Torneae $1^h. 27'. 49''$, Caianeburgi $1^h. 41'. 40''$, Tobolii $4^h. 23'. 51''$, et Göttingae $30'. 16''$, aliorum autem locorum iisdem manentibus, quales ſupra exhibita ſunt: parallaxin Solis horizontalem, quanta prodit ex obſeruationibus ad Caput Bonae Spei, Pekini et Selenginski habitis, cum aliis collatis, ſequenti atque vna Tabella complexus ſum.

Nomina Locorum	Parallaxis Solis horizontalis reſultans comparatione obſeruationis habitae.			
	ad Cap. B. S.	Pekini	Selenginski	in Inſ. Rodr.
Rodrigues	5''. 42 : :			
Pekin	8. 39			9''. 39
Selenginsk	8. 34			9. 49
Tobolsk	8. 51	7''. 73 :	7. 34 : :	9. 92
Tornea	8. 40	8. 43	8. 13	9. 95
Caianeburg	8. 50	8. 05	7. 75 : :	10. 13
Vpſala	8. 45	8. 17	8. 00	10. 26
Stockholm	8. 20	8. 96	8. 76	9. 88
Göttinga	8. 30	8. 57	8. 42	10. 48
Grenouicum	8. 43	8. 35	8. 17	10. 76
Pariſii	8. 32	8. 53	8. 37	10. 74
Bononia	8. 36	8. 44	8. 30	11. 00
Roma	8. 39	8. 46	8. 27	11. 35

Excluſis determinationibus, quae ſignis notatae ſunt, praeſertim quod diſcrepantiae earum a reliquis rationem indicare valemus, nanciſcimur mediam ex ſecunda columna parallaxin 8″.38, ex tertia 8″.49, et ex quarta denique 8″.32. Quodſi itaque obſeruatio Domini *Pingre* non refragaretur, medium omnium 8″.39 pro vera quantitate parallaxeos Solis aſſumere poſſemus.

Cuinam autem determinationi, vtrum *Pingreanae* an huic, maior fides habenda ſit, eius rei iudicium viris defero, qui inſigni Aſtronomiae ſcientia exercitatione longa firmata, meritisque in artem noſtram publicis ſummorum Aſtronomorum commeruere titulum. Longitudinem autem Stockholmiae maiorem $1^h.2'.52''$ ſtatui non poſſe, nouiſſimae obſeruationes Cel. *Wargentinum* docuere: conſenſus itaque ille, quem Cel. *Pingre*, poſita Longitudine Stockholmiae $1^h.3'.13''$ obtinet, obſeruationem eius ab omni dubio vindicare non videtur.

ECLI-

ECLIPSIS SOLIS

INSIGNIS

D. 1. APRIL AN. 1764. STYL. NOV. TEMP. CIV. OBSERVATIO LIPSIAE HABITA.

Auctore

G. HEINSIO.

Momenta tantum potiora huius Eclipſis annotare mihi licuit. Aduerſa ſcilicet tunc valetudo obſeruationem domi peragendam exigebat; inde factum eſt, vt ob nimiam Solis ſuper horizonte altitudinem vſus ſolummodo Tubi aſtronomici 6. ped. (cuius deſcriptionem in Tom. VI. Comment. Nov. p. 550. tradidi), et machinae alicuius helioſcopicae, concederetur. Per Tubum iſtum, optimae notae, Solem immediate contemplatus ſum, vt momenta initii et finis acquirerem, quae etiam fauente coelo, quoad ipſum Solis et Lunae contactum, tanta exactitudine conſecutus ſum, quantum in eiuſmodi obſeruationibus, alio tempore habitis, vix vnquam aſſequi mihi licuit. Machinam helioſcopicam, quae in vitro ſemipellucido imaginem Solis ſub magnitudine 4. digit. $2\frac{2}{3}$ lin. menſurae Paris. duodecimal. ſecundum diametrum

 depin-

depinxit, eum praeſertim in finem adhibui, vt tempore obſcurationis maximae rationem latitudinis partis lucidae ad diametrum imaginis ſolaris, ope circini et ſcalae geometricae, determinare valerem. Maxima coeli ſerenitas, per plures dies continua, obſeruationem optime iuuabat; quae etiam explorationem ſtatus duorum horologiorum oſcillatoriorum reſpectu temporis veri, ope altitudinum Solis reſpondentium, bene conceſſit. Contigit autem d. 1. April.

	tempore vero
Initium	$10^h. 6'. 32''$ ante meridiem
Finis	1. 5. 54 poſt meridiem.

In obſcuratione maxima ratio diametri Solis ad latitudinem partis lucidae deprehenſa eſt = 364 : 57. ex qua *quantitas Eclipſis* emergit = 10. digit. 8. min. ecliptic. Circa obſcurationem maximam in machina helioſcopica ſedulo inquiſiui, an forſan diſcus Solaris augeretur, cum eiusmodi augmentum in Eclipſi Solis an. 1748. d. 24. Iulii obſeruatum fuit; aſt nullum huius rei veſtigium deprehendi, ſiquidem diameter imaginis Solaris tunc tanta inventa eſt, quanta fuit ante eclipſin.

AD

AD OBSERVATIONEM Eclipſis Solis d. 1. Apr. ſt. n. temp. ciuil. 1764. Lipſiae peractam Additamentum.

Potiora tantum phaenomena huius Eclipſis nuper indicaui, et ex obſeruationibus, ope machinae helioſcopicae memoratae, factis eam ſolummodo exhibui, quae quantitatem Eclipſis manifeſtauit. Cum autem plures aliae obſeruationes eadem machina inſtitutae fuerint, quae pleniorem Eclipſis cognitionem praebere, et variis methodis pro deductionibus formandis inſeruire poſſint; expediet, eas hic in medium proferre, et, ad concluſiones formandas, aptas reddere.

Aduerſa valetudo vſum huius machinae portatilis ſuaſerat, qui pro domicilii conditione, ob nimiam Solis tempore Eclipſis altitudinem, moleſtus fuiſſet, niſi machinae ſitum immotum, durante aliqua obſeruatione, conciliaſſem. Firmata igitur machina, imaginem Solis in vitro ſemipellucido leniter motam proſequi, et ope circini ſcalaeque geometricae, partim *diſtantiam cornuum* vel *chordam defectus*, partim latitudinem maximam portionis diſci Solaris non obſcuratae (quam *partem lucidam* vocabo) in electa Eclipſis phaſi metiri licuit, pro eo, vt haec vel illa operatio certior videretur.

Vt autem hae phaſium dimenſiones comparari poſſent cum diametro dictae imaginis Solaris; ante eclipſin ea ſolicite et repetitis operationibus per partes eiusdem ſcalae geometricae menſurata, et conſenſu exoptato = 365. partibus dictae ſcalae deprehenſa fuit. Tabula ſequens obſeruationum ſeriem manifeſtat.

Ordo obſeruationum	Tempus verum d. 1. Apr. temp. civ. an. 1764.	Diſtantia cornuum	Pars lucida
	ante meridiem	in partibus ſcalae	
Initium	$10^h. 6'. 58''$	——	——
1	— 11. 3	115	——
2	— 12. 36	137	——
3	— 14. 13	151	——
4	— 15. 58	160	——
5	— 17. 37	——	319
6	— 19. 27	185	——
7	— 21. 29	——	296
8	— 24. 34	218	——
9	— 26. 24	——	283
10	— 30. 0	245	——
11	— 32. 24	——	259
12	— 38. 46	278	——
13	— 40. 41	——	225
14	— 47. 22	——	202
15	— 58. 24	——	163

Ordo

Ordo obſeruationum	Tempus verum d. 1. Apr. temp. civ. an. 1764.			Diſtantia cornuum	Pars lucida
	ante meridiem			in partibus ſcalae	
16	11^h.	1′.	3″	——	151
17	—	3.	46	327	——
18	—	7.	43	——	128
19	—	11.	59	——	111
20	—	14.	30	——	105
21	—	17.	0	——	97
22	—	20.	52	——	83
23	—	26.	17	——	64
24	—	28.	44	——	58
25	—	32.	26	——	57
26	—	37.	12	——	57
27	—	40.	48	——	63
28	—	54.	23	——	99
29	—	58.	18	——	110
	poſt meridiem				
30	0^h.	1′.	25″	——	124
31	—	9.	34	——	148
32	—	15.	11	——	174
33	—	21.	38	——	198
34	—	24.	33	295	——
35	—	26.	21	——	212

Ordo

Ordo obſerua-tionum	Temdus verum d. 1. Apr. temp. civ. an. 1764.	Diſtantia cornuum	Pars lucida
	poſt meridiem	in partibus ſcalae	
36	— 32′. 39″	——	235
37	— 33. 49	267	——
38	— 42. 41	——	276
39	— 43. 51	229	——
40	— 45. 24	——	283
41	— 49. 15	207	——
42	— 50. 25	198	——
43	— 51. 27	189	——
44	— 52. 44	186	——
45	— 54. 6	171	——
46	— 55. 17	165	——
47	— 57. 21	155	——
48	— 59. 3	135	——
49	1^h. 0. 5	126	——
50	— 1. 45	109	——
Finis	— 5. 31	——	——

Circa obſcurationem maximam, cum luna fere tota intra imaginem Solarem in machina helioſcopica appareret, *diameter lunae*, repetito examine, ope circini inuenta eſt = 340. part. ſcalae ante memoratae.

Nunc ad deductiones quasdam progredior, eum praeſertim in finem inſtituendas, vt innoteſcat, quan-

quantum methodo obſeruandi indicatae, pro vſu futuro, fidere liceat. Primum autem ſtatim patet, momenta initii et finis Eclipſis ope machinae helioſc. a Socio annotata tantum rigorem non prae ſe ferre, quantum immediata per Tubum 6. ped. obſeruatio docuit. Initium nempe ſerius in machina contigit, quam in Tubo; finis autem citius ibi, quam hic. Aſt diſcrimen hoc mirum videri nequit, ſi expendatur, quam exacte Tubus momenta iſta patefecerit; cum e contrario conditio repraeſentationis in machina initium tunc demum ſenſui ſubiicere potuerit, poſtquam luna limbum imaginis Solaris iam nonnihil penetraſſet; finem autem indicaverit, cum adhuc limbus lunae cum margine imaginis Solaris confunderetur.

Interim, ſi ex momentis initii et finis, ſumendo inter ea numerum medium arithmetice proportionalem, *tempus obſcurationis maximae* definias, ſub hypotheſi nempe, ſemitam centri lunae apparentem per diſcum Solis rectilineam, et diametrum lunae apparentem durante Eclipſi ad ſenſum conſtantis magnitudinis haberi poſſe; conſenſum exoptatum deprehendes, ſiue obſeruationes per Tubum ſiue per machinam adhibeas. Scilicet ope

	Tubi 6. ped.	machinae
Initium	$10^h. 6'. 32''$	$10^h. 6'. 58''$
Finis	1. 5. 54	1. 5. 32
Tempus obſcur. max.	11. 36. 13	11. 36. $14\frac{1}{2}$

 Si

Si dicta hypotheſis non arrideat pro determinatione temporis obſcurationis maximae; hoc nonnihil propius cognoſci poterit ex obſeruatis ope machinae partibus lucidis in vicinia obſcurationis maximae. Cum enim tunc pars ſemitae centri lunae (reuera curuae) certiori modo pro recta, et diameter lunae conſtantis magnitudinis aſſumi poſſint; ex partibus lucidis ante et poſt obſcurationem maximam aequalibus, attendendo tempora adſcripta et inter haec medium arithmetice proportionale capiendo, tempus obſcurationis maximae inuenietur. Si partes eiusmodi lucidae non occurrant aequales (vt plerumque fieri ſolet); ad electam partem lucidam ex vno latere obſcurationis maximae ope interpolationis quaeri poteſt reſpondens aequalis ex altero latere vna cum tempore, quod huic conuenit, vt nunc methodo praecedenti tempus obſcur. max. innoteſcat. Hoc modo obtinui

ex obſeru.	Tempus obſcur. max.
31.16.18	$11^h.35' 44\frac{1}{2}''$
30.18.19	11. 35. 9
29 19.20	11. 35. 21
28.20.21	11. 35. 23
medium	11. 35. 24.

quod 49″. propius habetur, ac iſtud $11^h.36'.13''$ ex initio et fine definitum. Cauendum in eiusmodi deductionibus, ne partes lucidae aequales nimis

vici-

vicinae ad obſcurationem maximam accipiantur, cum lenta tunc earum mutatio aberrationem notabiliorem producere valeat.

Methodum nunc exponam, qua ex tribus partibus lucidis, quomodocunque inaequalibus, itidem tamen et ob eandem rationem in vicinia obſcurationis maximae ſumtis vna cum temporibus adſcriptis, non ſolum diſtantia centrorum Solis et lunae minima, verum etiam tempus obſcurationis maximae definiri poſſit; quae methodus et interpolationem excludet, et, mutatis mutandis, in aliis quoque obſeruationibus frequenter vſui erit. Cognitae primum requiruntur diametri Solis et lunae in iisdem ſcalae partibus, in quibus partes lucidae exhibentur. Obſeruatio immediata eas docuit, Solis nempe $= 365$, lunae $= 340$ part. ſcalae, ideoque ſemidiametrum Solis $= 182,5$. lunae $= 170$. Ex his deinde et ex parte lucida data inueniri debet diſtantia centrorum Solis et lunae, ad idem tempus referenda, quod parti lucidae conuenit. Hunc in finem repraeſentet EAB peripheriam diſci Solaris, centri C radii CE. In L ſit centrum peripheriae diſci lunaris AGB, priorem in A, B, ſecantis, vt figura AFBH partem Solis obſcuratam exponat, recta AB vero chordam defectus. Iuncta ſint centra C, L, recta CL, quae erit diſtantia centrorum Solis et lunae, et protracta in E partem lucidam Tab. XVII. Fig. 1.

EF indicabit. Facile iam patet, eſſe CL=FL +EF−CE, ſeu dictam diſtantiam haberi ex ſumma ſemidiametri lunae (FL) et partis lucidae (EF) demta ſemidiametro Solis (CE). Taceo eiusmodi centrorum diſtantiam ex chorda defectus quoque et ex ſemidiametris Solis et lunae poſſe reperiri, ſi e re viſum fuerit.

Problema nunc ſoluendum: *Datis tribus centrorum Solis et lunae diſtantiis cum temporum reſpondentium interuallis; inuenire diſtantiam centrorum minimam.* Statuatur ergo centrum Solis in M, et OPQ ſit traiectoria centri lunae, in vicinia obſcurationis maximae pro rectilinea habenda. Ad data tempora, ad quae diſtantiae centrorum inuentae ſunt, ponatur centrum lunae fuiſſe ſucceſſiue in O, P, Q, vt MO, MP, MQ dictas diſtantias exhibeant. Ex temporibus, quibus centrum lunae loca, O, P, Q, occupauit, dabuntur tempora motus lunae per OP, OQ, quae ergo (cum motus vniformis ſpectari poſſit) rationem ſpatiorum OP, OQ, a luna interim percurſorum manifeſtabunt. Ex M in OQ demiſſa ſit perpendicularis MN, quae diſtantiam centrorum minimam exponet. Solutio problematis igitur huc redit, vt ex datis MO, MP, MQ, magnitudine, et ratione OP:OQ, inueniantur primum OQ, deinde MN, magnitudine in iisdem partibus ſcalae, in quibus dantur centrorum diſtantiae.

Tab.XVII. Fig. 2.

Ex

Ex trigonometricis ſuppono, quod, poſito ſinu toto $= R$, ſit

in triang. OMQ $\quad \text{coſ. } O = R \times \frac{MO^2 + OQ^2 - MQ^2}{2 \times MO \times OQ}$

et ſimiliter

in triang. OMP $\quad \text{coſ. } O = R \times \frac{MO^2 + OP^2 - MP^2}{2 \times MO \times OP}$

Sint $MO = a$

$MP = b$

$MQ = c$

ratio $OP : OQ = n : m$

$OQ = x$

ideoque $OP = \frac{nx}{m}$.

Habebitur ergo ex duplici ipſius coſ. O valore ſequens aequatio

$$R \times \frac{a^2 + x^2 - c^2}{2ax} = R \times \frac{a^2 + \frac{n^2x^2}{m^2} - b^2}{\frac{2anx}{m}}$$

quae rite transformata producet

$$x^2 = \frac{m}{n} \times \left(a^2 + \frac{nc^2 - mb^2}{m - n}\right)$$

$$= \frac{m}{n} \times \left(a^2 + \frac{nc}{m-n} \times c - \frac{mb}{m-n} \times b\right)$$

$$= \frac{m}{n} \times \left(a^2 + f^2 - g^2\right)$$

ſi breuitatis cauſa ponantur

$$f^2 = \frac{nc}{m-n} \times c \qquad g^2 = \frac{mb}{m-n} \times b$$

Sic dabitur x ſeu OQ.

Fiat nunc

$$OQ : MO + MQ = MO - MQ : ON - NQ$$

vt $ON - NQ$ innoteſcat. Si enim $\frac{1}{2}(ON - NQ)$ addatur ad $\frac{1}{2}OQ$ ſiue $\frac{1}{2}(ON + NQ)$ inuenietur ON et tandem $MN = \sqrt{MO^2 - ON^2}$.

Exemplum illuſtrationem ſuppeditabit. In obſeruationibus, 16, 21, 29, reſpondent

Tab. XVII. Fig. 1. 2.

locis lunae	tempora	EF	ideoque CL
in O	$11^h. 1'. 3''$	151	138,5
P	11. 17. 0	97	84,5
Q	11. 58. 18	110	97,5

ſiquidem $CL = FL + EF - EC$, et $FL = 170$, $EC = 182,5$ ſemidiametri nempe lunae et Solis.

Tempus motus per $OP = 15'.57'' = 957''$

- - - - - - $OQ = 57.15 = 3435$

$$OP : OQ = 957 : 3435 = n : m$$

itaque $m = 3435$

$n = 957$

$m - n = 2478$

$MO(CL) = a = 138,5$

$MP \quad = b = 84,5$

$MQ \quad = c = 97,5$

log.

$$\log. n(957) = 2,9809119$$
$$\log. c(97,5) = 1,9890046$$

$$4,9699165$$
$$\log.(m-n)(2478) = 3,3941013$$

$$\log. \frac{nc}{m-c} = 1,5758152$$
$$\log. c = 1,9890046$$

$$\log. f^2 = 3,5648198$$
$$f^2 = 3671,30$$
$$\log. m(3435) = 3,5359267$$
$$\log. b(84,5) = 1,9268567$$

$$5,4627834$$
$$\log.(m-n) = 3,3941013$$

$$\log. \frac{mb}{m-n} = 2,0686821$$
$$\log. b = 1,9268567$$

$$\log. g^2 = 3,9955388$$
$$g^2 = 9897,80$$
$$f^2 = 3671,30$$

$$f^2 - g^2 = -6226,50$$
$$a^2(138,5^2) = +19182,25$$

$$a^2 + f^2 - g^2 = 12955,75$$

log.

$$
\begin{array}{rl}
\log.\ (a^2+f^2-g^2) & = 4,1124625 \\
\log.\ m & = 3,5359267 \\
\hline
 & 7,6483892 \\
\log.\ n & = 2,9809119 \\
\hline
\log.\ x^2 & = 4,6674773 \\
\log.\ x & = 2,3337386 \\
x \text{ vel } OQ & = 215,6 \\
MO+MQ & = 236,0 \\
MO-MQ & = 41,0 \\
\log.\ 236,0 & = 2,3729120 \\
\log.\ 41,0 & = 1,6127839 \\
\hline
 & 3,9856959 \\
\log.\ 215,6 & = 2,3336488 \\
\hline
\log.\ (ON-NQ) & = 1,6520471 \\
ON-NQ & = 44,9 \\
\frac{1}{2}(ON-NQ) & = 22,4 \\
\frac{1}{2}OQ & = 107,8 \\
\hline
ON & = 130,2 \\
MO^2(138,5^2) & = 19182,25 \\
ON^2 & = 16952,04 \\
\hline
MN^2 & = 2230,21 \\
MN & = 47,2.
\end{array}
$$

Definita centrorum diſtantia minima MN, cum puncto N, traiectoriae lunaris OQ, reſpondeat obſcu-
ratio

ratio maxima, huius tempus inueniri poterit, ſi ex datis OQ, ON, et tempore motus centri lunae per OQ, quaeratur tempus per ON, quod comparatum cum temporis momento, quo centrum lunae fuit in O, *Tempus obſcurationis maximae* manifeſtabit. Sic in exemplo praec. habentur

$$OQ = 215,6$$
$$ON = 130,2$$
$$\text{temp. per } OQ = 3435''$$

Analogia ergo

$$OQ : ON = \text{temp. per } OQ : \text{temp. per } ON$$

producet temp. per $ON = 2074'' = 0^h.34'.34''$.
vnde cum tempus, quo centrum
lunae fuit in O $= 11^h.\ 1.\ 3.$

erit tempus obſcurationis max. $= 11.\ 35.\ 37.$

Simili modo ex obſeruationibus 19, 28, 31, definiui

$$OQ = 210,4$$
$$ON = 84,6$$
$$MN = 50,3$$

temp. obſcur. max. $= 11^h.35'.8''$.

Si inter hoc et iſtud $= 11^h.35'.37''$ in praec. deductione inuentum capiatur medium $= 11^h.35'.22\frac{1}{2}''$, hoc cum eo $= 11^h.35'.24''$ quod ſupra comparatio partium lucidarum aequalium docuit, bene conuenit.

Quoniam tempus obſcurationis maximae in Tabula obſeruationum ſuperiori inter obſeruationes 25 et 26. cadit, vtraque partem lucidam = 57. part. ſcalae notante; recte ſumi poteſt numerus 57. pro parte lucida minima in obſcuratione maxima, ex qua diſtantia centrorum minima habetur = 44, 5 part. ſcalae. Haec obſeruationi immediatae reſpondens nonnihil minor deprehenditur iis, 47, 2; 50, 3; quas calculus expoſitus produxit.

Ex iis, quae hactenus pertractata ſunt, elucet, obſeruationes ope machinae helioſcopicae factas ſubminiſtrare concluſiones ſufficienter inter ſe conuenientes, ita, vt, ſi fors aliter non ferat, dicta machina in obſeruationibus Eclipſium Solarium commode vti liceat. Methodus autem, ex tribus centrorum diſtantiis, notatis ſimul ad eas temporibus reſpondentibus, in congreſſu alicuius corporis coeleſtis cum alio, vniuerſalitate ſua ſe commendat, et in Tranſitu Veneris vel Mercurii per Solem, lunae ad fixam vel planetam, planetae ad fixam vel alium planetam etc. exoptato ſucceſſu adhiberi poteſt, ſi ope micrometri bonae notae (v. c. obiectiui) diſtantiae centrorum, vel mediate (capiendo limborum ſibi viciniſſimorum diſtantias), vel immediate, ſolicite definiantur.

Monendum adhuc, in methodo iam nominata, pro eclipſi Solis ope machinae obſeruata, cognitam

requi-

requiri diametrum lunae in iisdem ſcalae partibus, in quibus reliquae dimenſiones indicantur, quam quidem in noſtra Eclipſi circa obſcurationem maximam immediata obſeruatio conceſſit. Cum autem in aliis Eclipſibus rariſſime immediata eiusmodi dimenſio locum habeat, ideoque alia methodo lunae diameter quaeri debeat; periculum iſtius facere conſtitueram, vt ex comparatione huius methodi cum immediata obſeruatione innoteſceret, quid de ea, nunc tradenda, in aliis eclipſibus ſperare liceret. Facile autem patet, ſi ad idem temporis momentum darentur AB (chorda defectus), EF (pars lucida), vna cum radio imaginis Solaris EC; diametrum lunae FG detegi poſſe, protracta ſcilicet CL in G et E. Iungatur nempe radius Solis CB, ex quo et DB ſeu $\frac{1}{2}$ AB dabitur $CD = \sqrt{CB^2 - DB^2}$. Ex CD, EC, EF, habebitur $FD = CD + EC - EF$, ideoque DG ex analogia $FD : BD = DB : DG$. Tandem $FD + DG$ manifeſtabit diametrum lunae FG quaeſitum. Si nunc Tabulam obſeruationum conſulas; ad notatum tempus ex immediata obſeruatione chordam defectus quidem cognoſces; aſt ad idem temporis momentum pars lucida immediata non datur, cum chordae defectus et partes lucidae alternis tantum vicibus obſeruari potuerint. Interpolatione igitur opus eſt inter partes lucidas, quarum tempora adſcripta includunt tempus obſeruatae chordae defectus, vt ad idem tempus, quo diſtan- Tab.XVII. Fig. 1.

 tia

tia cornuum explorata eſt, pars lucida quoque innoteſcat. Adhibitis variarum obſeruationum numeris ſucceſſum exoptatum non deprehendi, diſſenſu notabili inter determinationes diametrum lunae reſpicientes emergente, ita, vt eiusmodi concluſionibus non ſatis fidere liceat, ſed conſultius ſit, diametrum lunae eo in caſu, quo immediata eius dimenſio non conceditur, ex calculo petere, eamque, ob repraeſentationem diſci lunaris in fundo lucido, parte aliqua minuere, quam in noſtra eclipſi pro mea machina 6. ſecund. circuli maximi cognoui.

OBSER-

OBSERVATIONES ALIQVOT COELESTES ANN. 1765 ET 1766. LIPSIAE HABITAE.

Auctore

G. HEINSIO.

Tranſitus lunae per Pleiades an. 1765. d. 13. Iulii ſtyl. nov. temp. ciuil. horis matutinis.

Poſt horam ſecundam matutinam, coelo ſereno, lunam ad culmen aedificii oppoſiti in orientali coeli plaga in conſpectum meum venientem per Tubum aſtronomicum 3. ped. ſtatim contemplatus ſum, vt ſitum eius inter Pleiades diiudicare posſem. Luna, vltra tres dies Quadraturam ſecundam transgreſſa, phaſin corniculatam exhibebat, parte eius non illuminata lumine debili etiam inſtructa. Deprehendi autem lunam circa $2\frac{3}{4}$ hor. margine ſua lucida in vicinia *Lucidae Pleiadum*, ita, vt occultationem eius ad limbum lucidum futuram ſuſpicarer; licet euentus tranſitum tantummodo propinquum docuerit. Egregius erat lunae cum fixis Pleiadum praecipuis adſpectus per dictum Tubum,

quamuis lumen crepuſculi matutini iam dum tam forte eſſet, vt lectioni ſcripti ſufficeret. Vt iam acceſſum lunae lucida ſua margine ad Lucidam Pleiadum certiori modo obſeruare poſſem, Tubum Gregorianum adhibui ſub apparatu, quo iſte obiecta ſecundum diametrum 52. vicibus augere ſolet. Dum autem luna cuſpide ſua inferiori (ſitu erecto) continuo appropinquaret ad Lucidam Pleiadum; inopinato ad marginem lunae obſcuram in vicinia iſtius cuſpidis, hor. 2. 54′. 13″. temp. veri, emergebat ſtellula, de quo emerſionis tempore intra 4 vel 5. ſecunda temporis certus ſum. Stellula haec in vicinia Lucidae Pleiadum conſtituitur, inſignita a *Flamſteedio* in Catalogo Britannico littera *p*, qui eam ſeptimae magnitudinis notat. Redeo ad Lucidam Pleiadum. Huius coniunctio cum cuſpide inferiori lunae tandem contigit, 2^h. 56′. 53″. temp. veri, per dictum Tubum Gregorianum, quod momentum etiam intra 5. ſecund. certum iudico. Coniunctionem autem nomino conditionem, qua recta ſtellam et cuſpidem inferiorem iungens perpendicularis aeſtimata fuit ad marginem lunae proximam. Minimam hanc diſtantiam oculorum iudicio comparatam cum macula lunari, Grimaldus dicta, habita ratione diametri lunae apparentis, collegi aequalem vni minuto circuli maximi proxime. Figura 1. ſitu erecto delineata exponit circiter locum ſtellulae emergentis ad *p*, et *c*η diſtantiam minimam Lucidae

Tab. XVII. Fig. 3.

dae Pleiadum η a cuſpide inferiori *c* in coniunctione. Non multo poſt obſeruatam coniunctionem conſpectum lunae eripiebat aedificium oppoſitum, qui, licet denuo rediret, obſeruationem tamen vlteriorem non admiſit, extinctis ſcilicet interea a lumine crepuſculi, nunc nimis forti, Pleiadum ſtellis. Exploratio ſtatus horologii oſcillatorii, in obſeruationibus adhibiti, reſpectu temporis veri facta eſt ope altitudinum Solis reſpondentium diebus, 13, 14, Iulii, coelo ſereno captarum.

Eclipſis Solis partialis d. 16. Auguſt ſtyl. nov. 1765. temp. ciuil. horis pomeridianis.

Nubes licet copioſae exiguam ſpem, Eclipſin videndi, relinquerent; feliciter tamen factum eſt, vt, appropinquante Eclipſis initio, Sol per hiatus nubium bene interdum cerneretur. Adhibito igitur Tubo Aſtronomico 6. ped., cuius deſcriptionem in Tom. VI. Nou. Commentar. p. 550. dedi, Solem diligenter contemplatus ſum, et tandem ingreſſum lunae in diſcum Solis, per nubes tenues translucentis, feliciter deprehendi. Scilicet $4^h.29'.15''$. temp. veri lunam, Solis marginem penetrare incipientem, primum conſpexi; et facile concedebatur aeſtimium, limborum Solis et lunae contactum verum

rum vix 5. ſec. temporis momentum notatum praeceſſiſſe, ita, vt a veritate parum vel nihil aberrare credam, ſi *Initium Eclipſis* $4^h.29'.10''$. temp. veri factum eſſe ponam. Minutum primum temporis poſt, Eclipſis incrementum iam ſenſibile ceperat; tunc autem nubes ſpiſſae et continuae Solem occultabant, et vlteriorem obſeruationem prorſus impediebant. Comparatio temporis horologii, in obſeruatione adhibiti, cum tempore vero innotuit ex altitudinibus Solis reſpondentibus d. 17. Auguſt coelo ſereno captis, nec non ex aliis Solis altitudinibus d. 16 et 18. Auguſt, quantum coelum permiſit, ſumtis.

Tranſitus Lunae per Pleiades an. 1766. d. 22. September ſtyl. nov. temp. aſtronom.

Ante quatuor dies et aliquot horas Luna oppoſitionem cum Sole, ſeu Plenilunium, celebrauerat, quam ob rem phaſin valde gibbam oſtendebat, vt cuſpides eius nec bene terminatae apparuerint, nec linea cuſpides iungens ſatis fidenter, quoad poſitionem, diiudicari potuerit. Ex hac circumſtantia facile praeuidere licuit; momenta, quae in Tranſitu Lunae incidentiam lineae cuſpidum, mente extra diſcum protractae, in ſtellas, ſeu coniunctionem

nem harum cum dicta cuſpidum linea, concernunt, non ſatis certa eſſe futura; id quod etiam euentus poſtea docuit. Eadem phaſis luce ſua nimia, coelo ſereno, effecit quoque, vt hor. 10., cum luna multum adhuc abeſſet a Pleiadum ſtellis, inſigniores tantum ſtellae, in Fig. 2. conſignatae, per Tubum aſtronomicum 3. ped. ſimul cum luna conſpicuae eſſent; ex quibus tamen aliquae, cum luna magis magisque ad eas appropinquaret, per Tubos etiam maiores poſtea conſpectum fugiebant. Hoc Tubo 3. ped. praeſertim vſus ſum, vt viam circiter diiudicare poſſem, quam luna per Pleiadum conſtellationem ſecutura eſſet, et vt ſeries appulſuum lunae ad ſtellas prope innoteſceret. Sic praeparatus, tum aliquot ſtellarum occultationes, tum aliarum incidentiam in lineam cuſpidum attente expectabam. Vt autem ea, quae poſtea annotaueram, diſtincte exponere poſſem; primum ope proiectionis conſuetae ſemitam centri lunae, attendendo ſcilicet ad parallaxeos effectum, ad ſtellam *Maiam* eiusque circulum latitudinis, ſchemate conſignaui, adhibitis in eum finem elementis, quae Ephemerides *P. Hell* ſuppeditabant; cui ſchemati deinde conſtellationem inſigniorum in Pleiadibus ſtellarum per differentias longitudinum et latitudinum, ex catalogo Britannico *Flamſteedii* ſumtas inſerui. Conſtructum eſt ſchema ſitu erecto pro caua coeli ſuperficie, et in eo exponunt, DE parallelum eclipticae per ſtel- Tab. XVII. Fig. 4.

 lam

lam *Maiam*, FG huius circulum latitudinis, CL ſemitam centri lunae viſam, AB lineam cuſpidum pro centro lunae in C poſito. Litterae ſtellis adſcriptae ſunt eae, quibus pro diſcernendis Pleiadum ſtellis vſus eſt *Flamſteed* p. 3. Catalogi Britannici in Vol. III. Hiſtor. coeleſtis. In maiorem certitudinem expedit ſignis his litteralibus nomina pro ſtellis Pleiadum introducta adiungere, ea quidem, quae *Caſſini* et *Maraldi* in Commentar. Acad. Sc. Paris. ad an. 1708. p. 384. edit. Batav. adhibuerunt, cum quibus etiam (excepta ſtella *Aſterope*) conueniunt et ſigna et nomina a *P. Hell* in Ephem. an. 1766. p. 8. tradita. Sunt nempe

g.	Celeno. magn.	7	*d.*	Merope magn.	5
b.	Electra - -	5	η.	Alcione ſeu Lucida Pleiadum	3
e.	Taigeta - -	5	*f.*	Atlas - -	6
ι.	Maia - -	6	*h.*	Pleione -	7. 8
k.	Aſterope -	6. 7			

Magnitudines ſtellarum apparentes ſecundum *Flamſteed.* l. c. hic additae ſunt. Nunc ad ipſam phaenomenorum enumerationem

An. 1766. *d.* 22.
Septembris ſt. n. *Obſeruationes.*
temp. vero aſtron.

$11^h. 27'. 5''$. In vicinia limbi lunae lucidi diſparebat ſtella *e* ſeu *Taigeta*, cum diſtantia eius

eius a dicto limbo vix 1. vel $1\frac{1}{2}$ ſuae diametri iudicaretur. Obſeruatio facta eſt per Tubum Gregorianum ſub apparatu, quo iſte 52. vicibus ſecundum diametrum obiecta auget. A momento actualis ad limbum *Immerſionis* parum aberrabitur, ſi iſtud ſtatuatur $11^h.27'.8''$ vel $9''$.

Dudum ante hanc occultationem in Tubo Gregoriano ex oculis eripuit ſtellam *g* ſeu *Celeno* ſorte lumen lunae ad eam appropinquantis.

$11^h.40'.22''$ vel $32''$. ſtella *b* ſeu *Electra* ope Tubi Gregoriani cuſpidi lunae inferiori B (ſitu erecto) proxima aeſtimata fuit. Propter dubium cuſpidis, quae ſola in Tubo conſpicua erat, terminum, de momento temporis non ſatis conſtat; nec diſtantiam ſtellae a cuſpide minimam, quam paucorum gradus minutorum recordor, certiori modo diiudicare obſeruatio ſequens, quae inſtabat, permiſit. Scilicet

$11^h.44'.8''$. Contigit occultatio ſtellae *c* ſeu *Maiae* a limbo lunae lucido. Per Tubum Gregorianum ſub dicto apparatu, cu-

ius ope Immerſionem obſeruabam, ſtellam vsque ad contactum cum limbo lunae lucido proſequi mihi licuit; ita, vt haec occultationis obſeruatio valde certa ſit.

In eodem Tubo ſtellas minores *k*, *l*, in notabili a limbo lunae lucido diſtantia iam extinxerat forte lumen lunae.

$12^h.17\frac{1}{4}'$. Per Tubum aſtron. 3. ped. ſupra memoratum, iudicabam ſtellae *d* ſeu *Merope* incidentiam in lineam cuſpidum protractam. Ob rationem initio allatam et ſatis magnam ſtellae a luna diſtantiam, haec obſeruatio omni dubio libera non eſt.

$12^h.33'.30''$. Emergebat ſtella *e* ſeu *Taigeta* ad limbum lunae obſcurum. Obſeruatio haec peracta eſt ope Tubi aſtron. 6. ped. in Tom. VI. Nov. Commentar. Acad. Petrop. p. 550. deſcripti, eiusque momentum ad ipſum temporis ſecundum certum eſt.

$12^h.43'$. Circiter Emerſionem ſtellae *c* ſeu *Maiae* accidiſſe ſuſpicabar; per dictum Tubum aſtron. 6. ped. Scilicet inopinato emerſerat ſtella ad limbum lunae

lunae obſcurum, interea, cum recreationi viſus, in attenta Emerſionis praecedentis expectatione, debilitati, nonnihil indulgerem.

12^{h}. 54$'$. 45$''$ vel 50$''$. aeſtimaui, per memoratum Tubum aſtron. 6. ped. incidentiam ſtellae η, ſeu *Lucidae Pleiadum*, in lineam cuſpidum productum. Monitum initio allatum et hic attendi debet, ſi de certitudine obſeruationis iudicium ferre velis; error enim aliquot ſecundorum temporis euitari non potuit.

Haec ſunt praecipua Tranſitus lunae per Pleiades momenta, quorum tempus verum optime deducere licuit ex altitudinibus Solis reſpondentibus, diebus 22, 23, 24, Septembris temp. ciuil. ad tria horologia oſcillatoria comparatis, habita debitarum correctionum ratione.

Coronidis loco monere expedit, poſitionem ſtellae *Maiae* inter reliquas Pleiadum ſtellas, quae ex catalogo *P. Hell* l. c. cognoſcitur, notabiliter differre ab ea poſitione, quam catalogi, *Flamſteedii* l. c., *Caſſini* et *Maraldi* l. c. *de la Hire* in Commentar. Acad. Sc. Paris. ad an. 1708. p. 387.

 edit.

edit. Batav. aſſignant. Scilicet differentia longitudinum *Lucidae Pleiadum* et *Maiae* eſt ſecundum *P. Hell* = 22′. 15″; aſt ſecundum reliquos ex ordine 18′. 37″; 18′. 37″; 18′. 42″.; quoad latitudinum differentiam autem hi autores ſatis inter ſe conueniunt. Obſeruationes in noſtro tranſitu circa *Maiam* habitae, et cum reliquis obſeruationibus comparatae, manifeſte docuerunt, poſitionem *Maiae* ſecundum *P. Hell* errore laborare; e contrario poſitionem iſtius ſecundum reliquos autores propius conſpirare cum obſeruationibus.

OBSER-

OBSERVATIO ECLIPSEOS LVNARIS DIE $\frac{19}{30}$. AVGVST 1765. HABITA IN OBSERVAVORIO IMPERIALI PETROPOLITANO.

Auctore

STEPHANO RVMOVSKI.

Vt parata omnia forent ad Eclipſin Solis, quae contigit die 5. Aug. coepi altitudines ſolis correſpondentes die 3. Aug. ex quibus meridies vera ad horologium prodiit $12^h.21'.11''$ habita ratione aequationis meridiei $+20''.49'''$. Coelum nubilum impediit, quominus obſeruatio huius phaenomeni inſtitui potuerit; appropinquante tamen Eclipſi Lunae, multoties ac illa ipſa die, in quam Eclipſis Lunae incidit, obſeruabam tranſitum Arcturi per tubum fixum; vnde comperi horologium Aſtronomicum ſpatio diei ſolaris medii conſtanter acceleraſſe $50''\frac{1}{2}$.

Die $\frac{19}{30}$. Aug. Luna in horizontem Petropolitanum prodiit Eclipſi ipſius iam ad finem vergente: ob vapores et lumen crepuſculare plura momenta quam ſequentia obſeruare non licuit.

Temp.

Temp. Hor.	Temp. verum	
$8^h. 11'. 15''$	$7^h. 39'. 55''$	Mare Criſium extra vmbram
8. 13. 0	7. 41. 40	Langraenus extra vmbram.
8. 15. 34	7. 44. 14	Limbum Lunae per vmbram conſpicio.
8. 17. 40	7. 46. 20	Penumbrae leue veſtig. in limbo Lunae.

Obſeruatio peracta eſt tubo trium pedum vmbra ſatis bene terminata.

Cel. Aepinus obſeruationi interfuit, finemque Eclipſeos teleſcopio Gregoriano duorum circiter pedum aeſtimauit $7^h. 44'. 20''$. temp. vero.

TRAN-

TRANSITVS VENERIS PER SOLEM A IESVITS TRANQVEBARIAE IN INDIA ORIENTALI OBSERVATVS.

	hor.	min.	ſec.
Primus contactus Veneris ad limbum Solis	7.	29.	39.
Immerſio totalis - - - -	7.	46.	52.
Differentia temporis inter primum contactum et totalem immerſionem -		17.	13.
Initium Emerſionis - - -	1.	40.	25.
Emerſio totalis - - - -	1.	56.	34.
Tempus durationis Emerſionis -		16.	9.
Duratio totius phaenomeni - -	6.	26.	55.

Obſeruatio tranſitus Veneris per Solem inſtituta in Madraſſ Indiae Orientalis d. 6. Iun. 1761.

	hor.	min.	ſec.
Primus contactus Veneris in diſcum Solis ante merid. - - - -	7.	28.	28.
Immerſio totalis Veneris in diſc. Solis	7.	45.	13.

	hor.	min.	ſec.
Differentia temporis contactum externum, inter , et totalem immerſionem -		16.	45.
Contactus limbi prioris Veneris ad limbum ſolis, ſiue initium emerſionis poſt merid.	1.	37.	1.
Emerſio totalis - - - -	1.	53.	7.
Tempus durationis exitus Veneris ex diſco Solis fuit - - - - - -	—	16.	6.

NB. Latitudo vrbis Madraſſ eſt circiter 13°.8′. et altitudo obſeruatorii ſupra horizontem circiter 40 pedes. Obſeruatorium fuit in aedibus Gubernatoris.

	hor.	min.	ſec.
Tempus durationis totius phaenomeni -	6.	24.	39.

INDEX

INDEX COMMENTARIORVM

Mathematica.

L. Euleri, De vſu functionum diſcontinuarum in Analyſi pag. 3.

Eiusdem, De vſu noui Algorithmi in ſoluendo problemate Pelliano pag. 28.

Eiusdem, Proprietates triangulorum, quorum anguli certam inter ſe rationem tenent p. 67.

Eiusdem, Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum p. 103.

Eiusdem, Obſeruationes Analyticae pag. 124.

Eiusdem, De motu rectilineo trium corporum ſe mutuo attrahentium pag. 144.

Eiusdem, De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti pag. 152.

Eiusdem, De phaenomenis coeli per ſegmenta ſphaerica diaphana ſpectati pag. 185.

Phyſico-Mathematica.

L. Euleri, Supplementum de figura dentium rotarum pag. 207.

Eiusdem, De motu fluidorum a diuerſo caloris gradu oriundo pag. 232.

Braun, De Admirando Frigore Artificiali quo Mercurius ſiue Hydrargyrus eſt congelatus Diſſertatio p. 268.

Eiusdem, Diſſertatio continens partim Additamenta noua et ſupplementa ad Diſſertationem de Congelatione Mercurii ſiue Hydrargyri, partim in alia corpora Frigoris artificialis inſignioris Nouos Effectus p. 302.

Eiusdem, Obſeruationes Meteorologicae Anni 1742. Tiumeni, Turinii, Werchoturiae et Solikamii in itinere potiſſimum a Gmelino inſtitutae. Potiora momenta excerpſit et in ordinem redegit pag. 320.

Eiusdem, Epitome obſeruationum Meteorologicarum anno 1761. Petropoli inſtitutarum cum conſectariis pag. 351.

Eiusdem, Obſeruationum Meteorologicarum an. 1762. St. V. epitome, cum conſectariis inde deductis pag. 368.

Eiusdem,

Eiusdem, Obſeruationum Meteorologicarum Petropoli factarum epitome per ſingulos menſes anni 1763. ſt. v. cum conſectariis, et in eas conſiderationibus pag. 382.

Phyſica.

Koelreuter, Inſectorum Muſei Petropolitani rariorum, Americae potiſſimum meridionalis incolarum, deſcriptiones p. 401.

Eiusdem, Deſcriptio Fuci foliacei, frondibus fructificantibus papillatis pag. 424.

Eiusdem, Aues Indicae rariſſimae et incognitae pag. 429.

Aſtronomica.

Rumovski, Breuis expoſitio Obſeruationum occaſione tranſitus Veneris per Solem in vrbe Selenginsk anno 1761. inſtitutarum pag. 443.

Eiusdem, Inueſtigatio Parallaxeos Solis ex obſeruatione taanſitus Veneris per diſcum Solis Selenginski habita, collata cum obſervationibus alibi inſtitutis pag. 487.

pag. 279. linea penultima pro ſore lege fere.
pag. 283. lin. 9. lege fieri pro fierie.
pag. 306. lin. 19. pro corporis lege corporibus.
pag. 307. lin. 17. pro denſitaten lege denſitatem.
pag. 312. lin. 4 et 6. pro fiſuris lege fiſſuris.
pag. 314. lin. 7. pro qui lege quae.
pag. 317. lin. 23. pro dubia lege dubie.
pag. 365. lin. 2. pro Iuii lege Iunii.
pag. 372. lin. 8. pro gradu lege graduum.
pag. 373. lin. 17. pro dies 11. lege 10.
pag. 376. lin. 13. pro 26. lege 25.

Fig. 2.

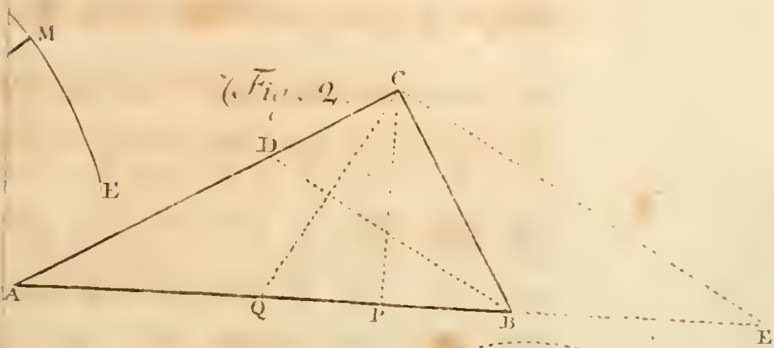


Fig. 3.

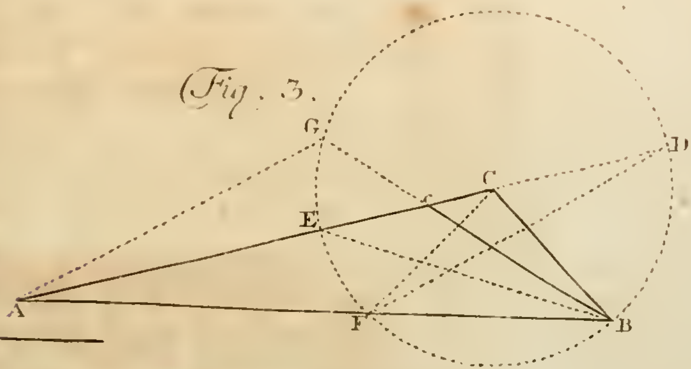


Fig. 5.

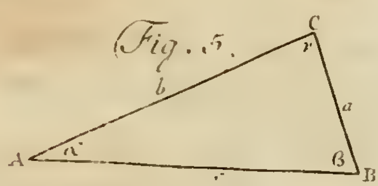
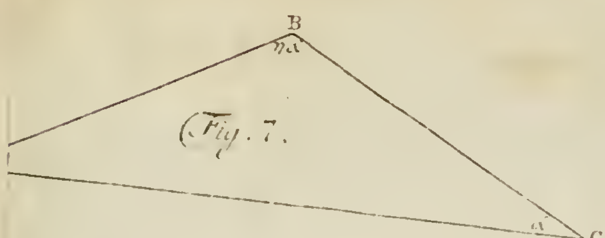


Fig. 7.



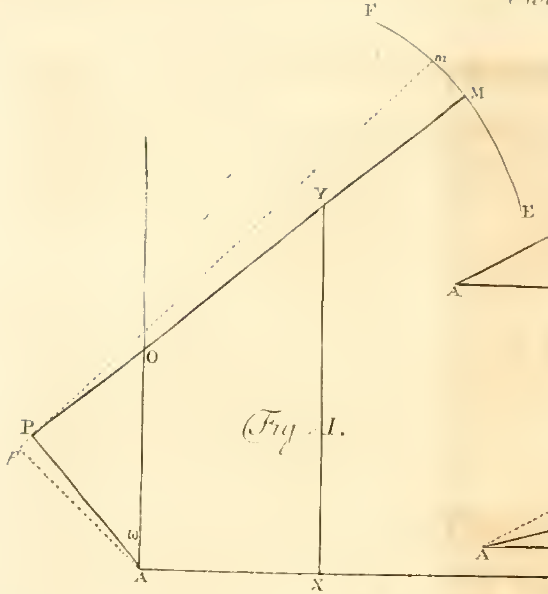


Fig. 1.

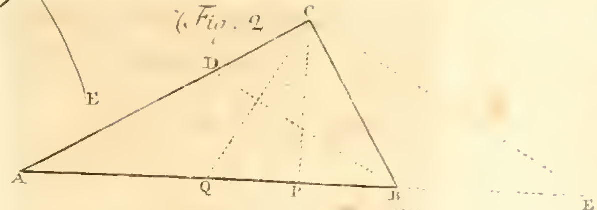


Fig. 2.

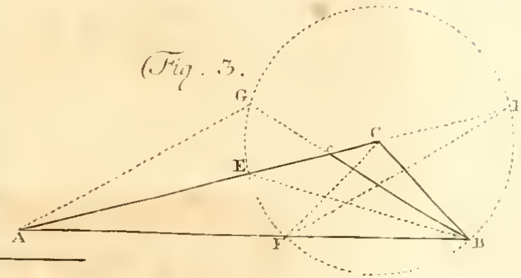


Fig. 3.

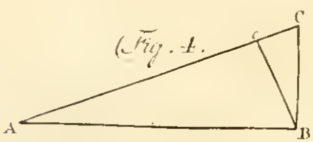


Fig. 4.

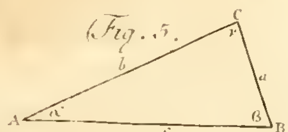


Fig. 5.

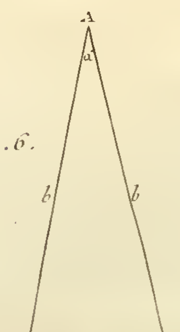


Fig. 6.

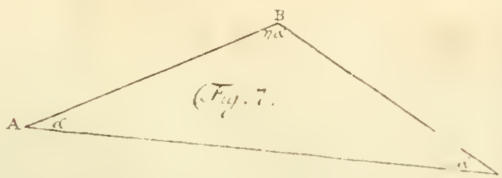


Fig. 7.

Fig. 2.

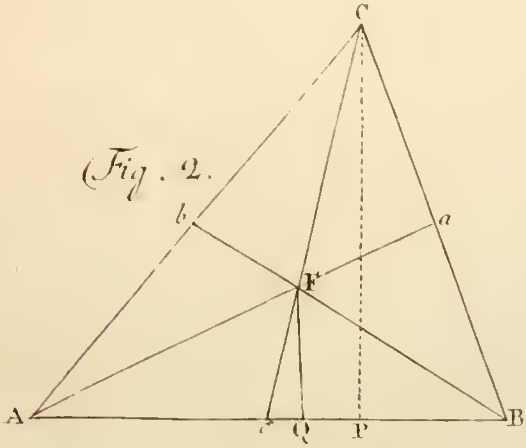


Fig. 4.

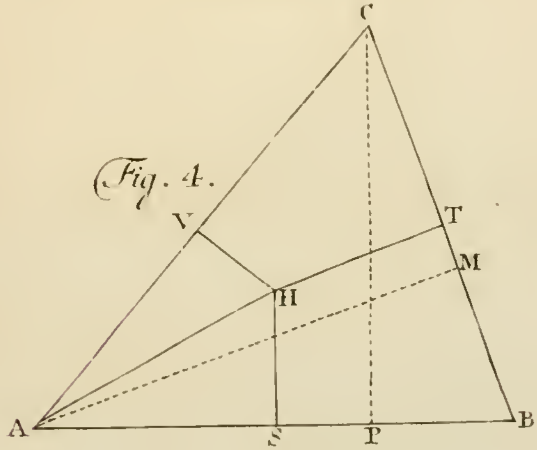


Fig. 6.

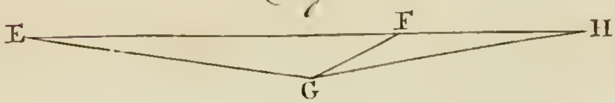
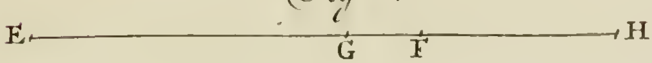


Fig. 7.



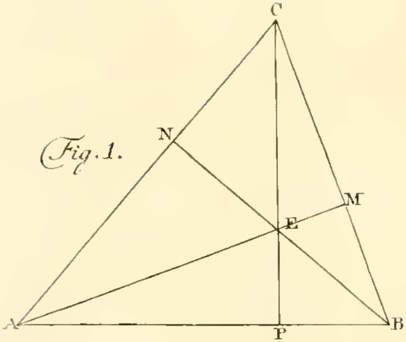


Fig. 1.

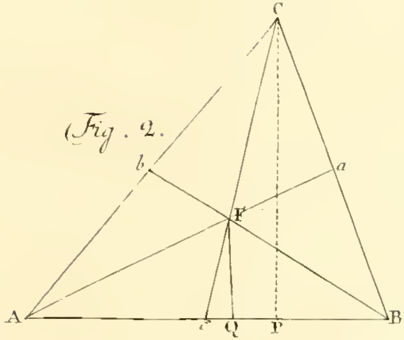


Fig. 2.

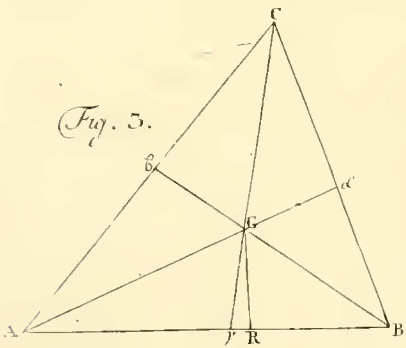


Fig. 3.

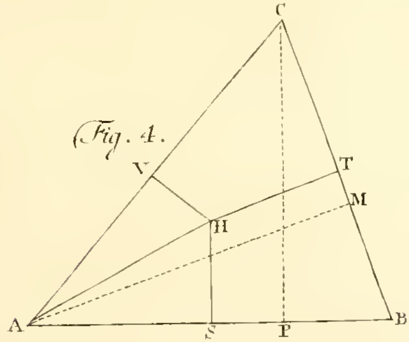


Fig. 4.

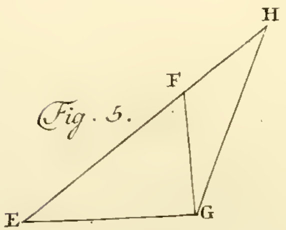


Fig. 5.

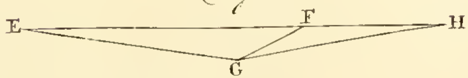
Fig. 6.


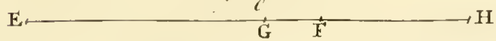
Fig. 7.


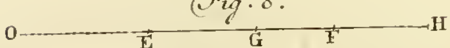
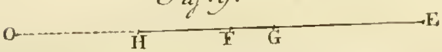
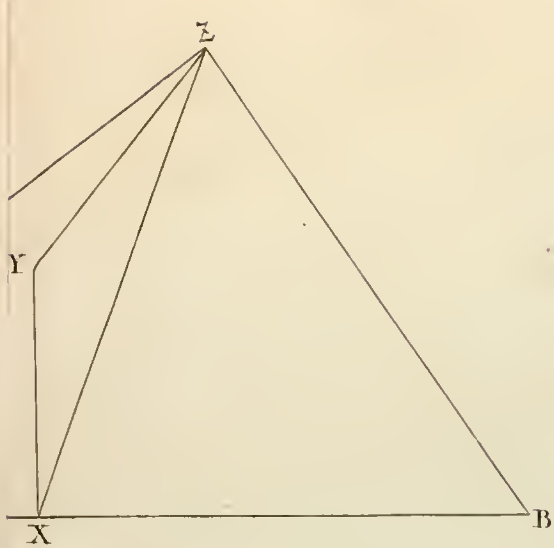
Fig. 8.


Fig. 9.




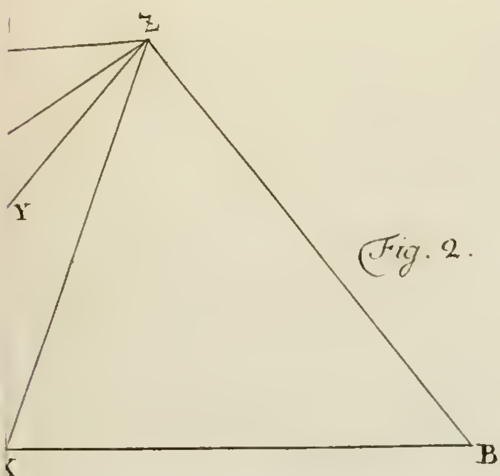


Fig. 2.

Fig. 1.

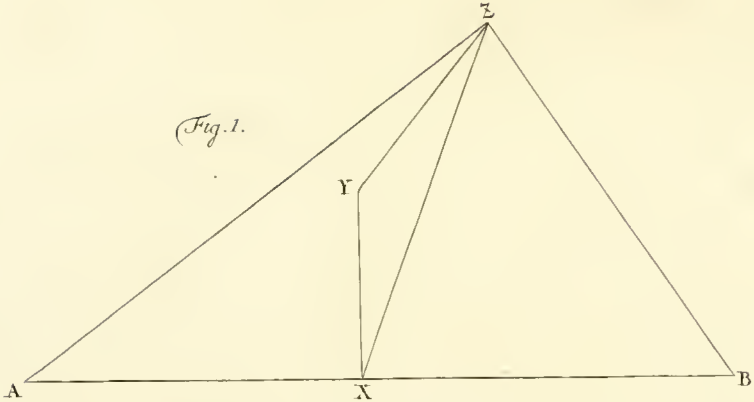
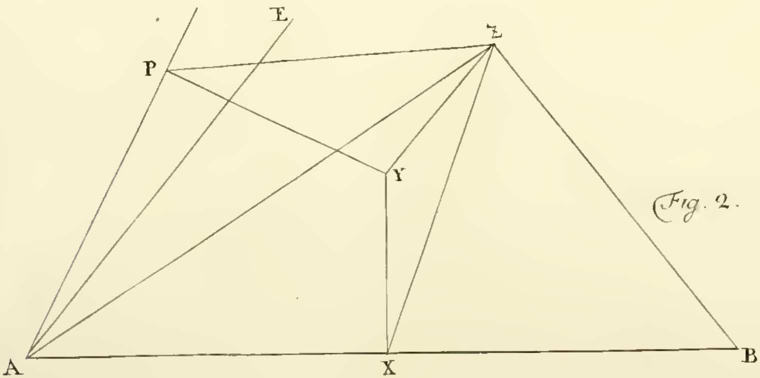


Fig. 2.



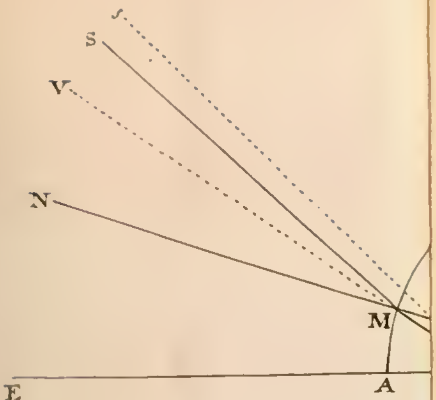
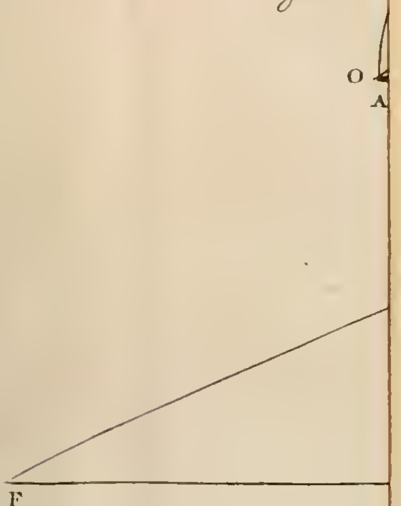


Fig. 2.



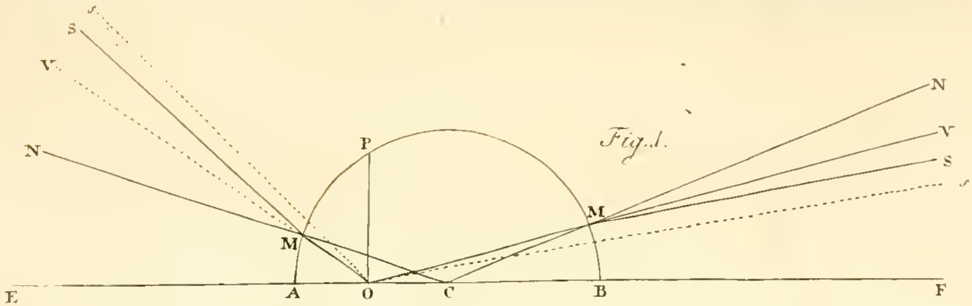


Fig. 1.

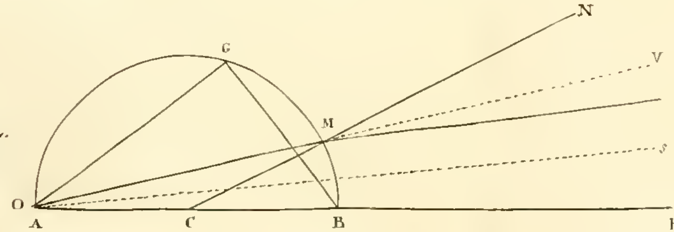


Fig. 2.

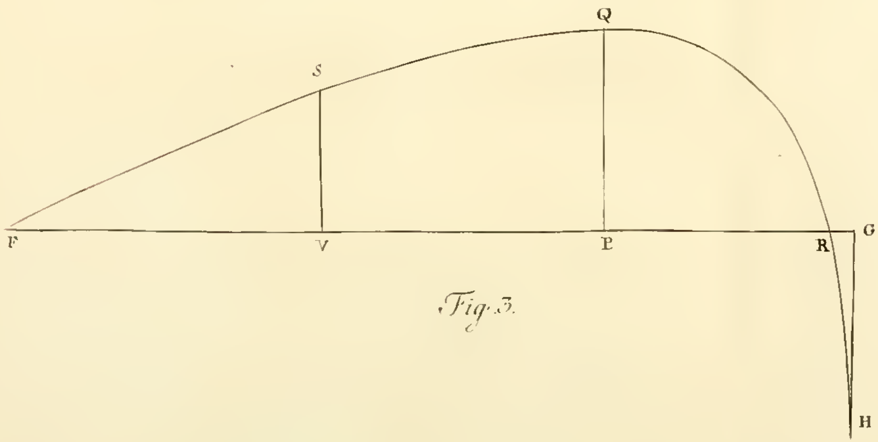
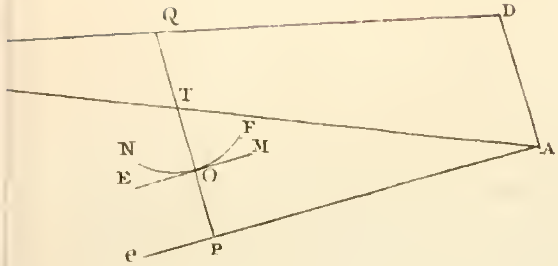
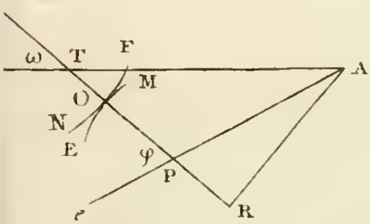


Fig. 3.





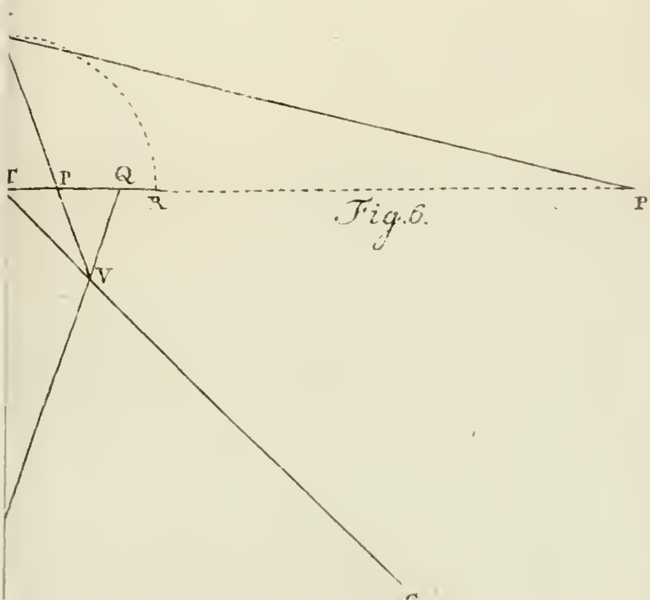


Fig.6.

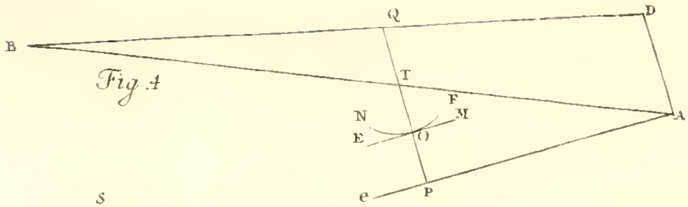


Fig. 4.

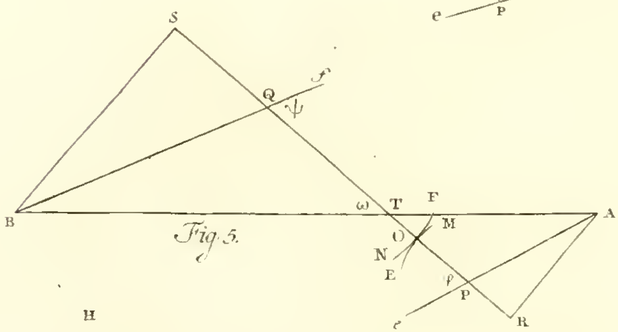


Fig. 5.

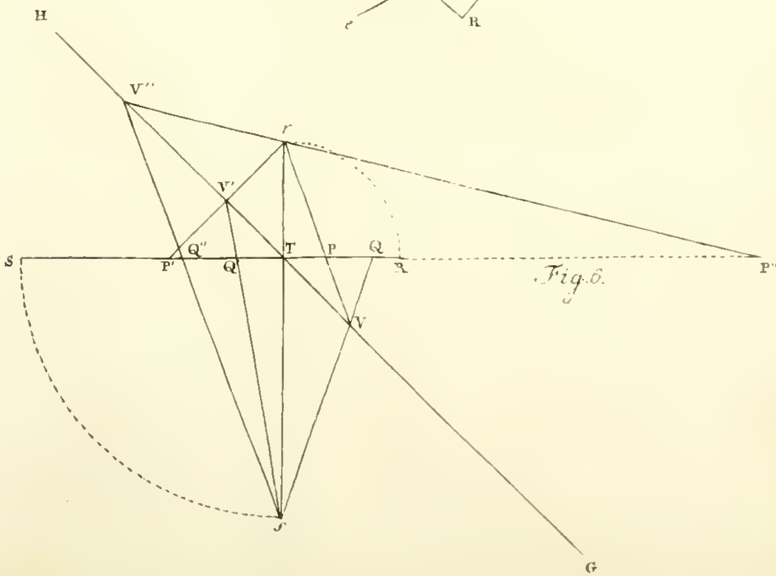


Fig. 6.

Fig. 7.

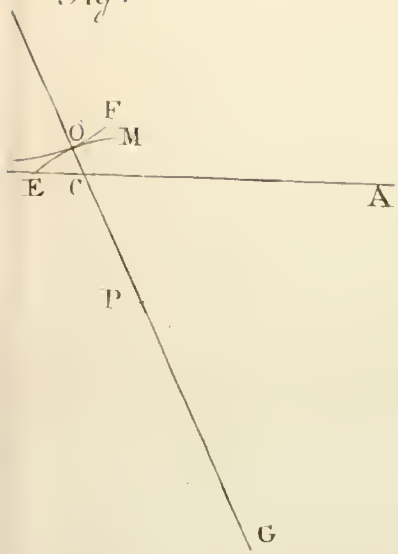
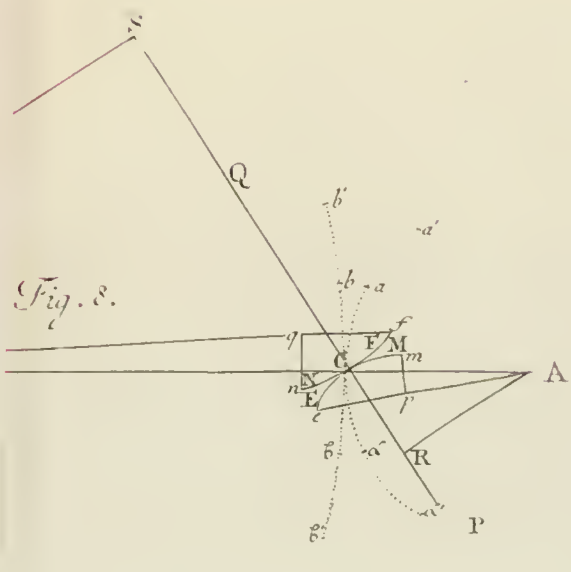


Fig. 8.



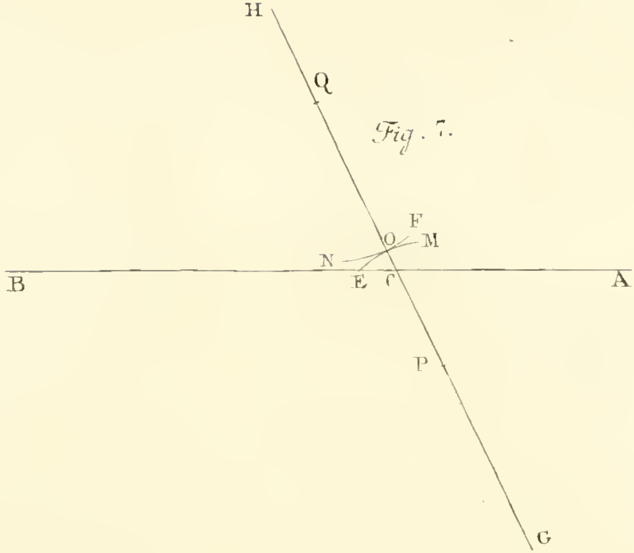


Fig. 7.

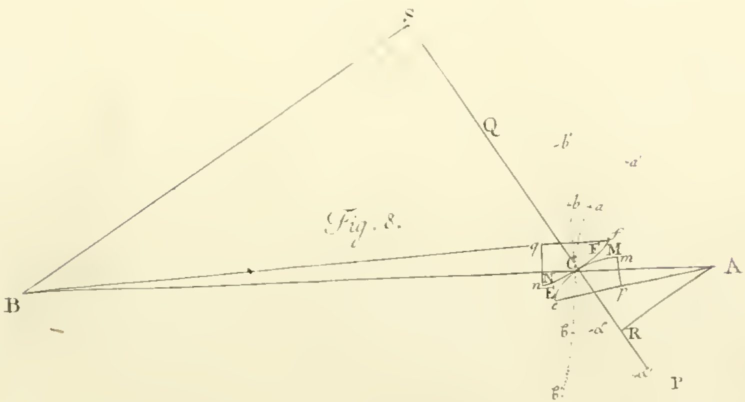
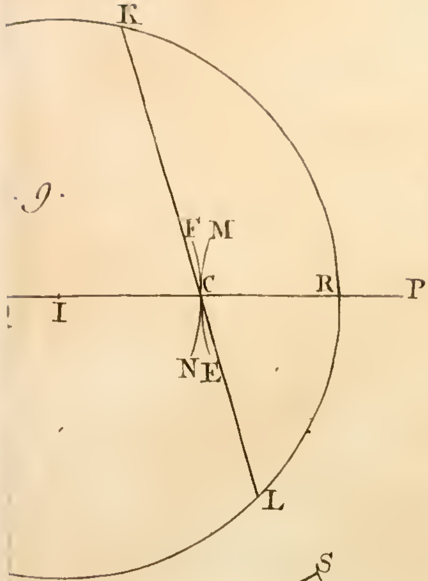


Fig. 8.



.9.

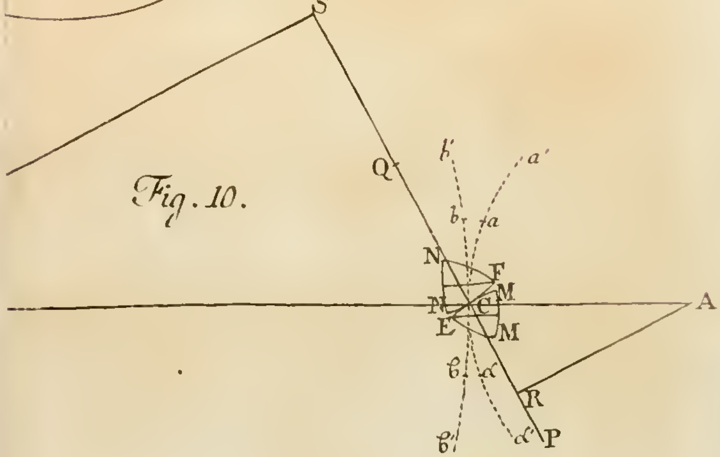
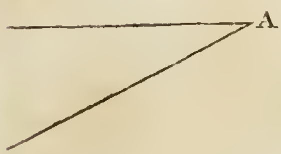


Fig. 10.



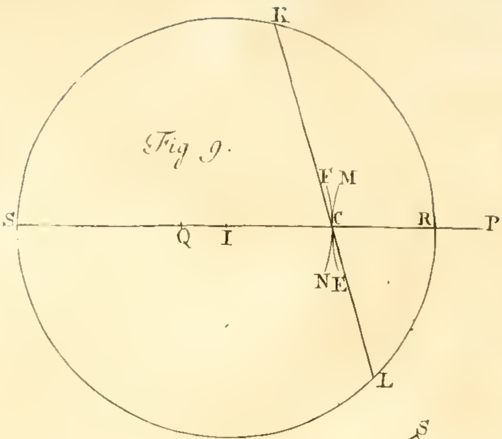


Fig. 9.

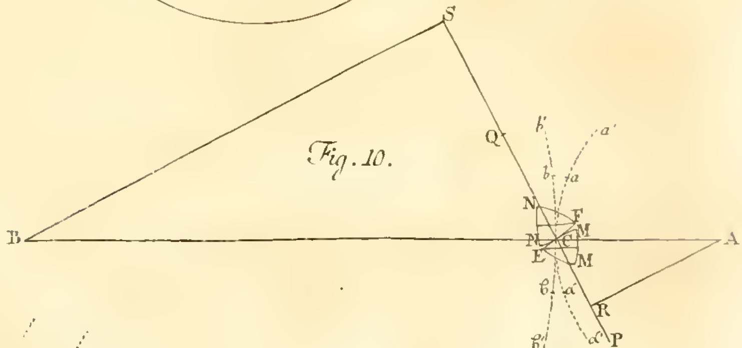


Fig. 10.

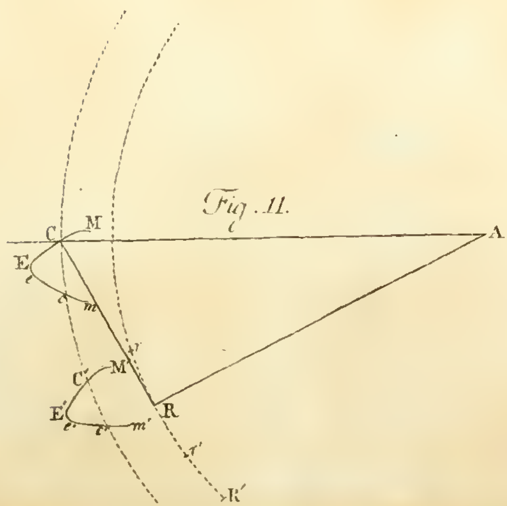


Fig. 11.

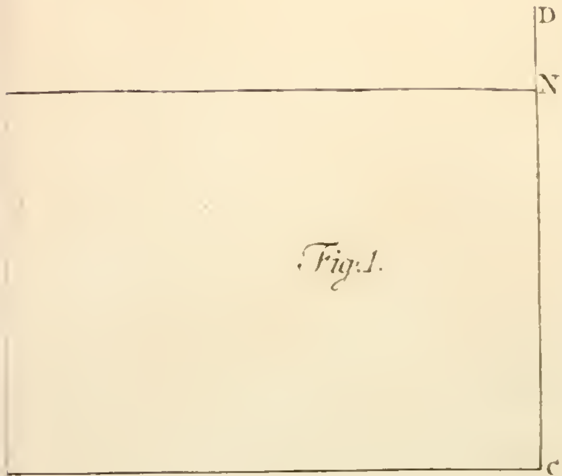
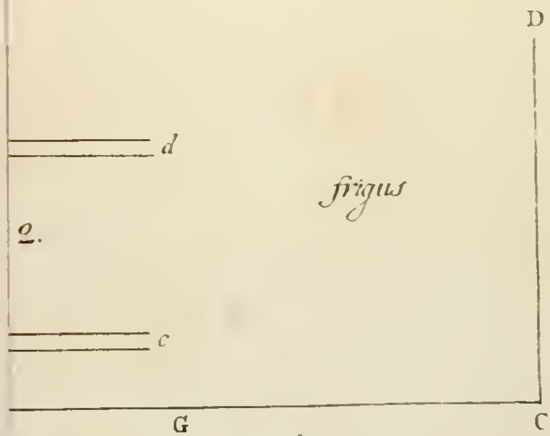


Fig. 1.



2.

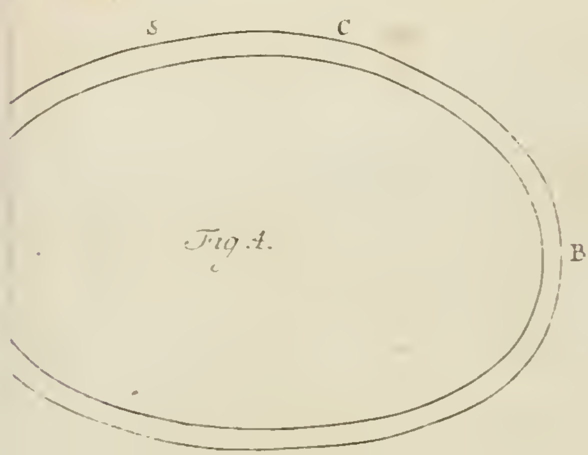


Fig. 4.

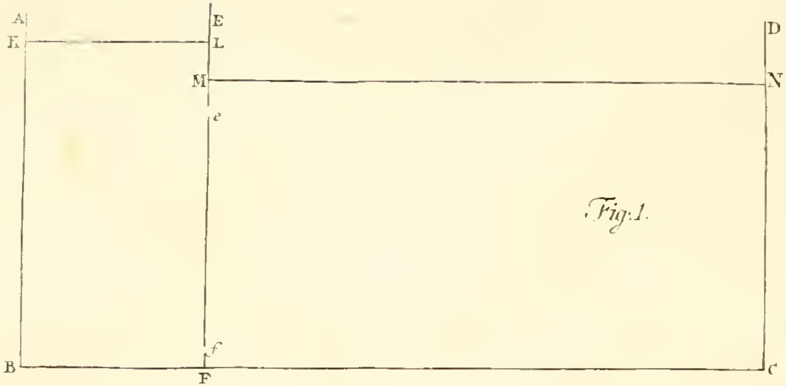


Fig. 1.

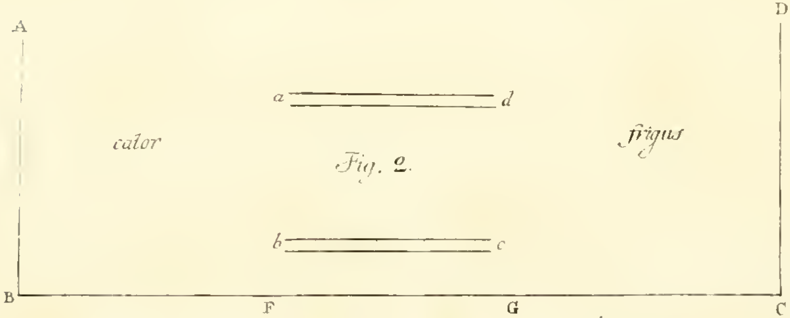
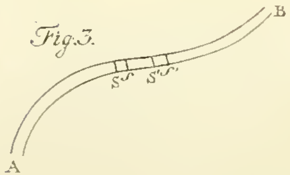


Fig. 2.

Fig. 3.



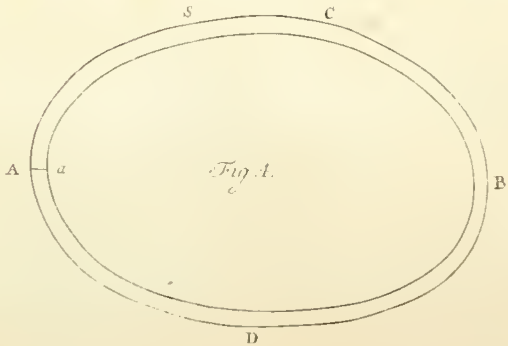
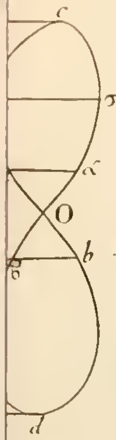


Fig. 4.



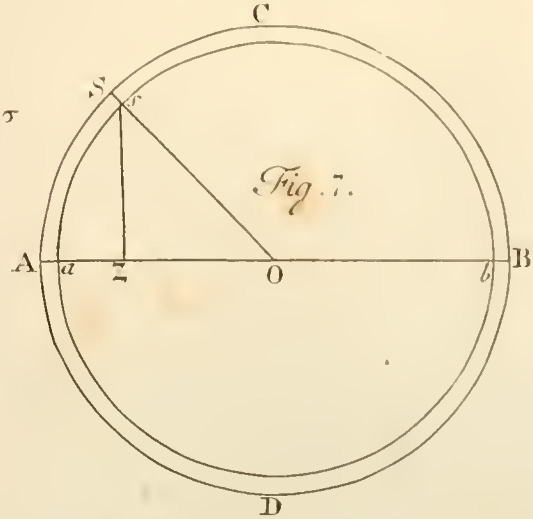


Fig. 7.

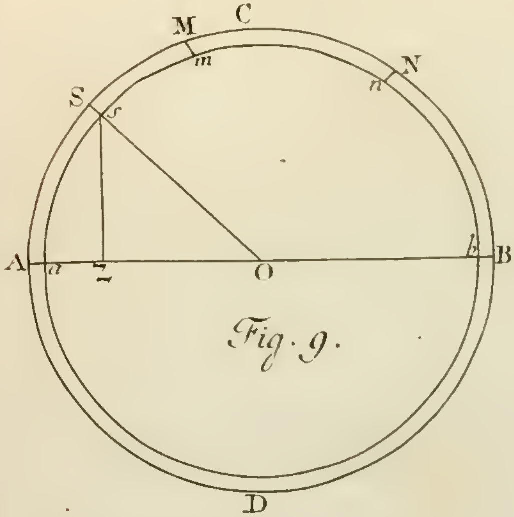
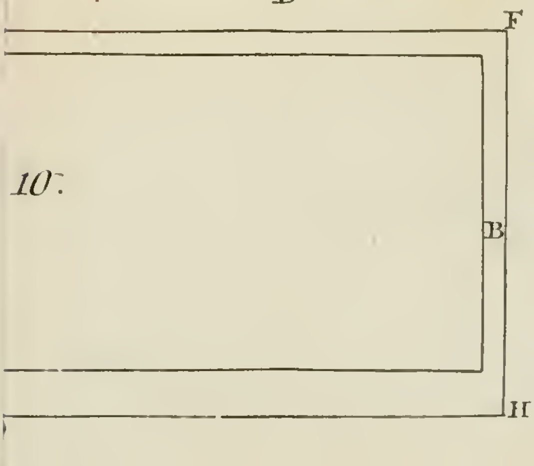


Fig. 9.



10.

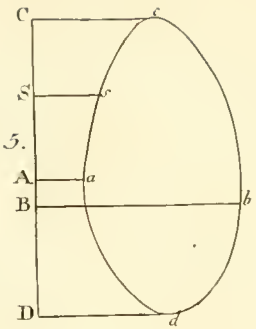


Fig. 5.

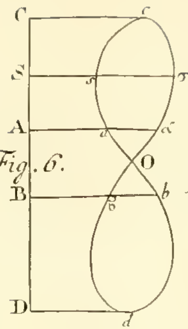


Fig. 6.

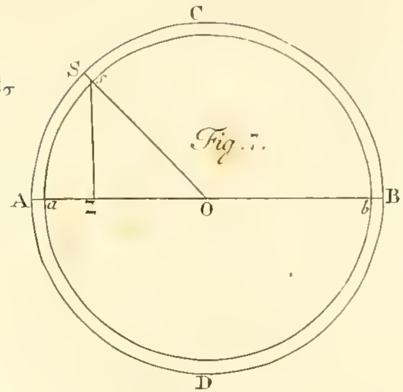


Fig. 7.

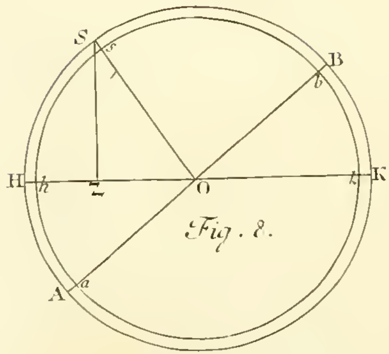


Fig. 8.

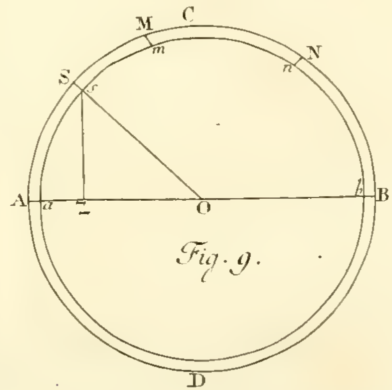


Fig. 9.

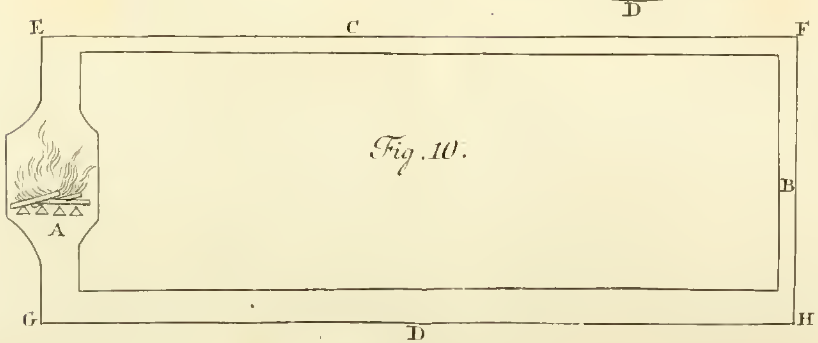


Fig. 10.

Fig. 1.





Fig. 2.

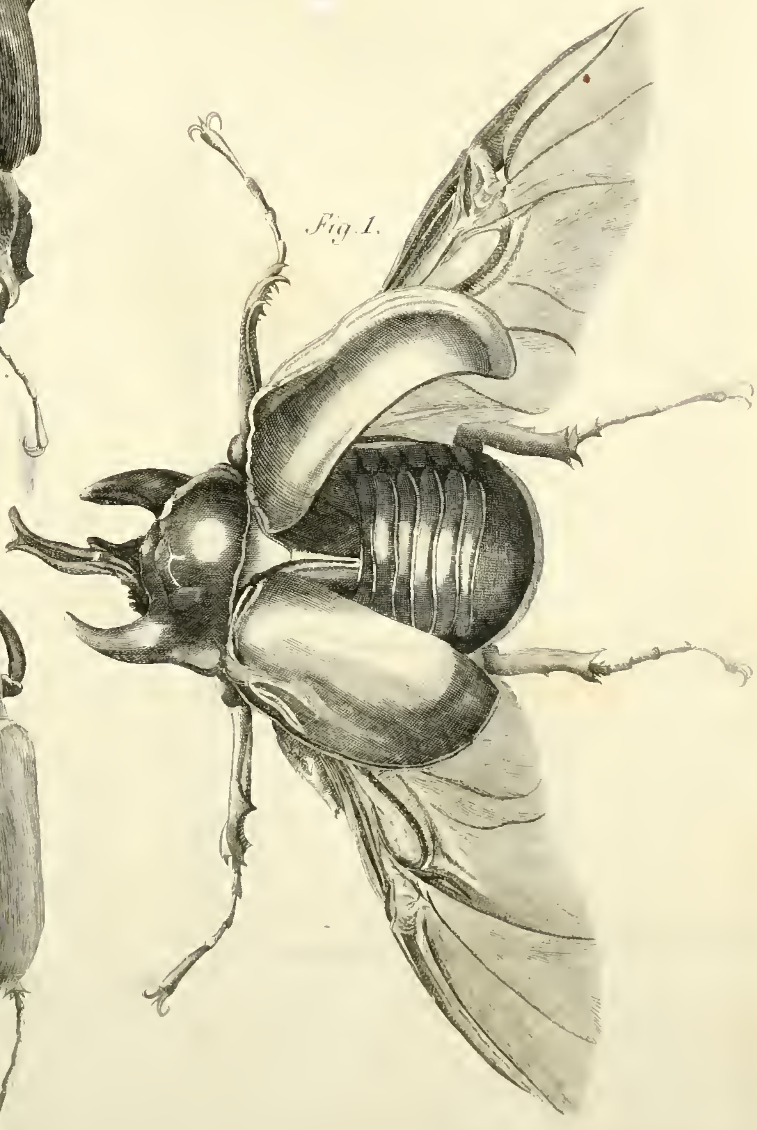
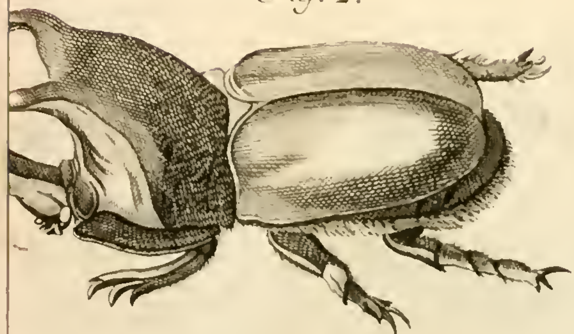


Fig. 1.



Fig. 3.

Fig. 2.



.4.



Fig. 1.

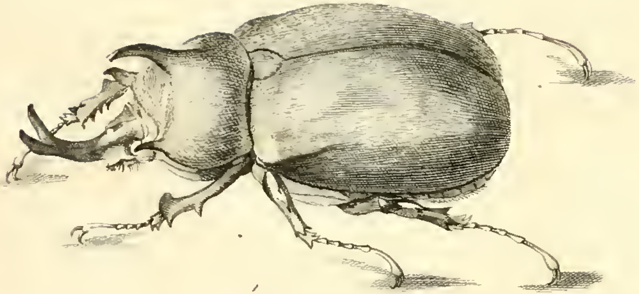


Fig. 2.



Fig. 3.

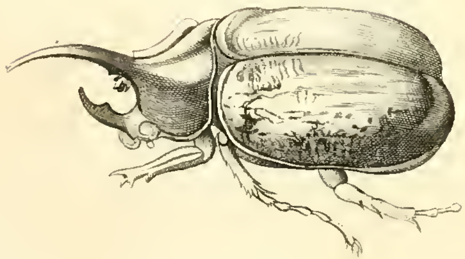


Fig. 4.



Nov. Comm. Acad. Sc. Petrop. Tom. XI. Tab. XIII.





Fig 2

Fig. 1

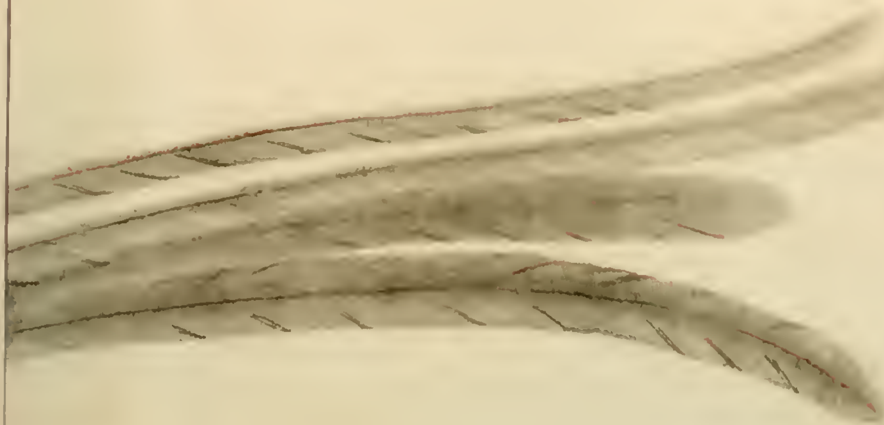


Fig. 3.




Fig. 2
Fig. 1.
Fig. 3.

G


Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 6.

G



Fig. 8



Fig. 9



Fig. 10.

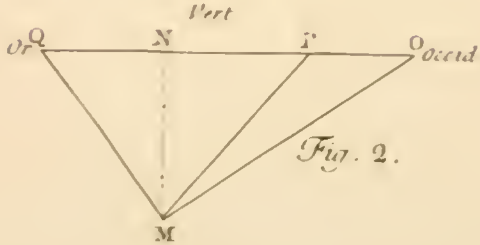


Fig. 2.

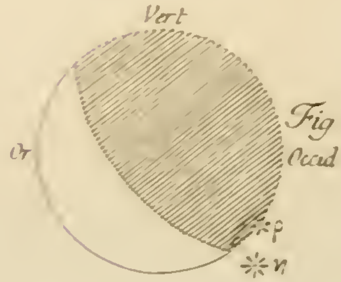
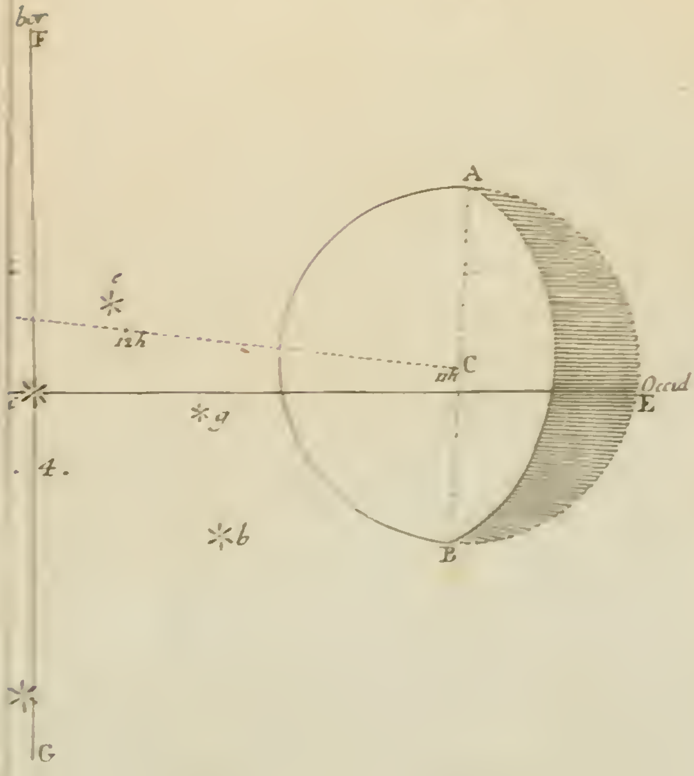


Fig. 3.



4.

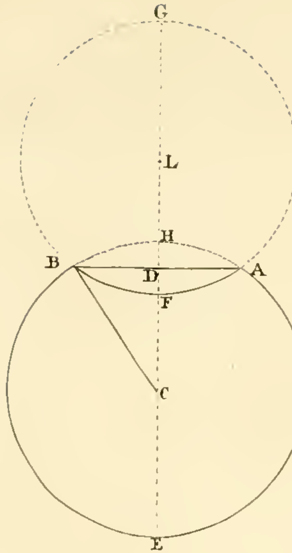


Fig. 1.

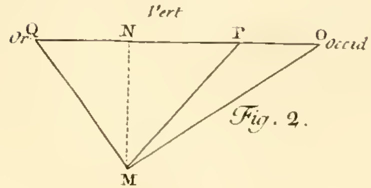


Fig. 2.

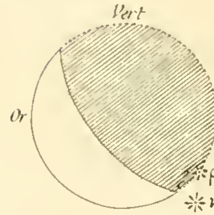


Fig. 3.

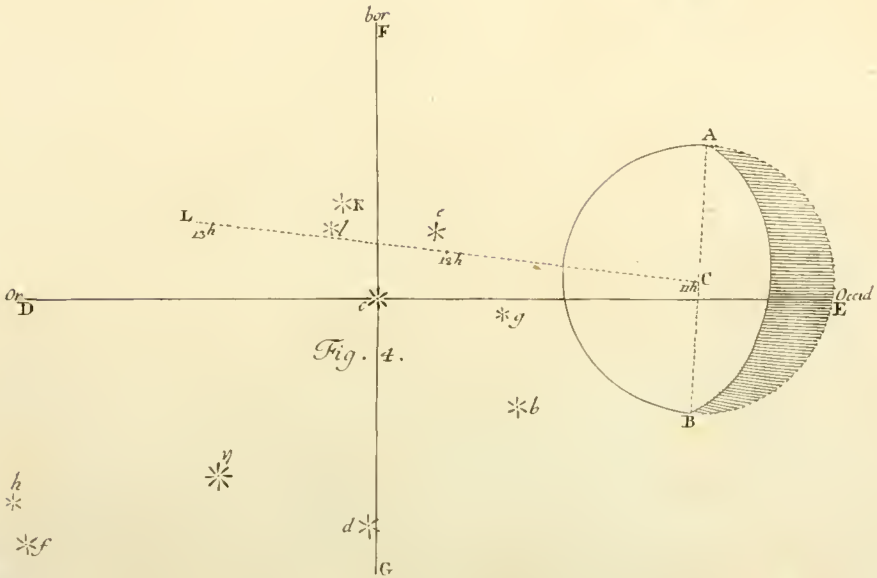


Fig. 4.

AMNH LIBRARY
100125017